Komplex Matematisk Analys F2

MVE025 (TMA252)

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2000-01-10	x	x	
2001-01-11	x	x	
2001-10-24	x	x	
2002-01-16	x	x	
2002-08-21	x	x	
2003-08-20	x	x	
2003-10-22	x	x	
2004-01-14	x	x	
2004-08-18	x	x	
2004-10-20	x	x	
2005-01-12	x	x	
2005-08-17	x	x	
2005-10-19	x	x	
2006-01-10	x	x	
2006-08-23	x	x	

28 oktober 2006

MVE025 / TMA253 (samt “gamla kursen” TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2006-08-23, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: , tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Använd z-transform för att lösa differensekvationen

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1. \qquad \text{(6p)}$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4}, \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (6p)

(b) Beräkna $\hat{f}(0)$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{(2p)}$$

3. Givet är funktionen

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - 1}.$$

Finn f:s singulariteter och avgör deras karaktär. (3p) Bestäm de tre första (icke-noll) termerna i f:s Laurentutveckling i området $|z| > 1$. (5p)

4. Se nästa sida.

5. Se nästa sida.

6. Låt funktionen f vara analytisk i området D och antag att f har n olika nollställen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ i D med respektive multiplicitet $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Visa att det finns en funktion g som är analytisk i D och sådan att

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_n)^{m_n} g(z), \qquad \forall z \in D.$$

Vad ska man lägga till i förutsättningarna för att kunna påstå att även $\frac{1}{g}$ är analytisk i D? (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (= potensserieutveckling) kring en godtycklig punkt z_0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

MVE025 (F, “nya” kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området mellan cirklarna $\{|z| = 2\}$ och $\{|z-1| = 1\}$. (6p)

TMA253 (Kf, “nya” kursen) 4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området mellan cirklarna $\{|z| = 2\}$ och $\{|z-1| = 1\}$. (6p)

TMA252 (F & Kf, “gamla” kursen) 4. Finn en funktion $f = f(z)$ som är analytisk i det övre halvplanet och vars realdel är $u(x, y) = \ln((x+1)^2 + y^2)$. (6p)

MVE025 (F, “nya” kursen) 5. Funktionen f är analytisk i $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, kontinuerlig i $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, och $f(0) = 0$. Visa att serien

$$f(z) + f(z^2) + \ldots + f(z^n) + \ldots$$

är konvergent. (7p)

TMA253 (Kf, “nya” kursen) 5. Ange en funktion $f = f(z)$ sådan att f är analytisk i $\mathbb{C} \setminus (\{z : \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{-1\} \cup \{i\})$, har dubbelpol i i och väsentlig singularitet i -1. Ange i vilka områden man kan Laurentutveckla f. (7p)

TMA252 (F & Kf, “gamla” kursen) 5. Ange en funktion $f = f(z)$ sådan att f är analytisk i $\mathbb{C} \setminus (\{z : \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{-1\} \cup \{i\})$, har dubbelpol i i och väsentlig singularitet i -1. Ange i vilka områden man kan Laurentutveckla f. (7p)

/JM

MVF 025 / TMA 253 / TMA 252

Komplex matematisk analys F/Kf

23/8 - 06 - Lösningar

1. $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$a_0 = 1, \quad a_1 = -1$

$\overset{z\text{-tr.}}{\Rightarrow} \quad z^2 A(z) - z^2 \cdot 1 - z \cdot (-1) -$

$- 3(zA(z) - z \cdot 1) + 2A(z) = 0$

$$A(z) = \frac{z^2 - 4z}{z^2 - 3z + 2} = z \frac{z-4}{(z-1)(z-2)} =$$

$$= z\left(\frac{3}{z-1} + \frac{-2}{z-2}\right) =$$

$$= 3\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - 2\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = 3\sum_0^\infty z^{-n} - 2\sum_0^\infty 2^n z^{-n} =$$

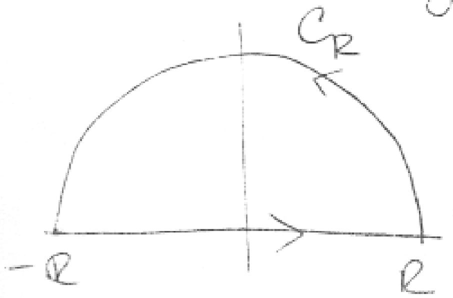
$$= \sum_0^\infty (3 - 2^{n+1}) z^{-n}$$

$\Rightarrow a_n = 3 - 2^{n+1}, \quad n \geq 0.$

---

2. (a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

(jämn integrand)



Låt $R > a$; $f(z) = \frac{1}{z^4 + a^4}$.

(man kan välja kontur i ö.h.p. eller i n.h.p.)

$$C_R = \{z \mid |z| = R,\ \theta \in [0, \pi]\}$$

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + a^4} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4 + a^4} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + a^4}$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + a^4} \right| \underset{(z = Re^{i\theta})}{=} \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{R^4 e^{4i\theta} + a^4} \right| \leq$$

$$\leq \pi R \cdot \frac{1}{R^4 - a^4} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 \Rightarrow \int_{C_R} f(z)\, dz \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4 + a^4} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4 + a^4} = 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \operatorname{Res} f$$

$$z^4 + a^4 = 0, \quad z^4 = a^4 e^{i\pi}$$

$$z_k = a e^{i(\pi + 2k\pi)/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= a e^{i\pi/4} = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ z_1 &= a e^{i3\pi/4} = a\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}\right\} \in \text{öhp}$$

$$z_2, z_3 \in \text{uhp}$$

z_0, z_1 enkelpoler till f

$$\operatorname*{Res}_{z_{0,1}} f = \frac{1}{4 z_{0,1}^3} = -\frac{z_{0,1}}{4a^4}$$

$$\Rightarrow 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \operatorname{Res} f = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4a^3}\right)\left(\frac{\cancel{\varrho'}}{\sqrt{2}} + i\frac{\varrho'}{\sqrt{2}} - \cancel{\frac{\varrho'}{\sqrt{2}}} + i\frac{\varrho'}{\sqrt{2}}\right) =$$ (3)

$$= \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{4}_2 a^3 \cancel{\sqrt{2}}} \cdot \cancel{2}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2a^3}$$

Låt $R \to \infty$: $\displaystyle \frac{\pi\sqrt{2}}{2a^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4} + 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4a^3}$$

(b) $\displaystyle \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-ix\cdot 0}}_{=1} \frac{1}{x^4+a^4}\,dx =$ $(a=\sqrt{2})$

$$= [\text{enligt (a)}] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\cdot(\sqrt{2})^3} = \frac{\pi}{4}$$

(3.) $e^{\frac{1}{z}}$: $z=0$ väsentlig singularitet

$\displaystyle \frac{\cdots}{\underbrace{z^2-1}_{=(z-1)(z+1)}}$: $z=\pm 1$ enkelpoler

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots\right)$$

för $|z|^{-1} < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

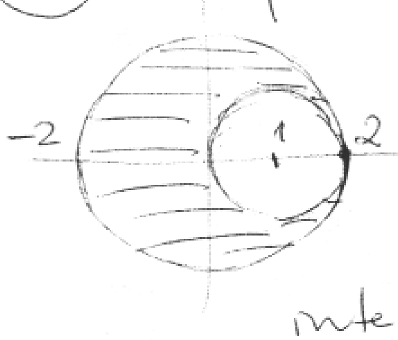
$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right)\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^4} + \left(\frac{1}{6}+1\right)\frac{1}{z^5} + \dots$$

$|z| > 1$ $\cancel{z \neq 0}$

4. ("nya" kursen)

(z)



Möbiusavbildning s.a.

$2 \to \infty$

$\Rightarrow$ båda cirklarna avbildas på räta linjer som inte har ngn annan pkt än ∞ gemensam, d.v.s., som är parallella

$$z_1 = \frac{1}{2-z}$$

$2 \to \infty$

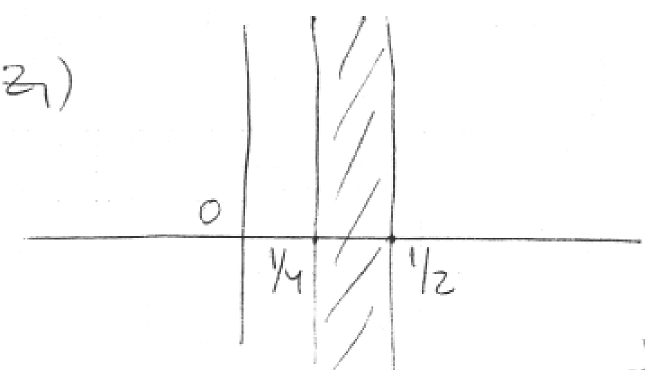
$0 \to \frac{1}{2}$

$-2 \to \frac{1}{4}$; $-1 \to \frac{1}{3}$

$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$

cirklarna $\perp$ realaxeln $\Rightarrow$ de parallella linjerna i z_1-planet $\perp$ Re-axeln

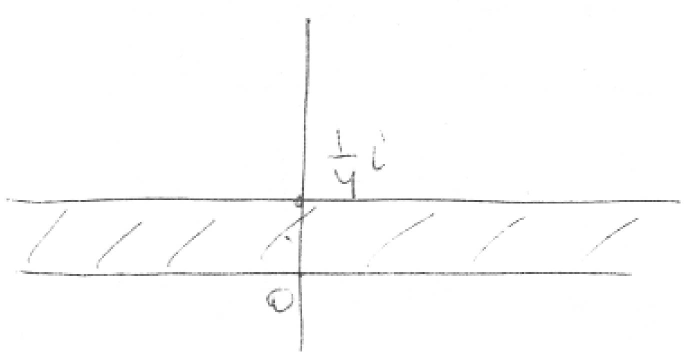
(z_1)



rotation $+\frac{\pi}{2}$

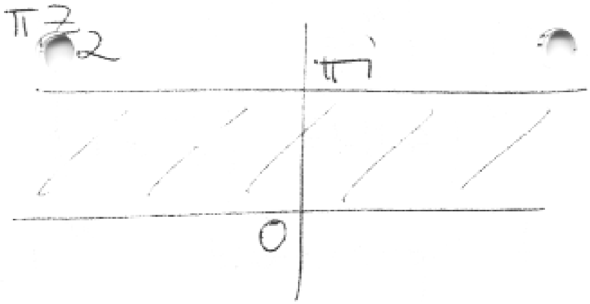
$$z_2 = \left(z_1 - \frac{1}{4}\right) e^{i\frac{\pi}{2}} = i\left(z_1 - \frac{1}{4}\right)$$

