MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2006-10-25, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Elisabeth Wulcan, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' - 2u' + u = te^t \qquad \text{för} \quad t > 0 \qquad (u = u(t)), \\ &u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \end{aligned} \qquad (6p)$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos ax}{x^2 + 2x + 2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (8p)

(b) Beräkna $\hat{f}(-1)$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Bestäm antalet nollställen till funktionen $f = f(z) = e^z - 3z^n$ i enhetsskivan $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (3p) Bestäm antalet nollställen till f:s derivator, $f^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, i samma cirkelskiva. Finns det reella bland nollställena? (4p)

4. Se nästa sida.

5. Låt f vara analytisk på och utanför den enkla slutna kurvan γ och antag att gränsvärdet $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existerar (och är ändligt). Visa att

$$f(z_0) - \lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

där $-\gamma$ är kurvan γ orienterad moturs och z_0 ligger utanför γ. (6p)

6. Härled formler 2 och 3 i Laplacetransformtabellen. Du får inte använda formler i tabellen vid härledningen, utan måste använda definitionen. (5p)

7. Se nästa sida.

8. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området D som ligger innanför enhetscirkeln och under den räta linjen genom punkterna 1 och i. (6p)

7. Visa att om D är ett område och om funktionen f är analytisk i D, så är $f(D)$ också ett område. (5p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området D som ligger innanför enhetscirkeln och under den räta linjen genom punkterna 1 och i. (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (= potensserieutveckling) kring en godtycklig punkt z_0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 4. Laurentutveckla funktionen

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$$

kring 0 i området som innehåller punkten $z = \pi$. (3p) Bestäm den inversa z-transformen av f. (3p)

7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (= potensserieutveckling) kring en godtycklig punkt z_0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

/JM

Komplex matematisk analys F/K

(TMA 252 / TMA 253 / MVE 025)

Lösningar 25/10-2006

1. $\left.\begin{array}{l} u'' - 2u' + u = te^t, \quad t>0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{array}\right\}$

$\overset{6,12}{\Rightarrow}$ $s^2 U(s) - s \cdot 1 - 0 - 2sU(s) + 2 + U =$

$= \dfrac{1}{(s-1)^2}$

$\Rightarrow (s-1)^2 U(s) = s - 2 + \dfrac{1}{(s-1)^2}$

$U(s) = \dfrac{(s-1)-1}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{(s-1)^4} =$

$= \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{(s-1)^4}$

$\underset{12}{\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow}}$ $u(t) = e^t - te^t + \dfrac{1}{6}t^3e^t =$

$= e^t\left(1 - t + \dfrac{1}{6}t^3\right)$

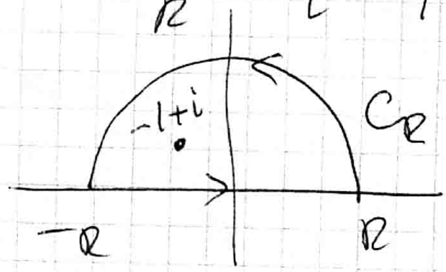
---

2. (a) Låt $f(z) = \dfrac{ze^{iaz}}{z^2+2z+2}$ och

antag till en början att $a \geq 0$.

Vi beräknar $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$, där

$$\Gamma_R = [-R,R] \cup C_R \quad , \quad C_R = \{Re^{i\theta} : \theta \in [0,\pi]\}$$ (2)



$(R > \sqrt{2})$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{iax}}{x^2+2x+2}\,dx + \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2+2z+2}\,dz \quad , \text{ och}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \operatorname{Res} f$$

$$z^2+2z+2 = (z+1)^2+1 = 0 \quad \begin{cases} z_1 = -1+i \\ z_2 = -1-i \end{cases}$$

$-1+i \in$ öhp , $-1-i \notin$ öhp

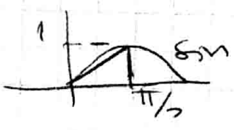
$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f = 2\pi i \left.\frac{z e^{iaz}}{2z+2}\right|_{z=z_1} =$$

$$= \cancel{2}\pi \cancel{i} \frac{(-1+i)e^{-ai}\cdot e^{-a}}{\cancel{-2} + \cancel{2}\cancel{i}_1 + \cancel{2}} = \pi e^{-a} e^{-ai}(-1+i)$$

