LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 18 augusti 2004, fm
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
− −

1. (2p) Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{z - 6}$$

i en Laurentserie i området i området $\mid z - 4 \mid > 2$. Angiv endast svar.

Lösning: Vi har att

$$\frac{3z^2 - 2z + 4}{z - 6} = 3z + 16 + \frac{100}{z - 6}$$

och

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{z-4-2} = \frac{1}{z-4}\frac{1}{1-\frac{2}{z-4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z-4)^n}.$$

Härav följer att

$$f(z) = 3(z-4) + 28 + 100\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z-4)^n} \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Beräkna imaginärdelen av integralen

$$\int_C \frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2 \sin z} dz$$

där C är den positivt orienterade rektangeln med hörn i punkterna $1 - i$, $1 + 4i$, $-1 + 4i$ och $-1 - i$.

Lösning: Sätt

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2\sin z}.$$

Det gäller att $\sin z=0$ om och endast om $z=n\pi$ där n är ett heltal. Eftersom

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$$

är

$$\lim_{z\to 0}f(z)=0$$

och funktionen f har en hävbar singularitet i origo. Punkterna $n\pi$ där n är ett nollskilt heltal ligger utanför det område C inringar. Funktionen f har poler av ordning 2 i punkterna $\pm i\pi$. Punkten $-i\pi$ ligger utanför det område C inringar och punkten $i\pi$ ligger innanförför det område C inringar. Vidare är

$$\mathrm{Res}(f(z);i\pi)=\lim_{z\to i\pi}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i\pi)^2\sin z}$$

$$=\lim_{z\to i\pi}\frac{2z(z+i\pi)\sin z-2z^2\sin z-z^2(z+i\pi)\cos z}{(z+i\pi)^3\sin^2 z}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\sinh\pi}+\frac{\cosh\pi}{4\pi\sinh^2\pi}.$$

Residusatsen visar nu att

$$\int_C\frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2\sin z}dz=2\pi i(-\frac{1}{4\pi\sinh\pi}+\frac{\cosh\pi}{4\pi\sinh^2\pi})$$

$$=i(-\frac{1}{2\sinh\pi}+\frac{\cosh\pi}{2\sinh^2\pi}).$$

$SVAR: -\frac{1}{2\sinh\pi}+\frac{\cosh\pi}{2\sinh^2\pi}$

3. (1p+2p+1p) Funktionen

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1},$$

vars singularitet i origo är hävbar, har en Maclaurinutveckling av typen $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$. a) Bestäm konvergensradien. b) Visa, att $B_0=1$ och

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k,\ n\geq 1.$$

c) Visa, att $B_{2n+1} = 0$, $n \geq 1$.

Lösning: a) Ekvationen $e^z = 1$ har lösningarna $z = n2\pi i$ där n är ett godtyckligt heltal. De singulära punkter till $f(z)$ som ligger närmast origo är punkterna $\pm 2\pi i$ med avståndet 2π till origo. Maclaurinseriens konvergensradie är därför $2\pi \leftarrow SVAR$

b) Definiera $f(0) = 1$. Det gäller att

$$z = (e^z - 1)f(z)$$

och för $\mid z \mid < 2\pi$ följer nu att

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

Alltså är

$$1 = B_0$$

och

$$0 = \sum_{\substack{m+k=n \\ m \geq 1, k \geq 0}} \frac{B_k}{m!k!} \text{ för } n \geq 2.$$

Om $n \geq 2$ följer alltså att

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k$$

eller

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \text{ för } n \geq 1.$$

Med andra ord gäller att

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \text{ för } n \geq 1.$$

c) Funktionen

$$B_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = f(z) - B_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z \cosh \frac{z}{2}}{2 \sinh \frac{z}{2}}$$

är jämn varför

$$B_n = \left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{z\cosh\frac{z}{2}}{2\sinh\frac{z}{2}}\right]_{|z=0} = 0 \text{ om } n \geq 2 \text{är udda.}$$

4. (2p) Bestäm Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}, $-\infty < t < \infty$.

5. (3p) Formulera och bevisa Cauchys integralformel.