MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2005-10-19, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvak terna.
Telefonvakt: Elin Götmark, tel. 0762-721860, besöker sale n ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproble met

$$u'' + 2u' + 2u = e^{-t} \qquad \text{för} \quad t > 0 \qquad (u = u(t)),$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \qquad (6p)$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna Fouriertransformen $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Bestäm antalet nollställen till polynomet $P(z) = z^5 + 3z + 1$ i cirkelringen $\{1 < |z| < 2\}$. (3p) Gör så mycket du kan för att ytterligare lokalisera röt terna (d.v.s. tala om vilka kvadranter, intervall etc de ligger i; du får använda både reell och komplex analys). (max 4p)

4. Se nästa sida.

5. Låt $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ldots, n-1$. Visa att $\max_{|z|=1} |P(z)| \geq 1$. (6p)

6. Funktionen $f = f(z)$, $f \not\equiv 0$, är analytisk i $\{0 < |z| < 2\}$ och uppfyller

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vad är det för typ av singularitet f har i 0? (5p)

7. Se nästa sida.

8. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylo rutveckling (= potensserieutveckling) kring 0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ 1 \le \operatorname{Re} z < 2\}. \qquad (7p)$$

MVE025 (F, "nya" kursen) 7. Formulera och bevisa Schwarz lemma. (5p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0,\ 1 \le \operatorname{Re} z < 2\}. \qquad (7p)$$

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 4. Ange två Laurentutvecklingar kring $z_0 = i$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

Redogör noga för var de gäller. (7p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

/JM

Complex matematisk analys F2/Kf2

(MVE 025, TMA 253, TMA 252)

19/10 - 05

Lösningar

1. $u'' + 2u' + 2u = e^{-t}$, $t > 0$

$u(0) = 1$, $u'(0) = 0$

$$\supset \quad s^2 U(s) - s + 2sU(s) - 2 + 2U(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$U(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

$$1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s+1)$$

$s = -1$ $\quad A = 1$

s^2: $\quad 0 = A + B \quad B = -1$

s^0: $\quad 1 = 2A + C \quad C = -1$

$$U(s) = \frac{s+\cancel{1}}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{s+\cancel{1}}{\cancel{(s+1)^2+1}}$$

$$\subset \quad e^{-t}\sin t + e^{-t}$$

---

2. $$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx =$$

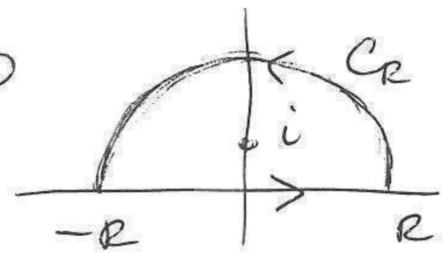
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \xi x}{(x^2+1)^2}\,dx + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\text{udda}}{\frac{\sin(-\xi x)}{(x^2+1)^2}}\,dx}_{=0}$$

$\Rightarrow$ samma integral ska beräknas i (a) och (b), med $\xi = a$

cos. jämn $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos|a|x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$\Rightarrow$ räcker att beräkna integralen för $|a|$ istället för $\underline{a}$

$|a| \geq 0$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$R > 1$

C_R: $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz$$

$$\underbrace{\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz} = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R}$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}$$

(nämnaren $= 0$ för $\pm i$)

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{i|a|R\cos\theta} \cdot e^{\overbrace{-|a|R\sin\theta}^{\leq 0}}}{(R^2-1)^2} Rie^{i\theta}\,d\theta \right|$$

$$\leq \pi \frac{1 \cdot 1 \cdot R \cdot 1}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+i|a|x}}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}$$

$\underline{i}$ är en dubbelpol $\quad (z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2} = \left((z-i)^2 \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} =$$

$$= \left(\frac{e^{i|a|z}}{(z+i)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} = \frac{e^{i|a|z} \cdot i|a|(z+i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+i)}e^{i|a|z}}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}} \Bigg|_{z=i}$$

$$= \frac{e^{-|a|} i|a| \cdot 2i - 2e^{-|a|}}{(2i)^3} =$$

$$= \frac{+\cancel{2}^{\,1}}{+\cancel{8}_{4}\, i} e^{-|a|} (|a|+1)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|a|x}}{(x^2+1)^2} dx = \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{2} \cancel{i}} e^{-|a|} (|a|+1) \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos |a| x}{(x^2+1)^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|a|x}}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-|a|} (|a|+1), \qquad a \in \mathbb{R}$$

---

3. På $|z| = 2$: (Rouché's sats)

$|z^5| = 2^5 = 32$

$|3z+1| \le 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$\Rightarrow$ $z^5 + 3z + 1$ och z^5 har lika många nollställen innanför $\{|z| = 2\}$, d.v.s. 5 st.