(z_2)



$z_3 = 4\pi z_2$

(z_3)

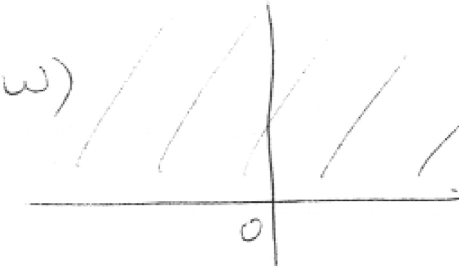


$w = e^{z_3} =$

$= e^{\operatorname{Re} z_3} \, e^{i \operatorname{Im} z_3}$

$0 < \operatorname{Im} z_3 < \pi$

(w)



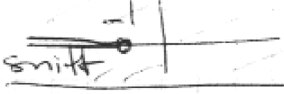
---

4. ("gamla" kursen)

$u(x,y) = 2 \ln |z+1| = 2 \operatorname{Re}(\operatorname{Log}(z+1))$

$\Rightarrow f(z) = 2 \operatorname{Log}(z+1) \; (+ Ci)$

analytisk i öhp $\qquad C \in \mathbb{R}$



---

5. (F, "nya")

f kontinuerlig i $\underbrace{\{|z| \leq 1\}}_{\text{kompakt}}$

$\Rightarrow |f| \leq M$ i $\{|z| \leq 1\}$

Betrakta $\tilde{f}(z) = \frac{1}{M} f(z)$

$\tilde{f}$ uppfyller förutsättningarna i Schwarz lemma

$\Rightarrow |\tilde{f}(z)| \leq |z| \quad \forall z : |z| < 1$

$\Rightarrow |f(z)| \leq M|z| \quad \forall z : |z| < 1$

$$|z| < 1 \iff |z^n| = |z|^n < 1$$

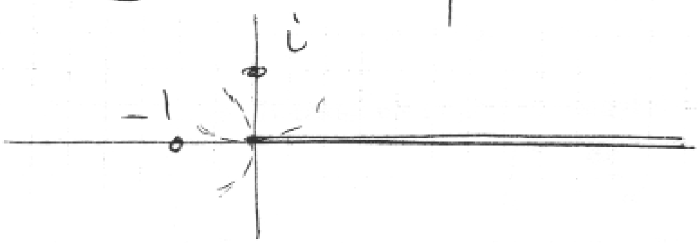
$$\Rightarrow \quad |f(z^n)| \leq M|z|^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \quad \text{konvergent för } |z|<1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n) \quad \text{konvergent för } |z|<1$$

---

5. (F "gamla", Kf)



Tag $f(z) = \log_{*} z + \dfrac{1}{(z-i)^2} + e^{\frac{1}{z+1}}$,

där $\log_{*}$ är en analytisk gren av log med snittet längs positiva Re-axeln

Laurentutvecklingar: kring i och -1 i områdena

$$0 < |z-i| < 1$$

$$0 < |z+1| < 1$$

---

6. induktivt resonemang (ändligt)

$$f(z) = \underbrace{(z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_k)^{m_k}}_{\neq 0 \text{ i } z_{k+1}} g_k(z) \quad \Rightarrow g_k(z_{k+1}) = 0 \quad \ldots$$

MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2006-01-10, kl. 14.00 - 18.00.

Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvak terna.

Telefonvakt: Johan Jansson / Peter Lindroth, tel. 0762-721 860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.

OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Finn en funktion $f = f(z)$ som är analytisk i det övre halvplanet och vars imaginärdel är $v(x, y) = \ln((x-1)^2 + y^2)$. (6p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna Fouriertransformen $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ av funktionen

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2\text{p})$$

3. Ange två Laurentutvecklingar kring $z_0 = -2i$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{z^2+4}.$$

Redogör noga för var de gäller. (7p)

4. Se nästa sida.

5. Betrakta funktionen

$$f_\alpha(z) = \alpha \begin{vmatrix} e^{\alpha\overline{\alpha}} & e^{\alpha\overline{z}} \\ e^{\overline{\alpha}z} & e^{z\overline{z}} \end{vmatrix}.$$

Avgör för vilka $\alpha \in \mathbb{C}$ funktionen f_α är analytisk i $\mathbb{C}$. Motivera! (6p)

6. Härled formler 14 och 15 i Laplacetransformtabellen (Lapla cetransformen av sin och cos). Du får inte använda formler i tabellen vid härle dningen, utan måste använda definitionen. (5p)

7. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på enhetsskivan området i övre halvplanet mellan realaxeln och den cirkel som går genom punkterna -2 och 2, har sin medelpunkt i det nedre halvplanet och bildar vinkel $\frac{\pi}{6}$ med realaxeln. (6p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på enhetsskivan området i övre halvplanet mellan realaxeln och den cirkel som går genom punkterna -2 och 2, har sin medelpunkt i det nedre halvplanet och bildar vinkel $\frac{\pi}{6}$ med realaxeln. (6p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 4. Beräkna integralen

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^5 + 3z + 5}\,, \qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

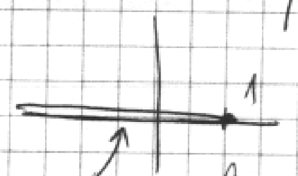
(Kurvan γ genomlöps ett varv moturs.). (6p)

/JM

Komplex matematisk analys F/Kf
(MVE025, TMA253, TMA252)
Lösningar 10/1 -06

1.
$$\ln\left((x-1)^2+y^2\right) = \ln|z-1|^2 = $$
$$= 2\ln|z-1|$$

$$\text{Log}\,(z-1) = \ln|z-1| + i\,\text{Arg}\,(z-1)$$
$$2i\,\text{Log}(z-1) = -2\text{Arg}\,(z-1) + 2i\ln|z-1|$$



snitt för Log(z−1)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Log}\,(z-1) \text{ analytisk i öhp} \\ \text{Im Log}\,(z-1) = v(x,y) = \\ = \ln\left((x-1)^2+y^2\right)\end{array}}$$

m.h.a. (CR):
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \int \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\,dx + \varphi(y) =$$

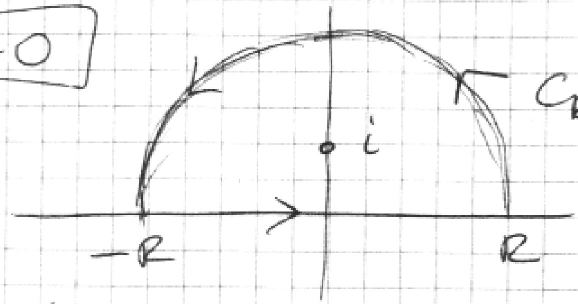
$$= \frac{2}{y}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{y}\right)^2+1} + \varphi(y) = \underbrace{-2\,\text{arccot}\,\frac{x-1}{y}}_{= -2\text{Arg}\,(z-1)} + \varphi(y)$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$ (φ bestäms)

OBS! arccot, ty <u>öhp</u>

2\. (a) Betrakta $f(z) = \dfrac{z e^{iaz}}{(z^2+1)^2}$

$\boxed{a \geq 0}$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$R > 1$

$C_R: z = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

dubbelpol i i; inga andra singulariteter

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f =$$

$$= 2\pi i \left(\cancel{(z-i)^2} \frac{z e^{iaz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \, \frac{(e^{iaz} + z i a e^{iaz})(z+i)^2 - 2(z+i) z e^{iaz}}{(z+i)^4} \Bigg|_{z=i} =$$

$$= \cancel{2}\pi i \, \frac{(\cancel{e^{-a}} - a e^{-a})(-4) + \cancel{4e^{-a}}}{\cancel{16}\; 2} = \frac{\pi a e^{-a}}{2} i$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = i \int_{-R}^{R} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left(\text{ty } \int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{x \cos ax}{(x^2+1)^2}}_{\text{udda}}\,dx = 0 \right)$$

≤ 1 ty $a \geq 0$, $R > 0$, $\sin\theta \geq 0$ i $[0, \pi]$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta} e^{iaR\cos\theta} e^{-aR\sin\theta}}{(R^2 e^{2i\theta}+1)^2} Rie^{i\theta}\,d\theta \right|$$

$$\leq \frac{R}{(R^2-1)^2} \cdot R \cdot \pi \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi a e^{-a}}{2} \quad \text{för } a \geq 0$$

$\boxed{a \le 0}$ antingen motsvarande kalkyl i nhp, eller 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(-a)x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin|a|x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{\pi |a| e^{-|a|}}{2}$$

$-|a| = a$ för $a \le 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi a e^{-|a|}}{2} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

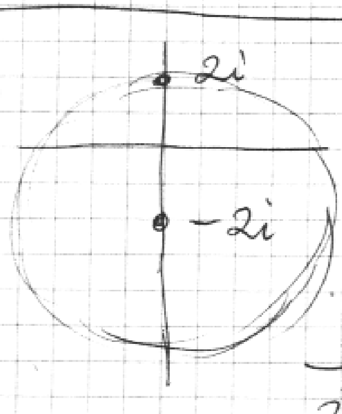
(b) $$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} e^{-ix\xi}\,dx = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(-\xi)x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

= integralen från (a) med $a = -\xi$ och faktor $\underline{\underline{i}}$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = -\frac{\pi i \xi e^{-|\xi|}}{2}$$

