MVE025 (samt TMA252, TMA253)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf
Datum: 2007-10-23, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Marcus Warfheimer, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
==

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} \quad \text{för} \quad t > 0, \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$(x = x(t),\ y = y(t))$ (7p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2 + 4x + 5}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (6p)

(b) Beräkna $\hat{f}$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2\text{p})$$

3.(a) Bestäm antalet nollställen till funktionen $f(z) = z^4 - 10z^3 + 2z^2 - 10z - 24$ i cirkelringen $1 \le |z| \le 2$. (4p)

(b) Avgör hur många nollställen samma funktion har i det högra halvplanet. Finns det reella nollställen? (4p)

4. Se nästa sida.

5. Låt P och Q vara polynom med komplexa koefficienter sådana att $\deg Q \ge \deg P + 2$ och låt γ vara en enkel sluten kurva (styckvis C^1, ett varv moturs) som inte passerar något av Q:s nollställen. Visa att

$$\int_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{z'_k \in I} \operatorname{Res}_{z'_k} \frac{P(z)}{Q(z)} = -2\pi i \sum_{z''_k \in O} \operatorname{Res}_{z''_k} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

där I är mängden av Q:s nollställen innanför γ och O är mängden av Q:s nollställen utanför γ. (1p för den första likheten, 5p för den andra)

6. Funktionen f är hel och sådan att $|f(z)| \ge C$ för någon positiv konstant C och alla $z \in \mathbb{C}$. Visa att f är konstant. (5p)

7. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

8. Se nästa sida.

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 4. Avbilda konformt området $\{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{0 < \operatorname{Re} z < 2\}$ på halvcirkelskivan $\{|w| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} w > 0\}$. (6p)

MVE025 (4p, F fr.o.m. 05/06, Kf fr.o.m. 07/08) 8. Antag att funktionen $g = g(s)$ är analytisk i hela s-planet utom i ändligt många singulära punkter s_k, samt att $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$. Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{s_k}(g(s)e^{st})$$

har en Laplacetransform, d.v.s. visa att det finns konstanter M och a sådana att $|f(t)| \leq Me^{at}$. (5p)

TMA253 (3p, Kf, 05/06, 06/07) 4. Avbilda konformt området $\{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{0 < \operatorname{Re} z < 2\}$ på halvcirkelskivan $\{|w| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} w > 0\}$. (6p)

TMA253 (3p, Kf, 05/06 & 06/07) 8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 4. Finn en analytisk funktion $f = f(z)$ som har imaginärdel

$$v(x, y) = x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}.$$

Kan man välja f så att $f(1) = 0$? (6p)

TMA252 (3p, F & Kf, fram till 04/05) 8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

/JM