På $|z| = 1$: $|3z| = 3$, $|z^5 + 1| \le 2$

$\Rightarrow$ $z^5 + 3z + 1$ och $3z$ har lika många nollställen innanför $\{|z| = 1\}$, d.v.s. 1 st.

Inga på $\{|z| = 1\}$ $\Rightarrow$ $P(z)$ har 4 nollställen i $\{1 < |z| < 2\}$

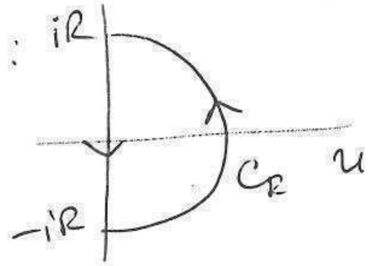
För övrigt: minst ett reellt nollställe (4)

(ty deg P udda); kan inte finnas positivt

$$P(-1) = -3, \quad P(0) = 1$$

$\Rightarrow \exists$ nollställe $\in (-1, 0)$

$P'(x) = 5x^4 + 3 > 0 \Rightarrow$ endast ett reellt nollställe

hhp: 

$$P(iR) = iR^5 + 3iR + 1$$

$u = \mathrm{Re}\, P(iR) \equiv 1$

$\Rightarrow$ inga varv runt 0

y	$-\infty$ $-R$	0	R ∞
u	1	1	1
v	$\sim -R^5$	0	$\sim R^5$
	IV kv.		I kv.

nära v-axeln

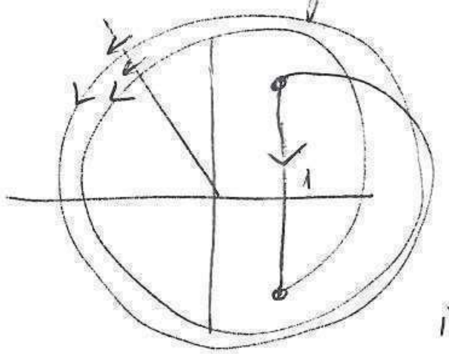
$$C_R: \quad P(z) = z^5\left(1 + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^5}\right)$$

$\arg P = \arg z^5 + \arg(1 + \underbrace{\boxed{}}_{|\text{litet}|})$

femdubblar vinklar ≈ 0

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ på $C_R \Rightarrow z^5$ ger $2\frac{1}{2}$ varv

$\Rightarrow P$ ger $\approx 2\frac{1}{2}$ varv



två varv runt 0

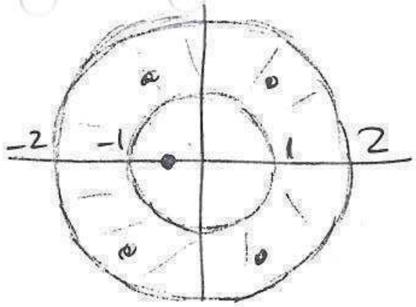
$\Rightarrow$ två nollställen i hhp

inga på Im-axeln

$\Rightarrow$ två i vhp

reella koefficienter $\Rightarrow$ nollställena ligger symmetriskt m.a.p. Re-axeln

$\Rightarrow$ ett nollställe i varje kvadrant



(5.) P är sin egen Taylorutveckling kring 0

$$\Rightarrow 1 = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P(z)}{z^{n+1}}\,dz\ ,\quad \gamma = \{|z|=1\}$$

Antag att: $\max_\gamma |P| < 1$

$$\Rightarrow 1 = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| < \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{1}{1}\cdot\cancel{2\pi} = 1$$

Motsägelse!

$$\Rightarrow \max_\gamma |P| \geq 1$$

(6.) Antag att 0 hävbar singularitet

$$\Rightarrow \exists \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow f$ analytisk i 0. 0 icke-isolerat nollställe till f; $f \not\equiv 0$ Omöjligt!

$\Rightarrow$ 0 ej hävbar singularitet

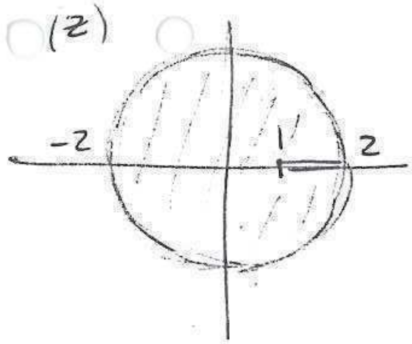
Antag att 0 pol $\Rightarrow \underbrace{\lim_{z\to 0} f(z)}$ $= \infty$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{=0} = 0$$

Motsägelse!