$\underline{3.}$



en Laurentutveckling i $0 < |z+2i| < 4$ och en i $|z+2i| > 4$

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{A}{z-2i} + \frac{B}{z+2i}$$

4

$$z = A(z+2i) + B(z-2i)$$

$z = 2i$: $\quad 2i = A \cdot 4i \quad A = \frac{1}{2}$

$z = -2i$: $\quad -2i = B \cdot (-4i) \quad B = \frac{1}{2}$

$0 < |z+2i| < 4$ (i potenser av $z+2i$)

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-2i} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} =$$

klart

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z+2i)-4i} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{4i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2i}{4i}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} + \frac{i}{8}\left(1 + \frac{1}{4i}(z+2i) - \frac{1}{16}(z+2i)^2 + \right.$$

$$\left. + \dots\right) \quad ; \quad \text{konvergens} : \left|\frac{z+2i}{4i}\right| < 1$$

ok

$|z+2i| > 4$

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z+2i)-4i} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2(z+2i)}\cdot\frac{1}{1-\frac{4i}{z+2i}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i}\left(1 + \frac{4i}{z+2i} - \frac{16}{(z+2i)^2} + \dots\right)$$

konvergens: $\left|\frac{4i}{z+2i}\right| < 1$ ok

5. $f_0(z) \equiv 0$ uppenbarligen analytisk $\forall z \in \mathbb{C}$

$\alpha \neq 0$: f_α analytisk $\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} f_\alpha$ analytisk

$$\frac{1}{\alpha} f_\alpha(z) = \begin{vmatrix} e^{\alpha\bar{\alpha}} & e^{\alpha\bar{z}} \\ e^{\bar{\alpha}z} & e^{z\bar{z}} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{|\alpha|^2} \cdot e^{|z|^2} - e^{\alpha\bar{z}} \cdot e^{\bar{\alpha}z} = e^{|\alpha|^2+|z|^2} - e^{\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z} = e^{|\alpha|^2+|z|^2} - e^{2\mathrm{Re}(\alpha\bar{z})} \in \mathbb{R}$$

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} f_\alpha$ analytisk omm konstant

Men: $\frac{1}{\alpha} f_\alpha(\alpha) = e^{2|\alpha|^2} - e^{2\mathrm{Re}\,|\alpha|^2} = 0$

$\frac{1}{\alpha} f_\alpha(0) = e^{|\alpha|^2} - 1 \neq 0$ ty $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} f_\alpha$ ej konstant

$\Rightarrow$ f_α analytisk (i $\mathbb{C}$) endast för $\alpha = 0$

$\boxed{4 \text{ ("gammal")}}$ Betrakta $z^5 + 3z + 5 = 0$

Sätt $f(z) = 5$; $g(z) = z^5 + 3z$

På $|z| = 1$:

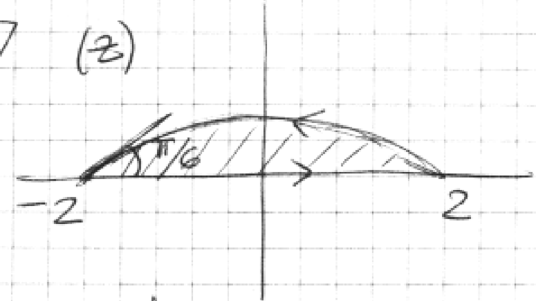
$|f(z)| = 5$; $|g(z)| \leq |z^5| + 3|z| = 4 < 5$

$\Rightarrow$ f och $f+g$ har (enligt Rouchés sats) lika många nollställen innanför $|z| = 1$, d.v.s. 0 st.; inga på $|z| = 1$

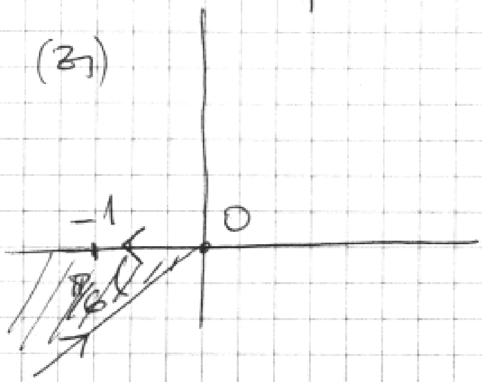
$\Rightarrow$ $\frac{1}{z^5+3z+5}$ analytisk på och innanför γ

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z^5+3z+5} = 0$ enligt Cauchys sats.

$\boxed{4. \text{"ny".}}$



$$z_1 = \frac{z+2}{z-2}$$



$-2 \to 0$

$2 \to \infty$

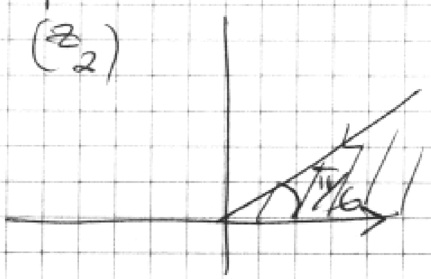
$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$

$0 \to -1$

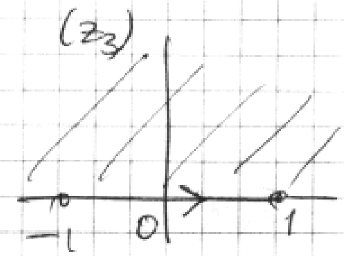
- $\{-2, 0, 2\} \to \{0, -1, \infty\}$.

"vänsterregeln" & konformitet ger vinkeln

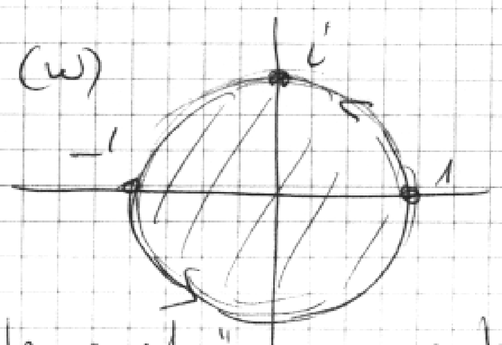
$$z_2 = -z_1$$



$$z_3 = z_2^6$$



- $w = \dfrac{az_3+b}{cz_3+d}$, där



$-1 \to 1$

$0 \to i$

$1 \to -1$

"vänsterregeln" ger enhetsskivan

$-a+b = -c+d$

$b = id$

$a+b = -c-d$

välj $c = 1 \Rightarrow b = -1,\ d = i,$

$a = -i$

$$w = \frac{-iz_3 - 1}{z_3 + i}$$

MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2005-10-19, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Elin Götmark, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet

$$u'' + 2u' + 2u = e^{-t} \qquad \text{för} \quad t > 0 \qquad (u = u(t)),$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \qquad (6p)$$

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna Fouriertransformen $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Bestäm antalet nollställen till polynomet $P(z) = z^5 + 3z + 1$ i cirkelringen $\{1 < |z| < 2\}$. (3p) Gör så mycket du kan för att ytterligare lokalisera rötterna (d.v.s. tala om vilka kvadranter, intervall etc de ligger i; du får använda både reell och komplex analys). (max 4p)

4. Se nästa sida.

5. Låt $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ldots, n-1$. Visa att $\max_{|z|=1} |P(z)| \geq 1$. (6p)

6. Funktionen $f = f(z)$, $f \not\equiv 0$, är analytisk i $\{0 < |z| < 2\}$ och uppfyller

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vad är det för typ av singularitet f har i 0? (5p)

7. Se nästa sida.

8. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (= potensserieutveckling) kring 0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

MVE025 (F, “nya” kursen) 4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : \; |z| < 2\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Im} z = 0, \; 1 \le \operatorname{Re} z < 2\}. \qquad (7p)$$

MVE025 (F, “nya” kursen) 7. Formulera och bevisa Schwarz lemma. (5p)

TMA253 (Kf, “nya” kursen) 4. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z \in \mathbb{C} : \; |z| < 2\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Im} z = 0, \; 1 \le \operatorname{Re} z < 2\}. \qquad (7p)$$

TMA253 (Kf, “nya” kursen) 7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

TMA252 (F & Kf, “gamla” kursen) 4. Ange två Laurentutvecklingar kring $z_0 = i$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Redogör noga för var de gäller. (7p)

TMA252 (F & Kf, “gamla” kursen) 7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

/JM

Complex matematisk analys F2/Kf2

(MVE 025, TMA 253, TMA 252)

19/10 - 05

Lösningar

(1.) $u'' + 2u' + 2u = e^{-t}, \quad t > 0$

$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$

$\supset \quad s^2 U(s) - s + 2sU(s) - 2 + 2U(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$$U(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} + \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

$$1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s+1)$$

$s = -1 \qquad A = 1$

$s^2: \qquad 0 = A + B \qquad B = -1$

$s^0: \qquad 1 = 2A + C \qquad C = -1$

$$U(s) = \frac{\cancel{s+1}}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{\cancel{s+1}}{(s+1)^2+1}$$

$\subset \quad e^{-t}\sin t + e^{-t}$

(2.) $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx =$

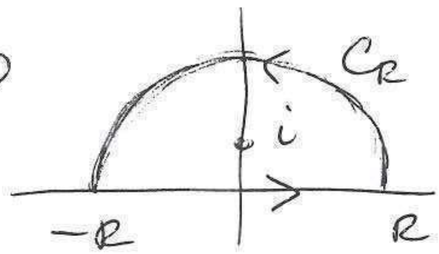
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \xi x}{(x^2+1)^2}\,dx + \underbrace{i\int_{-\infty}^{\infty} \overset{\text{udda}}{\frac{\sin(-\xi x)}{(x^2+1)^2}}\,dx}_{=0}$$

$\Rightarrow$ samma integral ska beräknas i (a) och (b), med $\xi = a$

cos $\circ$ jämn $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos|a|x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$\Rightarrow$ räcker att beräkna integralen för $|a|$ istället för $\underline{a}$