(z_1 är enkelt nollställe till nämnaren, ej nollställe till täljaren $\Rightarrow$ den "enkla" formeln för residy kan användas)

$$\left| \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2+2z+2}\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta} e^{iaR\cos\theta}\, e^{-aR\sin\theta}}{R^2 e^{2i\theta} + 2Re^{i\theta} + 2} Rie^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\leq \pi \frac{R^2}{R^2-2R-2} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta = \frac{2\pi R^2}{R^2-2R-2} \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta$$



p.g.a. symmetri

$$\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad \forall\, \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \quad -aR\sin\theta \leq -\frac{2}{\pi}aR\theta \quad (\text{OBS! } a \geq 0)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq \ldots \leq \frac{2\pi R^2}{R^2-2R-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}aR\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{R^2-2R-2} \cdot \frac{1}{-\frac{2}{\pi}aR} \left[e^{-\frac{2}{\pi}aR\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{R^2-2R-2} \cdot \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{R}\left(1 - e^{-aR}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\underset{R\to\infty}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+2x+2}\,dx + 0 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{-1+i} f =$$

$$= \pi e^{-a}(\cos a - i\sin a)(-1+i) = (*)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos ax}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \pi e^{-a}(-\cos a + \sin a)$$

$a \leq 0$: cos jämn $\Rightarrow \cos ax = \cos|a|x$

$|a| \geq 0$ alltid

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos ax}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-|a|}(\sin|a| - \cos a)$$

(b) $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ix\xi}}{x^2+2x+2}\,dx = \left[\text{tag } a = -\xi \text{ och se } (*) \right]$

$= \pi e^{+\xi}(\cos\xi + i\sin\xi)(-1+i)$ för $\xi \leq 0$

$$\Rightarrow \hat{f}(-1) = \pi e^{-1}(\cos 1 - i \sin 1)(-1+i)$$
$$= \frac{\pi}{e}\Big((\sin 1 - \cos 1) + i(\sin 1 + \cos 1)\Big)$$

---

3. (a) Låt $F(z) = -3z^n$, $G(z) = e^z$.

På $\{|z| = 1\}$:

$$|F(z)| = 3 \cdot 1 = 3$$

$$|G(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x \leq e^1 < 3$$

$\Rightarrow$ F o $F+G$ har lika många nollställen innanför $\{|z|=1\}$, d.v.s. n st.

$\Rightarrow$ $f(z) = F(z) + G(z)$ har n nollställen i enhetsskivan

(b) $f^{(m)}(z) = e^z - \underbrace{3n(n-1)\ldots(n-m+1)}_{\text{för } m \leq n: \; = a_m > 3 > e} z^{n-m}$

$\Rightarrow$ samma resonemang som ovan ger att $f^{(m)}(z)$ har $n-m$ nollställen i $\{|z|<1\}$

$m > n$: $f^{(m)}(z) = e^z - 0$ har inga nollställen

För $m < n$: (och $m \geq 0$)

$$f^{(m)}(0) = e^0 = 1$$
$$f^{(m)}(1) = e - a_m < 0$$

$\Rightarrow$ $f^{(m)}$ har minst ett reellt nollställe i $(0,1)$ för $0 \leq m < n$.

4.

$$\frac{z}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}$$

5

$$z = A(z+2) + B(z+1)$$

$$z=-1: \quad -1 = +A$$

$$z=-2: \quad -2 = -B$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots\right)$$

för $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \dots\right)$$

för $\left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2$

$(r > 2 > 1)$

$$\Rightarrow f(z) = (2-1)\cdot\frac{1}{z} - (2^2-1)\frac{1}{z^2} + $$

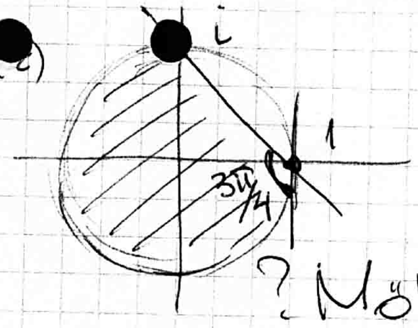
$$+ (2^3-1)\frac{1}{z^3} - \dots + \overbrace{(-1)^{n-1}(2^n-1)}^{=a_n}\frac{1}{z^n} + $$

$$+ \dots \quad \text{i} \quad \{|z| > 2\}$$

$$\Rightarrow f(z) \subset \{a_n\},$$

där $a_n = (-1)^{n-1}(2^n-1)$

4'



För att få en vinkel med spets i 0:

? Möbiusavbildning s.a.

