LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 12 jan 2005, f V
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.

---

1. (0.5p+0.5p+1p+1p) Funktionen

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-4z^2+z+6}$$

har en Laurentserieutveckling av typen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-2)^{-n}$ i området $\mid z-2 \mid > 3$.

a) Bestäm a_n för $n \geq 0$. Ange endast svar!
b) Bestäm b_1. Ange endast svar!
c) Bestäm b_n för $n \geq 2$. Ange endast svar!
d) Beräkna

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

där C är den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie $\frac{3}{2}$.
OBS: Motivera beräkningen!

Lösning a) - c). Det gäller att

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-4z^2+z+6} = \frac{z^2+1}{(z+1)(z-2)(z-3)}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} - \frac{5}{3}\frac{1}{z-2} + \frac{5}{2}\frac{1}{z-3}.$$

Vi sätter $w = z-2$ och får

$$f(z) = \frac{1}{6}\frac{1}{w+3} - \frac{5}{3}\frac{1}{w} + \frac{5}{2}\frac{1}{w-1}$$

$$= \frac{1}{6w}\frac{1}{1+3w^{-1}} - \frac{5}{3}w^{-1} + \frac{5}{2w}\frac{1}{1-w^{-1}}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n w^{-n-1} - \frac{5}{3}w^{-1} + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1}$$

$$= w^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n 3^{n-1})w^{-n-1}$$

$$= (z-2)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(5 + (-1)^n 3^{n-1})(z-2)^{-n-1}$$

$$= (z-2)^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(5 + (-1)^{n-1} 3^{n-2})(z-2)^{-n}$$

Alltså är a) $a_n = 0$, $n \geq 0$ b) $b_1 = 1$ och c) $b_n = \frac{1}{2}(5 + (-1)^{n-1}3^{n-2})$, $n \geq 2$. $\leftarrow SVAR$

Lösning d). Kända satser visar att integralens värde är lika med $2\pi i \times$ (Antalet nollställen för f innanför C räknade med multiplicitet minus antalet poler för f innanför C räknade med multiplicitet) $= 2\pi i(2-1) = 2\pi i \leftarrow$ $SVAR$

2. (3p) En Möbiusavbildning $w = f(z)$ avbildar punkterna -1, 0 och 1 på punkterna ∞, 1, respektive 0. Bestäm det minimala avståndet mellan $f(z_1)$ och $f(z_2)$ då z_1 och z_2 är diametralt motsatta punkter på cirkel $\mid z \mid = \frac{1}{2}$.

Lösning. Möbiusavbildningen uppfyller

$$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{1-\infty}{1-0} = \frac{z-1}{z+1}\frac{0+1}{0-1}$$

dvs

$$w = f(z) = \frac{1-z}{1+z}.$$

Om $z_1 = \frac{1}{2}e^{it}$ och $z_2 = -\frac{1}{2}e^{it}$, där $0 \leq t < \pi$, blir

$$\mid f(z_1) - f(z_2) \mid = \mid \frac{2-e^{it}}{2+e^{it}} - \frac{2+e^{it}}{2-e^{it}} \mid$$

$$= \frac{8}{| 4 - e^{2it} |} \geq \frac{8}{5}$$

där likhet inträffar om $t = \frac{\pi}{2}$. $SVAR:\ \frac{8}{5}$.

3. (4p) Beräkna

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$$

Lösning. Om $z = re^{it}$ där $r > 0$ och $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ definieras $\log z = \ln r + it$, $z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = \sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}}$ och $f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{(1+z^2)^2}$. Låt nu $0 < \varepsilon < 1 < \rho$, $C_\rho : z = \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ och $\gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Funktionen $f(z)$ har en pol av ordning 2 i punkten $z = i$ och är analytisk utanför $\{i\} \cup \{$icke-positiva imaginäraxeln$\}$. Cauchys sats ger

$$\int_\varepsilon^\rho f(x)dx + \int_{C_\rho} f(z)dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{-\gamma_\varepsilon} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}(f(z); i).$$

Här är

$$| \int_{C_\rho} f(z)dz | \leq \frac{\sqrt{\rho}(\ln\rho + \pi)}{(\rho^2-1)^2}\pi\rho$$

och

$$| \int_{-\gamma_\varepsilon} f(z)dz | \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \pi)}{(1-\varepsilon^2)^2}\pi\varepsilon$$

och genom att låta $\varepsilon \to 0$ och $\rho \to \infty$ följer att

$$\int_0^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^0 f(x)dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z); i).$$

Vidare är

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 \frac{i\sqrt{| x |}(\ln | x | + i\pi)}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{i\sqrt{x}(\ln x + i\pi)}{(1+x^2)^2}dx$$

och eftersom $f(x)$ är reell for $x > 0$ blir

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi \mathrm{Re}\ \mathrm{Res}(f(z); i).$$

Här är

$$\mathrm{Res}(f(z); i) = \left[\frac{d}{dz} \frac{z^{\frac{1}{2}} \log z}{(z+i)^2} \right]_{z=i}$$

$$= \left[-2(z+i)^{-3} z^{\frac{1}{2}} \log z + \frac{1}{2}(z+i)^{-2} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \log z + (z+i)^{-2} \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \right]_{|z=i}$$

och vi får

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}(\pi - 4).$$

4. (2.5p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i området $0 <\mid z - z_0 \mid< r$. Visa att om $\mid f(z) \mid$ är begränsad i en punkterad omgivning av z_0 så finns en i området $\mid z - z_0 \mid< r$ konvergent potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ vars summa i punkten $z \neq z_0$ är lika med $f(z)$.

5. (2.5p) Den komplexvärda kontinuerliga funktionen f är definierad i ett öppet sammanhängande område D i komplexa talplanet. Vidare gäller att

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

för varje triangel γ i D som omsluter ett område som helt ligger i D. Visa att funktionen f är analytisk.