$|a| \geq 0$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$R > 1$

$C_R:\ z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz$$

$$\underbrace{\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz} = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R}$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}$$ (nämnaren $= 0$ för $\pm i$)

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{i|a|R\cos\theta} \cdot e^{\overbrace{-|a|R\sin\theta}^{\leq 0}}}{(R^2-1)^2} Rie^{i\theta}\,d\theta \right|$$

$$\leq \pi \frac{1 \cdot 1 \cdot R \cdot 1}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+i|a|x}}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2}$$

$\underline{i}$ är en dubbelpol $\quad (z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$

$$\operatorname*{Res}_{i} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2} = \left((z-i)^2 \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} =$$

$$= \left(\frac{e^{i|a|z}}{(z+i)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} = \frac{e^{i|a|z} \cdot i|a|(z+i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+i)}\, e^{i|a|z}}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}} \Bigg|_{z=i}$$

$$= \frac{e^{-|a|}\, i|a| \cdot 2i - 2e^{-|a|}}{(2i)^3} =$$

$$= \frac{+\cancel{2}^{1}}{+\cancel{8}_{4}\, i}\, e^{-|a|} \left(|a| + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|a|x}}{(x^2+1)^2}\, dx = \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{2}\cancel{i}}\, e^{-|a|} \left(|a| + 1 \right) \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos |a| x}{(x^2+1)^2}\, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|a|x}}{(x^2+1)^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \left(|a| + 1 \right), \qquad a \in \mathbb{R}$$

---

3. På $|z| = 2$: (Rouché's sats)

$|z^5| = 2^5 = 32$

$|3z+1| \leq 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$\Rightarrow$ $z^5 + 3z + 1$ och z^5 har lika många nollställen innanför $\{|z| = 2\}$, d.v.s. 5 st.

På $|z| = 1$: $|3z| = 3$, $|z^5 + 1| \leq 2$

$\Rightarrow$ $z^5 + 3z + 1$ och $3z$ har lika många nollställen innanför $\{|z| = 1\}$, d.v.s. 1 st.

Inga på $\{|z| = 1\}$ $\Rightarrow$ $P(z)$ har 4 nollställen i $\{1 < |z| < 2\}$

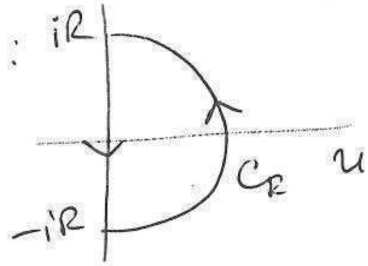
För övrigt: minst ett reellt nollställe (4)
(ty deg P udda) ; kan inte finnas positivt

$P(-1) = -3$, $P(0) = 1$

$\Rightarrow \exists$ nollställe $\in (-1, 0)$

$P'(x) = 5x^4 + 3 > 0 \Rightarrow$ endast ett reellt nollställe

hhp:



$P(iR) = iR^5 + 3iR + 1$

$u = \text{Re}\, P(iR) \equiv 1$

$\Rightarrow$ inga varv runt 0

y	$-\infty$ $-R$	0	R ∞
u	1	1	1
v	$\sim -\hat{R}^5$	0	$\sim \hat{R}^5$
	IV kv.		I kv.

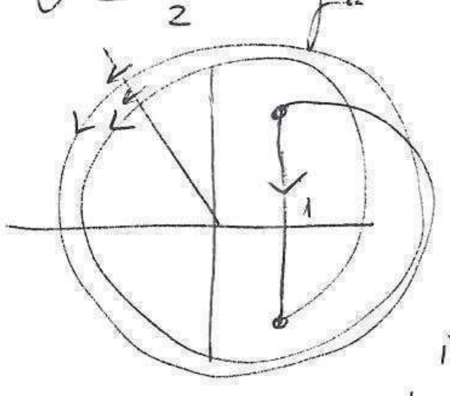
nära v-axeln

C_R : $P(z) = z^5\left(1 + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^5}\right)$

$\arg P = \underbrace{\arg z^5}_{\text{femdubblar vinklar}} + \underbrace{\arg(1 + \text{|litet|})}_{0}$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ på $C_R \Rightarrow z^5$ ger $2\frac{1}{2}$ varv

$\Rightarrow P$ ger $\approx 2\frac{1}{2}$ varv



två varv runt 0

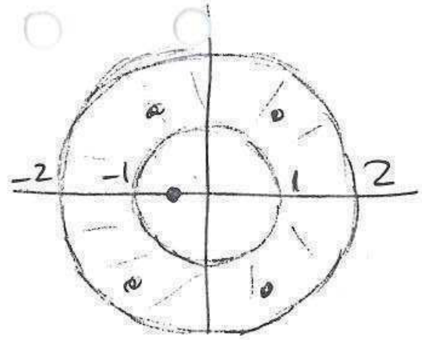
$\Rightarrow$ två nollställen i hhp

inga på Im-axeln

$\Rightarrow$ två i vhp

reella koefficienter $\Rightarrow$ nollställena ligger symmetriskt m.a.p. Re-axeln

$\Rightarrow$ ett nollställe i varje kvadrant



(5.) P är sin egen Taylorutveckling kring 0

$$\Rightarrow 1 = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P(z)}{z^{n+1}}\,dz\ ,\quad \gamma = \{|z|=1\}$$

Antag att: $\max_\gamma |P| < 1$

$$\Rightarrow 1 = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| < \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{1}{1}\cdot\cancel{2\pi} = 1$$

Motsägelse!

$$\Rightarrow \max_\gamma |P| \geq 1$$

(6.) Antag att 0 hävbar singularitet

$$\Rightarrow \exists \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ f analytisk i 0. 0 icke-isolerat nollställe till f; $f \not\equiv 0$ Omöjligt!

$\Rightarrow$ 0 ej hävbar singularitet

Antag att 0 pol $\Rightarrow$ $\underbrace{\lim_{z\to 0} f(z)}$ $= \infty$

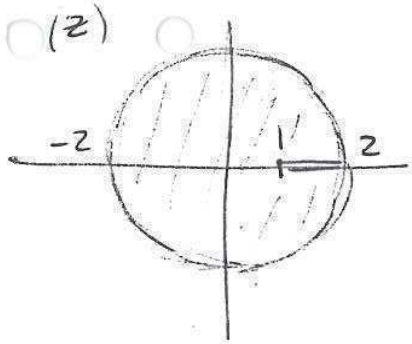
$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{=0} = 0$$

Motsägelse!

$\Rightarrow$ 0 är väsentlig singularitet för f

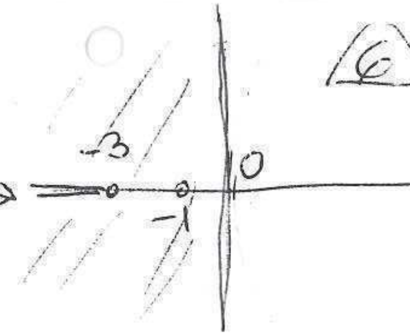
(6)

4! (z)



$$z_1 = \frac{z+2}{z-2}$$

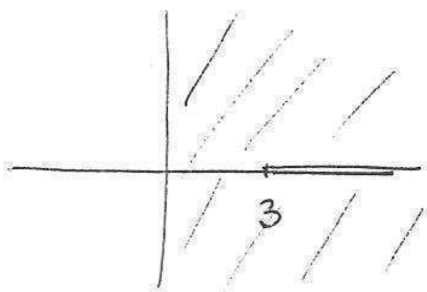
$2 \to \infty$
$-2 \to 0$
$1 \to -3$
$0 \to -1$
$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$
$\{|z|=2\} \to \mathrm{Im}$



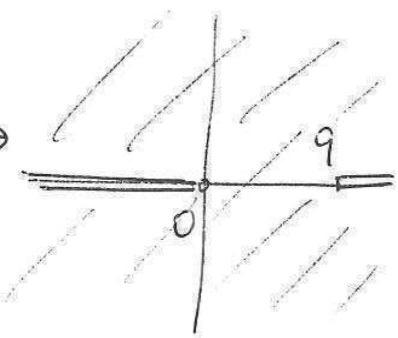
snitt mellan -3 och ∞; längs Re, ej genom -1

$\{|z|=2\} \perp \mathrm{Re}$ i -2
$\Rightarrow$ bilden $\perp$ Re i 0
$\Rightarrow$ Im-axeln är bilden av $\{|z|=2\}$

$$z_2 = -z_1$$

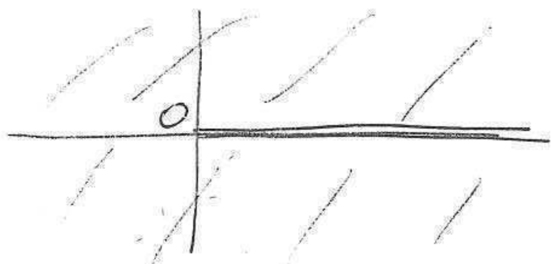


$$z_3 = z_2^2$$

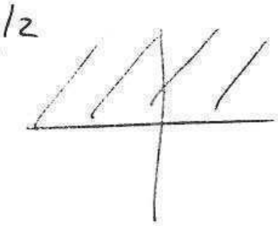


$$z_4 = \frac{z-9}{z}$$

$9 \to 0$
$0 \to \infty$
$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$
$\infty \to 1$



$$w = z_4^{1/2}$$



4''.

