Matematik CTH: TMA251 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 01-01-11 f M
Telefonvakt: Petter Brändén, 0740 – 45 90 22.
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
OBS: Text på två sidor!

---

1. (3p) Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $2 = T(i)$ och $\infty = T(-1)$. Vilken kurva i z-planet avbildas på reella axeln i w-planet?

2. (3p) Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

i Laurentserie i området

a) $0 <\mid z \mid< 1$

b) $1 <\mid z \mid< 2$

c) $\mid z \mid> 2$.

3. (3p) Visa att

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2} \sin \omega x dx = e^{-\omega^2/2} \int_0^\omega e^{x^2/2} dx$$

för varje reellt tal ω. (Ledning: Antag först att $\omega, R > 0$ och beräkna kurvintegralen $\int_C e^{-z^2/2} dz$, där C är den positivt orienterade rektangeln med hörn i $0, R, R + i\omega$ och $i\omega$.)

4. (4p) Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $p(z) = z^4 + iz + i$ i området $\operatorname{Im} z > 0$? Visa också att varje sådant nollställe har multipliciteten ett.

5. (4p) Den reellvärda funktionen $u(x, y)$ är harmonisk och icke-negativ i en omgivning av enhetscirkelskivan $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$. Visa att

$$\frac{1-r}{1+r} u(0,0) \leq u(x,y) \leq \frac{1+r}{1-r} u(0,0) \text{ om } r < 1.$$

V.g. vänd!

6. (0.5p+0.5p) Antag

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

där $ad - bc \neq 0$. a) Beräkna $T'(z)$. b) Visa att funktionen $T(z)$ är omvändbart entydig.

7. (3p) Visa att ett polynom av graden n, där n är ett positivt heltal, har exakt n nollställen, räknade med multiplicitet.

8. (4p) Funktionerna $u(x,y)$ och $v(x,y)$ är reellvärda och u, v, $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$ och $\partial v/\partial y$ är kontinuerliga i en omgivning till punkten $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Vidare gäller att u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i punkten (x_0, y_0). Visa att funktionen

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \; z = x + iy$$

är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$.

/CB

LÖSNINGAR

TMA252 och TMA251 (gamla kursen) Komplex matematisk analys för F och Kf, 01-01-11

1. Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $2 = T(i)$ och $\infty = T(-1)$. Vilken kurva i z-planet avbildas på reella axeln i w-planet?

Lösning: Vi får att

$$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{2-\infty}{2-0} = \frac{z-1}{z+1}\frac{i+1}{i-1}$$

dvs

$$\frac{w}{2} = \frac{z-1}{z+1}\frac{i+1}{i-1}.$$

Efter förenkling erhålls

$$w = 2i\frac{1-z}{1+z}.$$

Punkterna $1, i$ och -1 på cirkeln $|z| = 1$ avbildas alla på reella axeln i w-planet. Alltså avbildas cirkeln $|z| = 1$ på reella axeln i w-planet.

SVAR: $w = 2i\frac{1-z}{1+z}$; cirkeln $|z| = 1$.

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

i Laurentserie i området

a) $0 < |z| < 1$

b) $1 < |z| < 2$

c) $|z| > 2$.

Lösning: Partialbråksuppdelning ger

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+2}.$$

a) Om $0 <| z |< 1$ så är

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

och

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1} z^n$$

varför

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{-n-2}-1)z^n \leftarrow SVAR$$

b) Om $1 <| z |< 2$ så är

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}$$

och

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1} z^n.$$

Alltså är

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{-n-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-2} z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{-n-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-2} z^n \leftarrow SVAR$$

c) Om $| z |> 2$ så är

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}$$

och

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n z^{-n-1}$$

varför

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{n-1}-1)z^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2^{n-1}-1)z^{-n-1} \leftarrow SVAR$$

3. Visa att

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2} \sin \omega x dx = e^{-\omega^2/2} \int_0^\omega e^{x^2/2} dx$$

för varje reellt tal ω. (Ledning: Antag först att $\omega, R > 0$ och beräkna kurvintegralen $\int_C e^{-z^2/2}dz$, där C är den positivt orienterade rektangeln med hörn i $0, R, R+i\omega$ och $i\omega$.)

Lösning: Antag först att $\omega, R > 0$. Vi har att

$$0 = \int_C e^{-z^2/2} dz$$

eftersom funktionen $e^{-z^2/2}$ är analytisk. Härav följer att

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^R e^{-x^2/2}dx + i\int_0^\omega e^{-(R+iy)^2/2}dy \\ &\quad - \int_0^R e^{-(x+i\omega)^2/2}dx - i\int_0^\omega e^{y^2/2}dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^R e^{-x^2/2}dx + i\int_0^\omega e^{-(R^2-y^2)/2}e^{-iRy}dy - \int_0^R e^{-(x^2-\omega^2)/2}e^{-i\omega x}dx - i\int_0^\omega e^{y^2/2}dy.$$

Här gäller att

$$\left| \int_0^\omega e^{-(R^2-y^2)/2}e^{-iRy}dy \right| \leq e^{-R^2/2}\int_0^\omega e^{y^2/2}dy \to 0$$

då $R \to \infty$ varför

$$0 = \int_0^\infty e^{-x^2/2}dx - \int_0^\infty e^{-(x^2-\omega^2)/2}e^{-i\omega x}dx - i\int_0^\omega e^{y^2/2}dy.$$

Imaginärdelen av högra ledet är därför lika med 0 dvs

$$0 = \int_0^\infty e^{-(x^2-\omega^2)/2} \sin \omega x dx - \int_0^\omega e^{y^2/2}dy$$

vilket är ekvivalent med påståendet för $\omega > 0$. Eftersom sinusfunktionen är udda följer nu för $\omega < 0$ att

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2} \sin \omega x dx = -\int_0^\infty e^{-x^2/2}\sin(-\omega x)dx = -e^{-(-\omega)^2/2}\int_0^{-\omega} e^{y^2/2}dy$$

$$= e^{-\omega^2/2} \int_{-\omega}^{0} e^{y^2/2} dy = e^{-\omega^2/2} \int_{0}^{\omega} e^{y^2/2} dy.$$

Fallet $\omega = 0$ är trivialt.

4. Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $p(z) = z^4 + iz + i$ i området $\operatorname{Im} z > 0$? Visa också att varje sådant nollställe har multipliciteten ett.

Lösning: Antag $\rho > 0$ och betrakta kurvan $\gamma_\rho = I_\rho + C_\rho$, där I_ρ är sträckan från $-\rho$ till ρ och C_ρ är halvcirkelbågen ρe^{it}, $-\pi \le t \le \pi$. Eftersom

$$p(z) = z^4(1 + \frac{i}{z^3} + \frac{i}{z^4})$$

följer att

$$\Delta_{C_\rho} \arg p(z) \approx 4\pi, \ \ \rho \text{ stort.}$$

Vidare gäller för varje $x \in I_\rho$ att

$$p(x) = u(x) + iv(x)$$

där $u(x) = x^4$ och $v(x) = x + 1$. Speciellt följer att

$$u(x) \ge 0 \text{ och } p(x) \ne 0$$

samt

$$\frac{v(x)}{u(x)} \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

Alltså är

$$\Delta_{I_\rho} \arg p(x) \approx 0 \text{ då } \rho \text{ stort.}$$

Eftersom

$$\Delta_{\gamma_\rho} \arg p(z) \approx 4\pi, \ \ \rho \text{ stort,}$$

så ger argumentprincipen att $p(z)$ har två nollställen, räknade med multiplicitet, i området $\operatorname{Im} z > 0$. Om dessa nollställen sammanfaller och vi får ett nollställe av multipliciteten två så följer att polynomet $p'(z) = 4z^3 + i$ har samma nollställe. Om $z^4 + iz + i = 0$ och $4z^3 + i = 0$ så är $z^4 + (-4z^3)z + i = 0$

dvs $z^4 = i/3$ och det följer att$|\, z \,| = 3^{-1/4}$. Men $4z^3 + i = 0$ ger att $|\, z \,| = 4^{-1/3}$ och vi har fått en motsägelse. Nollställena i $\operatorname{Im} w > 0$ är enkla.

5. Beräkna integralen
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{(3\cos t + 5)^2}\,dt.$$

Lösning: Vi har att
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{(3\cos t + 5)^2}\,dt = \operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{(3\cos t + 5)^2}\,dt\right)$$

Låt C vara enhetscirkeln $z = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Det följer att
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{(3\cos t + 5)^2}\,dt = \int_C \frac{z^2}{(3(z + 1/z)/2 + 5)^2}\frac{dz}{iz}$$
$$= \frac{4}{i}\int_C \frac{z^3\,dz}{(3z+1)^2(z+3)^2}.$$

Integranden
$$f(z) = \frac{z^3}{(3z+1)^2(z+3)^2}$$
har inga poler på C och endast en pol innanför C, nämligen i punkten $-1/3$. Sätt $w = z + 1/3$. Då är
$$f(z) = \frac{(w - 1/3)^3}{9w^2(w + 8/3)^2}$$
$$= \frac{(-1/3)^3(1 - 3w)^3(1 + (3/8)w)^{-2}}{9w^2(8/3)^2}$$
$$= \frac{-1}{27 \cdot 64 w^2}(1 - 9w + \ldots)(1 - \frac{3w}{4} + \ldots)$$
och därmed
$$\operatorname{Res}(f(z); -1/3) = \frac{-1}{27 \cdot 64}(-9 - \frac{3}{4}) = \frac{13}{36 \cdot 64}.$$

Alltså är

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{(3\cos t+5)^2}dt = 2\pi i \frac{4}{i}\frac{13}{36\cdot 64} = \frac{13}{288}\pi.$$

SVAR: $\frac{13}{288}\pi$

5. (gamla kursen) Den reellvärda funktionen $u(x,y)$ är harmonisk och icke-negativ i en omgivning av enhetscirkelskivan $r=\sqrt{x^2+y^2}\leq 1$. Visa att

$$\frac{1-r}{1+r}u(0,0)\leq u(x,y)\leq \frac{1+r}{1-r}u(0,0) \text{ om } r<1.$$

Lösning: Sätt $u(x,y)=u(re^{i\theta})$ om $x+iy=re^{i\theta}$. Poissons integralformel ger för $r<1$ att

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}u(e^{it})dt.$$

För $r=0$ får vi

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt.$$

Härav följer för $r<1$ att

$$u(x,y)\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r+r^2}u(e^{it})dt = \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt =$$
$$= \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt = \frac{1+r}{1-r}u(0,0)$$

och

$$u(x,y)\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+2r+r^2}u(e^{it})dt = \frac{1-r}{1+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt =$$
$$= \frac{1-r}{1+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt = \frac{1-r}{1+r}u(0,0)$$

vilket visar olikheterna i problemet.