$1 \mapsto 0$ (går genom 0)

$i \mapsto \infty$ (båda räta)

$\infty \mapsto 1$

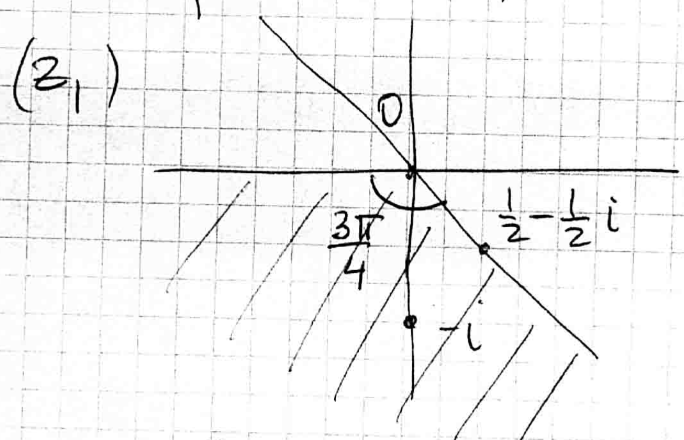
Välj

$$z_1 = T(z) = \frac{z-1}{z-i}$$

$\Rightarrow$ den räta linjen genom 1 och i avbildas på realaxeln i z_1-planet

$$-i \mapsto \frac{-i-1}{-2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$\Rightarrow$ enhetscirkeln avbildas på linjen genom 0 och $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (samma slutsats kan dras av konformiteten)

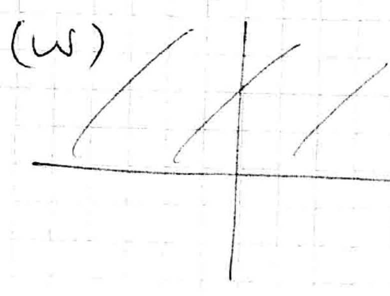


$$0 \mapsto \frac{1}{i} = -i$$

$\Rightarrow$ D avbildas på det streckade området

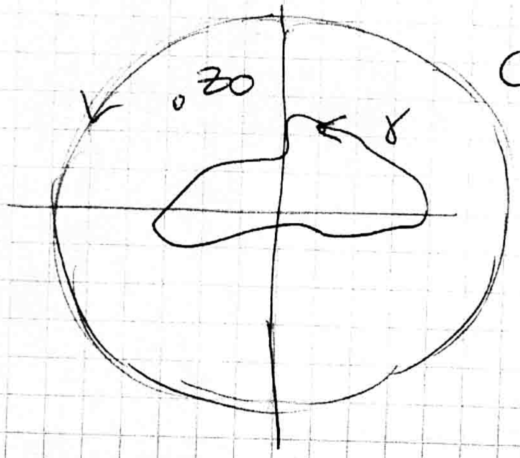
Återstår rotation π radianer medurs och val av potens som öppnar vinkeln i 0 till π:

$$w = \left(e^{-i\pi} z_1\right)^{\frac{4}{3}}$$



5. Tag R så stort att hela kurvan γ och z_0 ligger i cirkelskivan $\{|z| < R\}$

$C_R = \{|z| = R\}$



Enligt Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R \cup \{-\gamma\}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Vi måste nu visa att

$$A = \lim_{z \to \infty} f(z) \overset{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - A \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \right.$$

$$\left. - A \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{1}{z - z_0}\, dz}_{=1} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \left(f(z) - A \right) \frac{1}{z - z_0}\, dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} R \cdot \frac{1}{R - |z_0|} \cdot \max_{|z| = R} |f(z) - A| \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$