LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 14 januari 2004 fm
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
––

1. (2p+2p) a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ sådan att $T(0) = -1$, $T(1) = \infty$ och $T(\infty) = 2$. b) Utveckla funktionen $T(z)$ i en Laurentserie i området $\mid z \mid > 1$.

Lösning: a) Vi har att

$$\frac{w+1}{w-\infty}\frac{2-\infty}{2+1} = \frac{z-0}{z-1}\frac{\infty-1}{\infty-0}$$

dvs

$$\frac{w+1}{3} = \frac{z}{z-1}.$$

Härav följer att

$$w = T(z) = \frac{2z+1}{z-1} \leftarrow SVAR$$

b) Det gäller att

$$\frac{1}{1-a} = \Sigma_{n=0}^{\infty} a^n \text{ om } \mid a \mid < 1.$$

Om $\mid z \mid > 1$ följer därför att

$$T(z) = 2\frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= 2\Sigma_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \Sigma_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}$$

$$= 2 + 3\Sigma_{n=1}^{\infty} z^{-n} \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Bestäm antalet nollställen för polynomet $p(z) = z^6 + 6z + 10$ i första kvadranten.

Lösning: Låt ρ vara ett positivt tal och betrakta den slutna kurvan $\delta = \alpha + \beta + \gamma$, där

$$\alpha(x) = x,\ 0 \leq x \leq \rho$$

$$\beta(t) = \rho e^{it},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

och

$$\gamma(y) = iy,\ \rho \geq y \geq 0.$$

Det är tydligt att $\Delta_\alpha \arg p(z) = 0$ eftersom $p(z)$ är ett strikt positivt tal om $z \in \alpha$. Vidare är

$$p(\rho e^{it}) = \rho^6 e^{6it}(1 + \frac{6}{\rho^5}e^{-5it} + \frac{10}{\rho^6}e^{-6it}).$$

Alltså saknar $p(z)$ nollställen på β om ρ är tillräckligt stort och det följer att $\Delta_\beta \arg p(z) \approx 6\frac{\pi}{2} = 3\pi$ om ρ stort. På kurvan γ är imaginärdelen av $p(z)$ strikt positiv utom i origo där $p(0) = 10$. Polynomet $p(z)$ saknar därför nollställen på γ om ρ är tillräckligt stort. Vidare är $p(i\rho) = -\rho^6 + 10 + 6i\rho$, där det för tillräckligt stora ρ gäller att

$$\frac{6\rho}{-\rho^6 + 10} < 0$$

och

$$\frac{6\rho}{-\rho^6 + 10} \approx 0.$$

Det följer att $\Delta_\gamma \arg p(z) \approx -\pi$ om ρ stort.

Argumentprincipen visar nu att $p(z)$ har $\frac{1}{2\pi}(3\pi - \pi) = 1$ stycken nollställen i första kvadranten$\leftarrow SVAR$

3. (2p) Beräkna integralen

$$\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 + z^2} dz$$

där C är den positivt orienterade rektangeln med hörnen $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$. Angiv endast svar.

Lösning: Integranden

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z^2}$$

är analytisk utanför punkterna $\pm i$ och 0. De två första punkterna ligger utanför C. Om $0 <\mid z \mid< 1$ gäller att

$$f(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$$... + z^{-1} \sum_{\substack{-k+2n=-1 \\ k\geq 0,\ n\geq 0}} \frac{1}{k!}(-1)^n + ...$$

$$= ... + z^{-1}(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - ...) + ...$$

Residusatsen visar nu att integralens värde är lika med $2\pi(\sin 1)i \leftarrow SVAR$

4. (2p) Antag $R > 0$ och låt C_R beteckna halvcirkeln $z = \mathrm{Re}^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Visa att

$$\mid \int_{C_R} e^{iz} dz \mid< \pi.$$

5. (3p) Visa satsen om potensserieutveckling av en funktion som är analytisk.