Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-01-16, f, M
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0740 459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

---

1. (4p) Låt C beteckna den positivt orienterade cirkeln $|z| = 10$. Beräkna integralen

$$\int_C \frac{e^z}{e^z - 1} dz.$$

2. (4p) Bestäm konvergensradien för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^{n^2}.$$

3. (4p) Betrakta polynomet $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, där $a_0, .., a_{n-1}$ är komplexa tal och låt C beteckna den positivt orienterade enhetscirkeln i komplexa talplanet. Beräkna integralen

$$\int_C \frac{z^{n-1}p(\bar{z})}{z - w} dz$$

då w är ett komplext tal som uppfyller $|w| > 1$.

4. (4p) Bestäm alla hela funktioner $f(z)$ sådana att $f(0) = 1$ och

$$f(2z) = 2f(z)f'(z)$$

för alla komplexa tal z.

5. (2p) Härled Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}.

6. (2p) Formulera och bevisa Liouvilles sats för hela funktioner.

7. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1, ..., s_n$ och

$$\lim_{s \to \infty} g(s) = 0.$$

Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(g(s)e^{st}; s_k)$$

har Laplacetransformen $g(s)$.

LÖSNINGAR: TMA251 och TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-01-16, f, M

1. (4p) Låt C beteckna den positivt orienterade cirkeln $|z| = 10$. Beräkna integralen
$$\int_C \frac{e^z}{e^z - 1} dz.$$
Lösning: Integranden har enkelpoler i punkterna $z_k = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Punkterna z_0 och $z_{\pm 1}$ ligger innanför C och de övriga punkterna utanför C. Vidare gäller att
$$\mathrm{Res}(\frac{e^z}{e^z - 1}; z_k) = (\frac{e^z}{\frac{d}{dz}(e^z - 1)})_{|z=z_k} = 1$$
för varje $k \in \mathbf{Z}$. Residusatsen ger nu att
$$\int_C \frac{e^z}{e^z - 1} dz = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Bestäm konvergensradien för potensserien
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^{n^2}.$$
Lösning: Om $r \in [0, 1[$ följer att
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} r^{n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}.$$
Konvergensradien är alltså större än eller lika med 1. Antag nu att $r > 1$ och skriv
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} r^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2 \ln r - n}.$$
Denna serie är divergent eftersom allmänna termen
$$e^{n^2 \ln r - n} = e^{n^2(\ln r - \frac{1}{n})} \to \infty$$
då $n \to \infty$ (för en konvergent serie konvergerar allmänna termen mot noll i oändligheten). Den givna serien har därför konvergensradien 1. $SVAR: 1$.

3. (4p) Betrakta polynomet $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, där $a_0, \ldots, a_{n-1}$ är komplexa tal och låt C beteckna den positivt orienterade enhetscirkeln i komplexa talplanet. Beräkna integralen

$$\int_C \frac{z^{n-1}p(\bar{z})}{z-w}dz$$

då w är ett komplext tal som uppfyller $| w |> 1$.

Lösning: Det gäller att

$$\int_C \frac{z^{n-1}p(\bar{z})}{z-w}dz = \int_C \frac{z^{n-1}p(\frac{1}{z})}{z-w}dz = \int_C \frac{1 + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n}{z(z-w)}dz$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}(\frac{1 + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n}{z(z-w)}; 0) = -\frac{2\pi i}{w} \leftarrow SVAR$$

4. (4p) Bestäm alla hela funktioner $f(z)$ sådana att $f(0) = 1$ och

$$f(2z) = 2f(z)f'(z)$$

för alla komplexa tal z.

Lösning: Derivering ger

$$2^n f^{(n)}(z) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) f^{(n+1-k)}(z).$$

Sätts $z = 0$ erhålls med beteckningen

$$x_n = f^{(n)}(0),\ n \in \mathbf{N}$$

att

$$2^{n-1}x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k x_{n+1-k},\ n \in \mathbf{N}.$$

Vi ser från denna ekvation att sekvensen $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ är unik ty $x_0 = 1$. Om vi sätter $n = 0$ och utnyttjar att $x_0 = 1$ blir $x_1 = \frac{1}{2}$. Sätts $n = 1$ erhålls på liknande sätt att $x_2 = \frac{1}{4}$. Vi gissar nu att $x_n = 2^{-n}$. Eftersom

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$