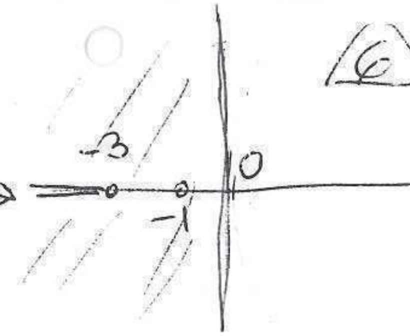
$\Rightarrow$ 0 är väsentlig singularitet för f

4!



$z_1 = \dfrac{z+2}{z-2}$

$2 \to \infty$
$-2 \to 0$
$1 \to -3$
$0 \to -1$
$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$

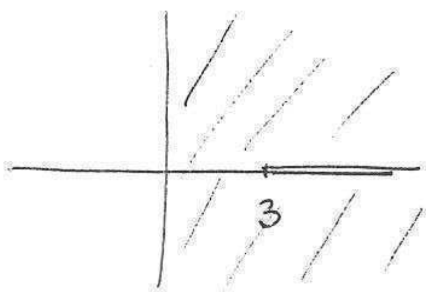


$\{|z|=2\} \perp \mathrm{Re}$ i -2
$\Rightarrow$ bilden $\perp \mathrm{Re}$ i 0
$\Rightarrow$ Im-axeln är bilden av $\{|z|=2\}$

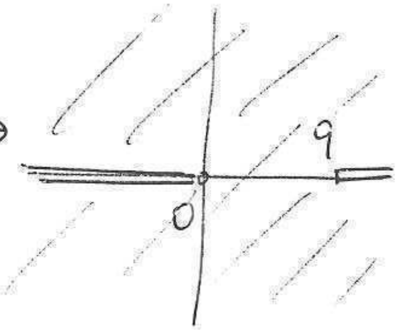
$\{|z|=2\} \to \mathrm{Im}$

snitt mellan -3 och ∞; längs Re, ej genom -1

$z_2 = -z_1$

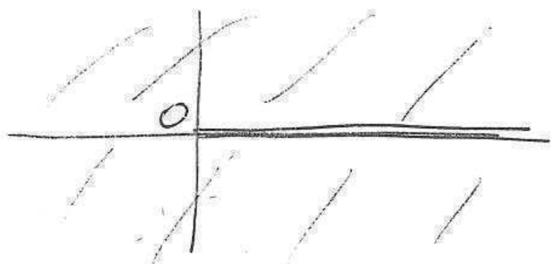


$z_3 = z_2^2$

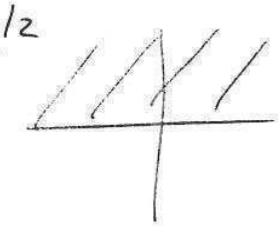


$z_4 = \dfrac{z-9}{z}$

$9 \to 0$
$0 \to \infty$
$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$
$\infty \to 1$



$w = z_4^{1/2}$



4".

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z+i)(z-i)}$$

$$\frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i}$$

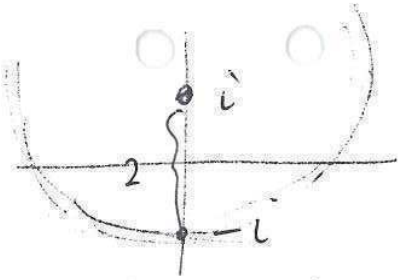
$$z = A(z-i) + B(z+i)$$

$z = i$: $\quad i = 0 + 2i \cdot B \qquad B = \frac{1}{2}$

$z = -i$: $\quad -i = -2iA + 0 \qquad A = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i}$ är redan en potens av $z-i$

Återstår att utveckla $1/(z+i)$



(i) $0 < |z-i| < 2$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} =$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i}\left(1 - \frac{z-i}{2i} + \frac{(z-i)^2}{-4} - \dots\right)$$

$$\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i} - \frac{i}{4} + \frac{1}{8}(z-i) + \frac{i}{16}(z-i)^2 - \dots$$

(ii) $|z-i| > 2$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} =$$

$$= \frac{1}{z-i}\left(1 - \frac{2i}{z-i} + \frac{-4}{(z-i)^2} - \dots\right)$$

$$\left|\frac{2i}{z-i}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{(z-i)^2} - \frac{2}{(z-i)^3} + \dots$$