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z+i)(z-i)}$$

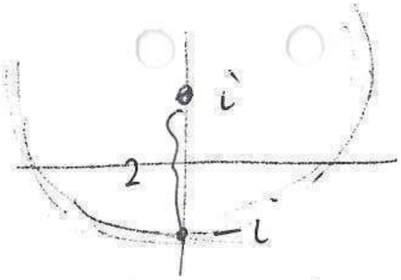
$$\frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i}$$

$$z = A(z-i) + B(z+i)$$

$z = i$: $\quad i = 0 + 2i \cdot B \qquad B = \frac{1}{2}$

$z = -i$: $\quad -i = -2iA + 0 \qquad A = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i}$ är redan en potens av $z-i$
Återstår att utveckla $1/(z+i)$



(i) $0 < |z-i| < 2$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i}\left(1 - \frac{z-i}{2i} + \frac{(z-i)^2}{-4} - \ldots\right)$$

$$\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} - \frac{i}{4} + \frac{1}{8}(z-i) +$$

$$+ \frac{i}{16}(z-i)^2 - \ldots$$

(ii) $|z-i| > 2$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} =$$

$$= \frac{1}{z-i}\left(1 - \frac{2i}{z-i} + \frac{-4}{(z-i)^2} - \ldots\right)$$

$$\left|\frac{2i}{z-i}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{(z-i)^2} - \frac{2}{(z-i)^3} + \ldots$$

LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 17 aug 2005 fm
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.

---

1. (2p) Antag

$$f(z) = \frac{z \cos 2z}{2z^2 + 1}.$$

Beräkna integralen

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

där γ betecknar den positivt orienterade enhetscirkeln i z-planet. Angiv endast svar!

Lösning: Funtionen $f(z)$ har enkla nollställen i $z = 0$ och $z = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, och enkelpoler i $z = \pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$. Notera att $f(z)$ saknar nollställen och poler på γ. Enligt känd sats (sid 173) är integralens värde I lika med $2\pi i(N - P)$, där N är antalet nollställen för f i enhetscirkelskivan räknade med multiplicitet och P är antalet poler för f i enhetscirkelskivan räknade med multiplicitet. Alltså är $I = 2\pi i(3 - 2) = 2\pi i \leftarrow SVAR$.

2. (4p) Bestäm den sekvens $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ som har Z-transformen

$$\frac{z^2}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}.$$

(Ledning: Om c är ett komplext tal skilt från noll och $b_n = 0$ för $n < 0$ och $b_n = c^n$ för $n \geq 0$ så har sekvensen $(b_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ Z-transformen $\frac{z}{z-c}$.)

Lösning: Det gäller att

$$\frac{z}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6} = \frac{z}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{z+1} + \frac{2}{z+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{z+3}$$

varför

$$\frac{z^2}{z^3+6z^2+11z+6}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{z}{z+1} + 2\frac{z}{z+2} - \frac{3}{2}\frac{z}{z+3}.$$

Ledningen ger nu för stora $|\, z \,|$ att

$$\frac{z^2}{z^3+6z^2+11z+6}$$

$$= -\frac{1}{2}\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n} + 2\Sigma_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^{-n} - \frac{3}{2}\Sigma_{n=0}^{\infty}(-3)^n z^{-n}$$

$$= \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$$

där

$$a_n = (-1)^n(-\frac{1}{2} + 2^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{2}) \text{ för } n \geq 0 \leftarrow SVAR$$

och

$$a_n = 0 \text{ för } n < 0 \leftarrow SVAR$$

3. (4p) Det reella talet a är skilt från noll. Beräkna

$$\int_0^{\pi} \tan(x+ia)dx.$$

Lösning: Det gäller att

$$\tan z = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

$$= \frac{2i}{e^{2iz}+1} - i$$

och

$$\int_0^{\pi} \frac{2i}{e^{2i(x+ia)}+1}dx = \int_0^{\pi} \frac{2ie^{2a}}{e^{2ix}+e^{2a}}dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{2a}}{e^{it}+e^{2a}}dt.$$

Om C betecknar den positivt orienterade enhetscirkeln gäller därför enligt residusatsen att

$$\int_0^\pi \frac{2i}{e^{2i(x+ia)}+1}dx = \int_C \frac{e^{2a}dz}{z(z+e^{2a})}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i(1-1) = 0 \text{ om } a < 0 \\ 2\pi i \text{ om } a > 0 \end{cases} .$$

Härav följer att

$$\int_0^\pi \tan(x+ia)dx = \begin{cases} -i\pi \text{ om } a < 0 \\ i\pi \text{ om } a > 0 \end{cases} \leftarrow SVAR$$

4. (2.5p) Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

5. (2.5p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i området $0 <\mid z - z_0 \mid< r$. Visa att om funktionen $\mid f(z) \mid$ är begränsad i en punkterad omgivning av z_0 så finns en i området $\mid z - z_0 \mid< r$ konvergent potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ vars summa i punkten $z \neq z_0$ är lika med $f(z)$.

LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 12 jan 2005, f V
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

1. (0.5p+0.5p+1p+1p) Funktionen

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-4z^2+z+6}$$

har en Laurentserieutveckling av typen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-2)^{-n}$ i området $\mid z-2 \mid > 3$.

a) Bestäm a_n för $n \geq 0$. Ange endast svar!
b) Bestäm b_1. Ange endast svar!
c) Bestäm b_n för $n \geq 2$. Ange endast svar!
d) Beräkna

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

där C är den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie $\frac{3}{2}$.
OBS: Motivera beräkningen!

Lösning a) - c). Det gäller att

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3-4z^2+z+6} = \frac{z^2+1}{(z+1)(z-2)(z-3)}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{z+1} - \frac{5}{3}\frac{1}{z-2} + \frac{5}{2}\frac{1}{z-3}.$$

Vi sätter $w = z-2$ och får

$$f(z) = \frac{1}{6}\frac{1}{w+3} - \frac{5}{3}\frac{1}{w} + \frac{5}{2}\frac{1}{w-1}$$

$$= \frac{1}{6w}\frac{1}{1+3w^{-1}} - \frac{5}{3}w^{-1} + \frac{5}{2w}\frac{1}{1-w^{-1}}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n w^{-n-1} - \frac{5}{3}w^{-1} + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1}$$

$$= w^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n 3^{n-1})w^{-n-1}$$

$$= (z-2)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(5 + (-1)^n 3^{n-1})(z-2)^{-n-1}$$

$$= (z-2)^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}(5 + (-1)^{n-1} 3^{n-2})(z-2)^{-n}$$

Alltså är a) $a_n = 0,\ n \geq 0$ b) $b_1 = 1$ och c) $b_n = \frac{1}{2}(5 + (-1)^{n-1}3^{n-2})$, $n \geq 2. \leftarrow SVAR$

Lösning d). Kända satser visar att integralens värde är lika med $2\pi i \times$ (Antalet nollställen för f innanför C räknade med multiplicitet minus antalet poler för f innanför C räknade med multiplicitet) $= 2\pi i(2-1) = 2\pi i \leftarrow$ $SVAR$

2. (3p) En Möbiusavbildning $w = f(z)$ avbildar punkterna -1, 0 och 1 på punkterna ∞, 1, respektive 0. Bestäm det minimala avståndet mellan $f(z_1)$ och $f(z_2)$ då z_1 och z_2 är diametralt motsatta punkter på cirkel $\mid z \mid= \frac{1}{2}$.

Lösning. Möbiusavbildningen uppfyller

$$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{1-\infty}{1-0} = \frac{z-1}{z+1}\frac{0+1}{0-1}$$

dvs

$$w = f(z) = \frac{1-z}{1+z}.$$

Om $z_1 = \frac{1}{2}e^{it}$ och $z_2 = -\frac{1}{2}e^{it}$, där $0 \leq t < \pi$, blir

$$\mid f(z_1) - f(z_2) \mid = \mid \frac{2-e^{it}}{2+e^{it}} - \frac{2+e^{it}}{2-e^{it}} \mid$$

$$= \frac{8}{|\,4 - e^{2it}\,|} \geq \frac{8}{5}$$

där likhet inträffar om $t = \frac{\pi}{2}$. $SVAR:\ \frac{8}{5}$.

3. (4p) Beräkna

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$$

Lösning. Om $z = re^{it}$ där $r > 0$ och $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ definieras $\log z = \ln r + it$, $z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = \sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}}$ och $f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{(1+z^2)^2}$. Låt nu $0 < \varepsilon < 1 < \rho$, $C_\rho : z = \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ och $\gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Funktionen $f(z)$ har en pol av ordning 2 i punkten $z = i$ och är analytisk utanför $\{i\} \cup \{$icke-positiva imaginäraxeln$\}$. Cauchys sats ger

$$\int_\varepsilon^\rho f(x)dx + \int_{C_\rho} f(z)dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{-\gamma_\varepsilon} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}(f(z); i).$$

Här är

$$|\int_{C_\rho} f(z)dz\,| \leq \frac{\sqrt{\rho}(\ln\rho + \pi)}{(\rho^2-1)^2}\pi\rho$$

och

$$|\int_{-\gamma_\varepsilon} f(z)dz\,| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \pi)}{(1-\varepsilon^2)^2}\pi\varepsilon$$

och genom att låta $\varepsilon \to 0$ och $\rho \to \infty$ följer att

$$\int_0^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^0 f(x)dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z); i).$$

Vidare är

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 \frac{i\sqrt{|\,x\,|}(\ln|\,x\,| + i\pi)}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{i\sqrt{x}(\ln x + i\pi)}{(1+x^2)^2}dx$$

och eftersom $f(x)$ är reell for $x > 0$ blir

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^2}dx = 2\pi \text{Re Res}(f(z); i).$$

Här är

$$\text{Res}(f(z); i) = \left[\frac{d}{dz}\frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{(z+i)^2}\right]_{z=i}$$

$$= \left[-2(z+i)^{-3}z^{\frac{1}{2}}\log z + \frac{1}{2}(z+i)^{-2}\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\log z + (z+i)^{-2}\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right]_{|z=i}$$

och vi får

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}(\pi - 4).$$

4. (2.5p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i området $0 <| z - z_0 |< r$. Visa att om $| f(z) |$ är begränsad i en punkterad omgivning av z_0 så finns en i området $| z - z_0 |< r$ konvergent potensserie $\sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ vars summa i punkten $z \neq z_0$ är lika med $f(z)$.

