Matematik CTH: TMA251 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 10 jan 00 f vv
Telefon: Henrik Olsson, 0740459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
OBS: Text på två sidor!

---

1. (7p) Laurentutveckla funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

   i området $1 <| z |< 3$.

2. (7p) Lös ekvationen

$$\begin{cases} f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 1 \\ f(0) = 0, \ f(1) = 1\,, \ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

3. (7p) Antag $x, y \in \mathbf{R}$ och $y \geq 0$. Visa att

$$| \cos(x + iy) | \leq e^y$$

   och

$$| \sin(x + iy) | \leq e^y.$$

4. (7p) Avgör hur många nollställen, räknade med multiplicitet, som polynomet $z^5 - 2z^2 + 2z - 6i$ har i området $1 <| z |< 2$.

5. (7p) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos x}{1 + x^4} dx.$$

6. (3p+4p) a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ som avbildar reella axeln på reella axeln och imaginära axeln på cirkeln $| w - \frac{1}{2} |= \frac{1}{2}$.

   b) Bestäm alla sådana avbildningar.

   (Reella axeln skall uppfattas som $\{x;\ x \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$ och imaginära axeln som $\{iy;\ y \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$.)

7. (5p+6p) a) Definiera $e^z$ då $z$ är ett komplext tal och bevisa att

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

b) Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

8. (7p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela $s$-planet utom i ändligt många singulära punkter $s_1, ..., s_n$ och $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$. Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[g(s)e^{st}, s_k\right]$$

har Laplacetransformen $g(s)$.

/CB

LÖSNINGAR
Matematik CTH: TMA251 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag: 10 jan 00 f vv

1. Laurentutveckla funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

i området $1 <\mid z \mid< 3$.

**Lösning:** Partialbråksuppdelning ger

$$f(z) = \frac{\frac{3}{2}}{z-3} - \frac{\frac{1}{2}}{z-1}$$

och vi får

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Här är

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} z^k \text{ om } \mid z \mid< 3$$

och

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \text{ om } \mid z \mid> 1.$$

Alltså gäller att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2}\frac{1}{3^k})z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})\frac{1}{z^{k+1}}$$

i området $1 <\mid z \mid< 3$. Alternativt kan vi skriva

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1}(-\frac{1}{2})z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{2}\frac{1}{3^k})z^k \text{ om } 1 <\mid z \mid< 3 \leftarrow SVAR$$

2. Lös ekvationen

$$\begin{cases} f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 1 \\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

**Lösning:** Låt $F(z)$ beteckna $z$-transformen av $f(nT)$ där $T = 1$. Vi får med hjälp av $z$-transformering att

$$z^2F(z) - z - 5zF(z) + 6F(z) = \frac{z}{z-1}$$

dvs

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Partialbråksuppdelning ger nu att

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{2}{z-2} + \frac{\frac{3}{2}}{z-3}.$$

Alltså är

$$F(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-2} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-3}$$

och tabellen för $z$-transformen visar att

$$f(n) = \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2}, \; n \in \mathbf{N} \leftarrow SVAR$$

3. Antag $x, y \in \mathbf{R}$ och $y \geq 0$. Visa att

$$\mid \cos(x+iy) \mid \leq e^y$$

och

$$\mid \sin(x+iy) \mid \leq e^y.$$

**Lösning:** Vi har att

$$\cos(x+iy) = \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) =$$

$$\frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y})$$

och triangelolikheten ger

$$\mid \cos(x+iy) \mid \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) \leq e^y$$

eftersom $y \geq 0$. Detta visar den första olikheten i uppgiften. För att visa den andra olikheten utnyttjas att

$$\sin(x+iy) = \cos(\frac{\pi}{2} - x - iy)$$

och den olikhet vi redan visat ger att

$$| \sin(x+iy) | \leq | \cos(\frac{\pi}{2} - x - iy) | =$$

$$| \cos(-\frac{\pi}{2} + x + iy) | \leq e^y.$$

4. Avgör hur många nollställen, räknade med multiplicitet, som polynomet $z^5 - 2z^2 + 2z - 6i$ har i området $1 <| z |< 2$.

**Lösning:** Sätt $g(z) = z^5 - 2z^2 + 2z - 6i$. På cirkeln $| z |= 1$ gäller att $| 6i + g(z) | \leq | z |^5 + 2 | z |^2 + 2 | z |= 5 < 6$. Polynomet $g(z)$ saknar därför nollställen på cirkeln $| z |= 1$. Om $f(z) = 6i$ så gäller också enligt Rouchés sats att $g(z)$ och $f(z)$ har samma antal nollställen innanför cirkeln $| z |= 1$. Polynomet $g(z)$ saknar således nollställen i området $| z |\leq 1$. På cirkeln $| z |= 2$ gäller att $| -z^5 + g(z) | \leq 2 | z |^2 + 2 | z | + 6 = 18 < 2^5$. Om $f(z) = -z^5$ så följer beroende på Rouchés sats att $g(z)$ och $f(z)$ har samma antal nollställen innanför cirkeln $| z |= 2$ dvs 5 stycken.