5. (2.5p) Den komplexvärda kontinuerliga funktionen f är definierad i ett öppet sammanhängande område D i komplexa talplanet. Vidare gäller att

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

för varje triangel γ i D som omsluter ett område som helt ligger i D. Visa att funktionen f är analytisk.

LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 20 okt 2004, e
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
− −

1. (1p+1p) a) Visa att funktionen $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$ är harmonisk. b) Bestäm ett harmoniskt konjugat till funktionen $u(x,y)$. I del b) anges endast svar.

Lösning: a) Det gäller att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)) =$$

$$e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y + \cos y) + e^x(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y) = 0.$$

b) Antag att funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är analytisk, där funktionen $v(x,y)$ är reellvärd. Då är $f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) = u'_x(x,y) - iu'_y(x,y)$ och vi får att

$$f'(z) = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) - ie^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y).$$

Alltså är

$$f'(x) = (x+1)e^x, \; x \text{ reellt.}$$

De hela funktionerna $f'(z)$ och $(z+1)e^z$ sammanfaller alltså på x-axeln och är därför enligt känd sats lika. Det följer att $f(z) = ze^z + C$, där C är en komplex konstant. Eftersom $u(0,0) = 0$ blir $C = iE$ där E är en reell konstant. Det följer att $v(x,y) = \text{Im}\{e^x(x+iy)(\cos y + i\sin y) + iE\} = e^x(x\sin y + y\cos y) + E \leftarrow SVAR$

2. (4p) Hur många nollställen räknade med multiplicitet har funktionen

$$g(z) = z\cosh z + 3z^3 + 1$$

i området $\mid z \mid < 1$?

Lösning. Definiera $f(z) = -3z^3$ då $z \in \mathbf{C}$. På enhetscirkeln $\mid z \mid = 1$ gäller att

$$\mid f(z) + g(z) \mid = \mid z \cosh z + 1 \mid \leq$$
$$\mid z \mid \mid \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \mid +1 \leq \frac{1}{2}(\mid e^z \mid + \mid e^{-z} \mid) + 1 =$$
$$\frac{1}{2}(e^{\mathrm{Re}\, z} + e^{-\mathrm{Re}\, z}) + 1 \leq \frac{1}{2}(e + e^{-1}) + 1 < 3 = \mid f(z) \mid .$$

Kom här ihåg att funktionen $\cosh x$, $x \in \mathbf{R}$, är jämn och växande för $x \geq 0$. Rouchés sats ger nu att $g(z)$ och $f(z)$ har lika många nollställen räknade med multiplicitet i området $\mid z \mid < 1$. Eftersom $f(z)$ har tre nollställen räknade med multiplicitet i området $\mid z \mid < 1$ gäller samma sak för $g(z)$.

3. (4p) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Lösning. Det gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

ty

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = 0.$$

Sätt

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4}$$

dvs

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)}.$$

Om $\rho > 2$ och $C_\rho : z = \rho e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, och $I_\rho : z = x$, $-\rho \leq x \leq \rho$, så ger residusatsen att

$$\int_{C_\rho + I_\rho} f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z); 2i) + \mathrm{Res}(f(z); i)).$$

Eftersom $\mid e^{iz} \mid = e^{-\mathrm{Im}\, z}$ ger en ML-skattning att

$$\mid \int_{C_\rho} f(z)dz \mid \leq \frac{\rho}{(\rho^2 - 4)(\rho^2 - 1)} \pi\rho \to 0 \text{ då } \rho \to \infty.$$

Alltså är

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z); 2i) + \mathrm{Res}(f(z); i)).$$

Här är

$$\mathrm{Res}(f(z); 2i) = \left[\frac{ze^{iz}}{(z + 2i)(z^2 + 1)}\right]_{|z=2i} = -\frac{1}{6}e^{-2}$$

och

$$\mathrm{Res}(f(z); i) = \left[\frac{ze^{iz}}{(z^2 + 4)(z + i)}\right]_{|z=i} = \frac{1}{6}e^{-1}.$$

Det följer nu att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{i\pi}{3}(e^{-1} - e^{-2})$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{3}(e^{-1} - e^{-2}) \leftarrow SVAR$$

4. (1p+1p) Sekvensen $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ uppfyller olikheten $\mid a_n \mid \leq M r_0^n$, $n \in \mathbf{N}$, för lämpliga positiva tal M och r_0.

a) Definiera Z-transformen $\check{a}$ av a (observera att $\check{a} = Z(a)$ med lärobokens beteckningar).

b) Sätt $b = (a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$. Visa att

$$\check{b}(z) = z\check{a}(z) - za_0.$$

5. (3p) De reellvärda och kontinuerligt deriverbara funktionerna $u(x, y)$ och $v(x, y)$ är definierade i en domän D och uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i en punkt (x_0, y_0) som tillhör D. Visa att funktionen

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

är en deriverbar funktion av $z = x + iy$ i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$.

LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 18 augusti 2004, fm
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.

---

1. (2p) Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{z - 6}$$

i en Laurentserie i området i området $| z - 4 |> 2$. Angiv endast svar.

Lösning: Vi har att

$$\frac{3z^2 - 2z + 4}{z - 6} = 3z + 16 + \frac{100}{z - 6}$$

och

$$\frac{1}{z-6} = \frac{1}{z-4-2} = \frac{1}{z-4}\frac{1}{1-\frac{2}{z-4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z-4)^n}.$$

Härav följer att

$$f(z) = 3(z-4) + 28 + 100\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(z-4)^n} \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Beräkna imaginärdelen av integralen

$$\int_C \frac{z^2}{(z^2 + \pi^2)^2 \sin z} dz$$

där C är den positivt orienterade rektangeln med hörn i punkterna $1 - i$, $1 + 4i$, $-1 + 4i$ och $-1 - i$.

Lösning: Sätt

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2 \sin z}.$$

Det gäller att $\sin z = 0$ om och endast om $z = n\pi$ där n är ett heltal. Eftersom

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$$

är

$$\lim_{z\to 0} f(z) = 0$$

och funktionen f har en hävbar singularitet i origo. Punkterna $n\pi$ där n är ett nollskilt heltal ligger utanför det område C inringar. Funktionen f har poler av ordning 2 i punkterna $\pm i\pi$. Punkten $-i\pi$ ligger utanför det område C inringar och punkten $i\pi$ ligger innanförför det område C inringar. Vidare är

$$\mathrm{Res}(f(z); i\pi) = \lim_{z\to i\pi} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i\pi)^2 \sin z}$$

$$= \lim_{z\to i\pi} \frac{2z(z+i\pi)\sin z - 2z^2 \sin z - z^2(z+i\pi)\cos z}{(z+i\pi)^3 \sin^2 z}$$

$$= -\frac{1}{4\pi \sinh \pi} + \frac{\cosh \pi}{4\pi \sinh^2 \pi}.$$

Residusatsen visar nu att

$$\int_C \frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2 \sin z} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{4\pi \sinh \pi} + \frac{\cosh \pi}{4\pi \sinh^2 \pi}\right)$$

$$= i\left(-\frac{1}{2\sinh \pi} + \frac{\cosh \pi}{2\sinh^2 \pi}\right).$$

$SVAR: -\frac{1}{2\sinh\pi} + \frac{\cosh\pi}{2\sinh^2\pi}$

3. (1p+2p+1p) Funktionen

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1},$$

vars singularitet i origo är hävbar, har en Maclaurintutveckling av typen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$. a) Bestäm konvergensradien. b) Visa, att $B_0 = 1$ och

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \ n \geq 1.$$

c) Visa, att $B_{2n+1} = 0$, $n \geq 1$.

Lösning: a) Ekvationen $e^z = 1$ har lösningarna $z = n2\pi i$ där n är ett godtyckligt heltal. De singulära punkter till $f(z)$ som ligger närmast origo är punkterna $\pm 2\pi i$ med avståndet 2π till origo. Maclaurinseriens konvergensradie är därför $2\pi \leftarrow SVAR$

b) Definiera $f(0) = 1$. Det gäller att

$$z = (e^z - 1)f(z)$$

och för $\mid z \mid < 2\pi$ följer nu att

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

Alltså är

$$1 = B_0$$

och

$$0 = \sum_{\substack{m+k=n \\ m \geq 1, k \geq 0}} \frac{B_k}{m!k!} \text{ för } n \geq 2.$$

Om $n \geq 2$ följer alltså att

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k$$

eller

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \text{ för } n \geq 1.$$

Med andra ord gäller att

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \text{ för } n \geq 1.$$

c) Funktionen

$$B_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = f(z) - B_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z \cosh \frac{z}{2}}{2 \sinh \frac{z}{2}}$$

är jämn varför

$$B_n = \left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{z\cosh\frac{z}{2}}{2\sinh\frac{z}{2}}\right]_{|z=0} = 0 \text{ om } n \geq 2 \text{är udda.}$$

4. (2p) Bestäm Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}, $-\infty < t < \infty$.

5. (3p) Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid: 14 januari 2004 fm
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.
———————————————————————————

1. (2p+2p) a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ sådan att $T(0) = -1$, $T(1) = \infty$ och $T(\infty) = 2$. b) Utveckla funktionen $T(z)$ i en Laurentserie i området $\mid z \mid > 1$.

Lösning: a) Vi har att

$$\frac{w+1}{w-\infty}\frac{2-\infty}{2+1} = \frac{z-0}{z-1}\frac{\infty-1}{\infty-0}$$

dvs

$$\frac{w+1}{3} = \frac{z}{z-1}.$$

Härav följer att

$$w = T(z) = \frac{2z+1}{z-1} \leftarrow SVAR$$

b) Det gäller att

$$\frac{1}{1-a} = \Sigma_{n=0}^{\infty} a^n \text{ om } \mid a \mid < 1.$$

Om $\mid z \mid > 1$ följer därför att

$$T(z) = 2\frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= 2\Sigma_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \Sigma_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}$$

$$= 2 + 3\Sigma_{n=1}^{\infty} z^{-n} \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Bestäm antalet nollställen för polynomet $p(z) = z^6 + 6z + 10$ i första kvadranten.

Lösning: Låt ρ vara ett positivt tal och betrakta den slutna kurvan $\delta = \alpha + \beta + \gamma$, där

$$\alpha(x) = x,\ 0 \leq x \leq \rho$$

$$\beta(t) = \rho e^{it},\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

och

$$\gamma(y) = iy,\ \rho \geq y \geq 0.$$

Det är tydligt att $\Delta_\alpha \arg p(z) = 0$ eftersom $p(z)$ är ett strikt positivt tal om $z \in \alpha$. Vidare är

$$p(\rho e^{it}) = \rho^6 e^{6it}(1 + \frac{6}{\rho^5}e^{-5it} + \frac{10}{\rho^6}e^{-6it}).$$

Alltså saknar $p(z)$ nollställen på β om ρ är tillräckligt stort och det följer att $\Delta_\beta \arg p(z) \approx 6\frac{\pi}{2} = 3\pi$ om ρ stort. På kurvan γ är imaginärdelen av $p(z)$ strikt positiv utom i origo där $p(0) = 10$. Polynomet $p(z)$ saknar därför nollställen på γ om ρ är tillräckligt stort. Vidare är $p(i\rho) = -\rho^6 + 10 + 6i\rho$, där det för tillräckligt stora ρ gäller att

$$\frac{6\rho}{-\rho^6 + 10} < 0$$

och

$$\frac{6\rho}{-\rho^6 + 10} \approx 0.$$

Det följer att $\Delta_\gamma \arg p(z) \approx -\pi$ om ρ stort.

Argumentprincipen visar nu att $p(z)$ har $\frac{1}{2\pi}(3\pi - \pi) = 1$ stycken nollställen i första kvadranten$\leftarrow SVAR$

3. (2p) Beräkna integralen

$$\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z^2}dz$$

där C är den positivt orienterade rektangeln med hörnen $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$. Angiv endast svar.

Lösning: Integranden

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z^2}$$

är analytisk utanför punkterna $\pm i$ och 0. De två första punkterna ligger utanför C. Om $0 <\mid z \mid< 1$ gäller att

$$f(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} \Sigma_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$$... + z^{-1} \sum_{\substack{-k+2n=-1 \\ k\geq 0,\ n\geq 0}} \frac{1}{k!}(-1)^n + ...$$

$$= ... + z^{-1}(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - ...) + ...$$

Residusatsen visar nu att integralens värde är lika med $2\pi(\sin 1)i \leftarrow SVAR$

4. (2p) Antag $R > 0$ och låt C_R beteckna halvcirkeln $z = \mathrm{Re}^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Visa att

$$\mid \int_{C_R} e^{iz} dz \mid< \pi.$$

5. (3p) Visa satsen om potensserieutveckling av en funktion som är analytisk.

LÖSNINGAR
TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 22 oktober 2003, em v
OBS: Skrivtiden är 3 timmar.

---

1. (1p+1p) a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ sådan att $\infty = T(0)$, $0 = T(i)$ och $1 = T(1)$. Angiv endast svar. b) Beräkna $\int_\gamma T^2(z)dz$ där γ är den positivt orienterade enhetscirkeln. Angiv endast svar.

Lösning: a) Det gäller att

$$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{1-\infty}{1-0} = \frac{z-i}{z-0}\frac{1-0}{1-i}$$

alltså är

$$w = \frac{1+i}{2}\frac{z-i}{z} \leftarrow SVAR$$

c) Det gäller att

$$T^2(z) = \frac{i}{2}(1 - 2i\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}) = ... + \frac{1}{z} + ...$$

varför

$$\int_\gamma T^2(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(T^2(z);0) = 2\pi i \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Bestäm antalet enkla nollställen för polynomet $p(z) = z^5 + z - 7$ i området $1 \leq \mid z \mid < 2$.

Lösning: Sätt $f(z) = -z^5$ och $g(z) = -z + 7$.
På cirkeln $\mid z \mid = 2$ gäller att

$$\mid p(z) + f(z) \mid = \mid z - 7 \mid \leq \mid z \mid + 7 = 9 < 2^5 = \mid f(z) \mid .$$

Rouchés sats medför därför att $p(z)$ och $f(z)$ har lika många nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 2$ räknade med multiplicitet. Funktionen $f(z)$ har 5 nollställen räknade med multiplicitet innanför cirkeln $\mid z \mid= 2$ varför $p(z)$ har 5 nollställen räknade med multiplicitet innanför cirkeln $\mid z \mid= 2$.

På cirkeln $\mid z \mid= 1$ gäller att

$$\mid p(z) + g(z) \mid=\mid z^5 \mid= 1 < 6 \leq\mid -z + 7 \mid=\mid g(z) \mid .$$

Rouchés sats medför därför att $p(z)$ och $g(z)$ har lika många nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 1$ räknade med multiplicitet. Funktionen $g(z)$ saknar nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 1$ varför $p(z)$ saknar nollställen innanför cirkeln $\mid z \mid= 1$.

Från ovanstående drar vi slutsatsen att $p(z)$ har 5 nollställen räknade med multiplicitet i området $1 \leq\mid z \mid< 2$. Det återstår att visa att nollställena är enkla. Om $p(z)$ har ett nollställe av ordning större än ett är detta också ett nollställe till $p'(z) = 5z^4 + 1$. Om

$$z^5 + z - 7 = 0 \text{ och } 5z^4 + 1 = 0$$

följer att

$$-\frac{1}{5}z + z - 7 = 0$$

dvs $z = \frac{35}{4}$, ett komplext tal som ligger utanför området $1 \leq\mid z \mid< 2$. Härav följer att polynomet $p(z)$ har 5 enkla nollställen i området $1 \leq\mid z \mid< 2 \leftarrow$ *SVAR*

3. (1p+3p) a) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

b) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx.$$

Lösning: a) Sätt

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}.$$

Observera att nämnarens gradtal är större än eller lika med två plus täljarens gradtal samt att $f(x) \neq 0$ då $x \in \mathbf{R}$. Funktionen f har i övre halvplanet endast singulariteter i punkterna

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ och } z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

och dessa är enkla poler. Sats i boken ger nu

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}2\pi i \sum_{k=0}^{1} \mathrm{Res}(f(z); z_k) = \pi i (\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3})$$

$$= \frac{\pi i}{4}(-z_0 - z_1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leftarrow SVAR$$

b) Låt D vara $\mathbf{C}\setminus\{z;\ \mathrm{Re}\, z = 0 \text{ och } \mathrm{Im}\, z \leq 0\}$. Om $z \in D$ och $z = re^{it}$, där $r > 0$ och $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ definieras $\log_1 z = \ln r + it$. Sätt

$$f(z) = \frac{\log_1 z}{z^4+1} \text{ om } z \in D.$$

Välj $\rho > 1$ och $0 < \varepsilon < 1$. Vi inför nu konturerna

$$C_\rho : z = \rho e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$\alpha : -\rho \leq x \leq -\varepsilon$$

$$\gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{it},\ \pi \geq t \geq 0$$

och

$$\beta :\ \varepsilon \leq x \leq \rho.$$

Residusatsen ger att

$$\int_{C_\rho+\alpha+\gamma_\varepsilon+\beta} f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z); z_0) + \mathrm{Res}(f(z); z_1))$$

där

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ och } z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Här är

$$|\int_{C_\rho} f(z)dz| \leq \pi\rho\frac{\ln\rho+\pi}{\rho^4-1} \to 0 \text{ då } \rho\to\infty$$

och

$$|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz| \leq \pi\varepsilon\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}+\pi}{1-\varepsilon^4} \to 0 \text{ då } \varepsilon\to 0.$$

Härav följer att

$$\int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\rho} f(x)dx + \delta(\rho,\varepsilon) = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z);z_0) + \mathrm{Res}(f(z);z_1))$$

där $\delta(\rho,\varepsilon)\to 0$ då $\rho\to\infty$ och $\varepsilon\to 0$. Alltså är

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x|+i\pi}{x^4+1}dx + \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}dx = 2\pi i(\frac{i\frac{\pi}{4}}{4z_0^3} + \frac{i\frac{3\pi}{4}}{4z_1^3})$$

dvs

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}dx + i\pi\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^4+1}dx = 2\pi i(i\frac{\pi}{4})(-\frac{z_0}{4} - \frac{3z_1}{4})$$
$$= \frac{\pi^2}{8}(\frac{1+i}{\sqrt{2}} + 3\frac{-1+i}{\sqrt{2}}).$$

Genom att identifiera realdelarna i vänster och höger led följer att

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}dx = -\pi^2\frac{\sqrt{2}}{16} \leftarrow SVAR$$

4. (2p) Antag att funktionen f är analytisk och låt $u = \mathrm{Re}\, f$ och $v = \mathrm{Im}\, f$. Visa att funktionerna u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

5. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1,...,s_n$ och

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = 0.$$

Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(g(s)e^{st};s_k),\ t\geq 0$$

har Laplacetransformen $g(s)$.

LÖSNINGAR
Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 20 aug 2003 fm
Hjälpmedel: Formelblad.
− −

1. (2p+2p) a) Vilken konvergensradie R har potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{3n}} z^n?$$

Angiv endast svar.
b) Vilken summa har potensserien för $\mid z \mid < R$. Angiv endast svar.