SVAR: 5 stycken.

5. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx.$$

**Lösning:** Sätt

$$f(z) = \frac{z^2 e^{iz}}{1+z^4}.$$

Funktionen $f(z)$ har enkelpoler i punkterna

$$z = z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4})}, \; k = 0, 1, 2, 4.$$

Av dessa ligger

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ och } z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

i övre halvplanet.

Antag $r > 1$ och låt $C_r$ vara den orienterade halvcirkeln

$$z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

och låt $J_r$ vara sträckan från $-r$ till $r$. Residusatsen medför att

$$\int_{C_r \cup J_r} f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}\,[f(z), z_0] + \text{Res}\,[f(z), z_1]) =$$

$$2\pi i(\frac{z^2 e^{iz}}{4z^3} \mid_{z=z_0} + \frac{z^2 e^{iz}}{4z^3} \mid_{z=z_1}) = \frac{\pi i}{2}(\frac{e^{iz_0}}{z_0} + \frac{e^{iz_1}}{z_1}) =$$

$$\frac{\pi i}{2}(\bar{z}_0 e^{iz_0} + \bar{z}_1 e^{iz_1}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Vidare är

$$\mid \int_{C_r} f(z)dz \mid \leq \frac{r^2}{r^4 - 1}\pi r \to 0 \text{ då } r \to \infty.$$

Härav följer att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{1}{\sqrt{2}})$$

och vi drar slutsatsen att

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{1}{\sqrt{2}}) \leftarrow \text{SVAR}$$

6. a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ som avbildar reella axeln på reella axeln och imaginära axeln på cirkeln $\mid w - \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}$. b) Bestäm alla sådana avbildningar. (Reella axeln skall uppfattas som $\{x;\ x \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$ och imaginära axeln som $\{iy;\ y \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$.)

**Lösning:** a) Antag $T(0) = 0$ och $T(\infty) = 1$. Välj $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0, 1$, och bestäm Möbiusavbildningen $T$ så att $T(1) = r$. Detta medför att reella axeln avbildas på reella axeln ty en Möbiusavbildning avbildar en linje på en linje eller en cirkel. Den imaginära axeln avbildas på en linje eller cirkel som går genom origo och punkten ett och som dessutom skär reella axeln ortogonalt i origo eftersom en Möbiusavbildning är konform. Detta medför att $T$ avbildar imaginära axeln på cirkeln $\mid w - \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}$. Vi får nu

$$\frac{w - 0}{w - 1}\frac{r - 1}{r - 0} = \frac{z - 0}{z - \infty}\frac{1 - \infty}{1 - 0}$$

dvs

$$\frac{w-0}{w-1}\frac{r-1}{r-0}=\frac{z-0}{1}\frac{1}{1-0}.$$

Efter förenkling erhålls

$$w=\frac{rz}{rz-r+1}.$$

Om vi t ex sätter $r=2$ erhålls

$$w=T(z)=\frac{2z}{2z-1}.$$

b) Antingen gäller att $T(0)=0$ eller $T(0)=1$ ty punkten $T(0)$ ligger både på reella axeln och på cirkeln $\mid w-\frac{1}{2}\mid=\frac{1}{2}$. Antag först $T(0)=0$. Punkten $T(\infty)$ ligger både på cirkeln $\mid w-\frac{1}{2}\mid=\frac{1}{2}$ och på reella axeln. Alltså är $T(\infty)=1$. Enligt del a) har Möbiusavbildningen formen

$$w=T(z)=\frac{rz}{rz-r+1}$$

för ett lämpligt $r\in\mathbf{R}$, $r\neq 0,1$.

Antag nu $T(0)=1$. Som ovan följer att $T(\infty)=0$. Välj nu $r\in\mathbf{R}$, $r\neq 0,1$, och bestäm Möbiusavbildningen $T$ så att $T(1)=r$. Vi får

$$\frac{w-1}{w-0}\frac{r-0}{r-1}=\frac{z-0}{z-\infty}\frac{1-\infty}{1-0}$$

dvs

$$\frac{w-1}{w-0}\frac{r-0}{r-1}=\frac{z-0}{1}\frac{1}{1-0}.$$

Efter någon förenkling fås

$$w=T(z)=\frac{r}{(1-r)z+r}.$$

SVAR:

$$w=T(z)=\frac{rz}{rz-r+1}$$

eller

$$w=T(z)=\frac{r}{(1-r)z+r}.$$

där $r\in\mathbf{R}$, $r\neq 0,1$.