Lösning: a) Eftersom

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^{3n}}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3^3} \to \frac{1}{27} \text{ då } n \to \infty$$

följer att $R = 27$. Serien konvergerar därför om $\mid z \mid < 27$.
b) Om $\mid z \mid < 1$ gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

och derivering ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Deriveras relationen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

erhålls

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

Alltså är

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

och genom att ersätta z med $\frac{z}{27}$ erhålls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{3n}} z^n = \frac{27z(27+z)}{(27-z)^3} \text{ om } \mid z \mid < 27.$$

2. (4p) Antag a är en positiv konstant. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx.$$

Lösning: Om $z = re^{it}$, där $r > 0$ och $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$, låter vi $f(z) = \ln r + it$. Funktionen $f(z)$ är en gren av $\log z$. Låt nu $0 < \varepsilon < a < \rho$ och sätt $\Gamma_\rho : z = \rho e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, och $\gamma_\varepsilon = \varepsilon e^{it}$, $\pi \ge t \ge 0$. Residusatsen ger

$$\int_\varepsilon^\rho \frac{f(x)}{a^2+x^2} dx + \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{a^2+x^2} dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}(\frac{f(z)}{a^2+z^2}; ia).$$

Vidare gäller om $\varepsilon < 1 < \rho$ att

$$\mid \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz \mid \le \pi\rho \frac{\ln\rho + \pi}{\rho^2 - a^2} \to 0 \text{ då } \rho \to \infty$$

och

$$\mid \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{a^2+z^2} dz \mid \le \pi\varepsilon \frac{-\ln\varepsilon + \pi}{a^2 - \varepsilon^2} \to 0 \text{ då } \varepsilon \to 0.$$

Det följer att

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln \mid x \mid + i\pi}{a^2+x^2} dx$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}(\frac{f(z)}{a^2+z^2}; ia) = 2\pi i \frac{f(ia)}{2ia} = \frac{\pi}{a}(\ln a + i\frac{\pi}{2})$$

och genom att identifiera realdelarna i vänster och höger led blir

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

3. (4p) Antag n är ett icke-negativt heltal. Hur många rötter har ekvationen $z^n e^z = 6z + 3$ i området $\mid z \mid< 1$?

Lösning: Inför de hela funktionerna $f(z) = 6z + 3$ och $g(z) = z^n e^z - 6z - 3$. På cirkeln $\mid z \mid= 1$ gäller att

$$\mid f(z) + g(z) \mid=\mid z^n e^z \mid= e^{\mathrm{Re}\, z} \leq e = 2.718...$$

och

$$\mid f(z) \mid\geq 6 \mid z \mid -3 = 3.$$

Alltså är

$$\mid f(z) + g(z) \mid<\mid f(z) \mid \quad \text{om} \quad \mid z \mid= 1.$$

Rouchés sats medför nu att f och g har samma antal nollställen i $\mid z \mid< 1$ räknade med multiplicitet. Funktionen f har ett enkelt nollställe i punkten $-\frac{1}{2}$ och inga andra nollställen och vi drar slutsatsen att g har exakt ett enkelt nollställe i $\mid z \mid< 1$. Ekvationen $z^n e^z = 6z + 3$ har därför en rot i området $\mid z \mid< 1$.

4. (2p+2p) Antag $n \in \mathbf{N}_+$ och att $P(z) = a \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ är ett polynom av graden n. a) Visa att

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\mid z - z_1 \mid^2} + ... + \frac{\bar{z} - \bar{z}_n}{\mid z - z_n \mid^2} \text{ om } z \notin \{z_1, z_2, ..., z_n\}\,.$$

b) Antag $P'(z) = 0$. Visa att det existerar icke-negativa tal $\lambda_1, ..., \lambda_n$ med summan 1 sådana att

$$z = \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_n z_n.$$

Lösning: a) Derivering ger

$$P'(z) = a \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k} (z - z_j)$$

och

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z} - \bar{z}_k}{\mid z - z_k \mid^2}.$$

b) Om $P'(z) = 0$ och $z \notin \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ får vi att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{z} - \bar{z}_k}{\mid z - z_k \mid^2} = 0$$

och

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{\mid z - z_k \mid^2} = 0$$

dvs

$$z \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mid z - z_k \mid^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{\mid z - z_k \mid^2}.$$

Om vi definierar

$$\lambda_k = \frac{\frac{1}{|z-z_k|^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z-z_j|^2}}, \ k = 1, ..., n$$

så är $\lambda_1, ..., \lambda_n$ positiva tal med summan 1 sådana att

$$z = \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_n z_n.$$

Om $z = z_k$ för ett visst k definieras $\lambda_k = 1$ och $\lambda_j = 0$ om $j \neq k$ och det följer att $\lambda_1, ..., \lambda_n$ icke-negativa tal med summan 1 sådana att

$$z = \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_n z_n.$$

5. (2p) Visa att en hel begränsad funktion är konstant.

6. (2p) Härled Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}.

7. (3p) Visa satsen om potensserieutveckling av en funktion som är analytisk.

Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-08-21, f, VV11
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0740 459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
OBS: Text på 2 sidor!

---

1. (4p) Laurentserieutveckla funktionen $f(z) = \frac{1}{z}e^z + \frac{1}{(z+1)^2}$ i potenser av z. Utvecklingen skall gälla i ett område som innehåller punkten $z = 2$.

2. (4p) Hur många rötter har ekvationen $z^2e^z = 5z + 2$ i området $|z| < 1$?

3. (4p) Funktionen $f(z)$ är hel och $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$. Vidare gäller att $u(x,y) + v(x,y) = x^2 - y^2$ och $f(0) = 0$. Beräkna

$$\int_\gamma \frac{z}{f(z)} dz$$

där γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

4. (4p) Låt $P(z) = z^2 + 2bz + c$, där b och c är komplexa tal, och låt γ vara en enkel sluten kurva i komplexa talplanet sådan att $P(z) \neq 0$ för alla punkter z på γ. För varje positivt heltal n definieras

$$A_n = \int_\gamma \frac{dz}{P(z)^n} .$$

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} |A_n|^{\frac{1}{n}} .$$

(Ledning: Om m är ett positivt heltal gäller att

$$m! = \sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m+\theta_m}$$

där $0 < \theta_m < 1$.)

5. (2p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i en domän D. Visa att $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ i D, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$.

6. (2p) Formulera och bevisa Liouvilles sats för hela funktioner.

7. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1, \ldots, s_n$ och

$$\lim_{s \mapsto \infty} g(s) = 0.$$

Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(g(s)e^{st}; s_k)$$

har Laplacetransformen $g(s)$.

TABELL FÖR LAPLACETRANSFORMATION

	$f(t)$	$F(s) = L(f(t))$
L01	$f(t)$	$\int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$
L02	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
L03	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
L04	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
L05	$f(t-T)\theta(t-T) \quad (T \geq 0)$	$e^{-Ts}F(s)$
L06	$f'(t)$	$sF(s) - f(0-)$
L07	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0-)$
L08	$\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
L09	$\int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
L09'	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$, $f(t)=g(t)=0$ för $t<0$	$F(s)G(s)$
L10	$\delta(t)$	1
L11	$\delta^{(n)}(t)$	s^n
L12	1	$\frac{1}{s}$
L13	$\frac{t^n}{n!}$	s^{-n-1}

TABELL FÖR LAPLACETRANSFORMATION (forts.)

	$f(t)$	$F(s) = L(f(t))$
L14	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
L15	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
L16	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
L17	$\frac{t}{2b}\sin bt$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
L18	$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
L19	$\delta(t-T) \quad (T \geq 0)$	$e^{-Ts} \quad (T \geq 0)$
L20	$\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-a^2/4t} \quad (a > 0)$	$e^{-a\sqrt{s}} \quad (a > 0)$
L21	$\ell_n(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$	$\frac{(s-\frac{1}{2})^n}{(s+\frac{1}{2})^{n+1}}$

13.4 The z-transform

For sequences $(x(n))_{n=0}^{\infty}$ the z-transform is defined by

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}}$$

Inversion formula. $x(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} X(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz^{-1}}\right)^n X(z)|_{z^{-1}=0}$ (r large enough)

In practice, $x(n)$ often is determined by series expansion or by using the table below.

Properties and table of z-transforms

Below $\theta(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$

	$x(n)$	$X(z)$
z1.	$x(n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$
z2.	$a\,x(n)+b\,y(n)$	$a\,X(z)+b\,Y(z)$
z3.	$x(n-k)\theta(n-k)=\begin{cases}0, & 0\leq n\leq k-1\\ x(n-k), & n\geq k\end{cases}$	$z^{-k}X(z)$
z4.	$x(n+k)$ $(k>0)$	$z^kX(z)-z^kx(0)-z^{k-1}x(1)-\ldots-z\,x(k-1)$
z5.	$a^{-n}x(n)$	$X(az)$
z6.	$nx(n)$	$-zX'(z)$
z7.	$x*y(n)=\sum_{k=0}^{n} x(n-k)\,y(k)$	$X(z)\,Y(z)$

	$x(n)$	$X(z)$
z8.	$\delta_k(n)=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}$	$\frac{1}{z^k}$
z9.	$\begin{cases}0, & n=0\\ a^{n-1}, & n\geq 1\end{cases}$ (a complex)	$\frac{1}{z-a}$
z10.	$\begin{cases}0, & 0\leq n\leq k-1\\ \binom{n-1}{k-1}a^{n-k}, & n\geq k\end{cases}$	$\frac{1}{(z-a)^k}$
z11.	a^n	$\frac{z}{z-a}$
z12.	$\binom{n}{k}a^{n-k}$ $[na^{n-1}]$	$\frac{z}{(z-a)^{k+1}}$ $\left[\frac{z}{(z-a)^2}\right]$
z13.	n^2a^n	$\frac{a(z+a)z}{(z-a)^3}$
z14.	$\binom{n+k}{k}a^n$	$\left(\frac{z}{z-a}\right)^{k+1}$
z15.	$a^{n-1}\sin\frac{n\pi}{2}$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
z16.	$\frac{1}{b}r^n\sin n\theta$ $\left(a,b>0,\ r=\sqrt{a^2+b^2},\ \theta=\arctan\frac{b}{a}\right)$	$\frac{z}{(z-a)^2+b^2}$
z17.	$\frac{1}{b}r^n\sin n\theta$ $\left(a,\ b>0,\ r=\sqrt{a^2+b^2},\ \theta=\pi\text{-}\arctan\frac{b}{a}\right)$	$\frac{z}{(z+a)^2+b^2}$
z18.	$r^n\cos n\theta$	$\frac{z(z-r\cos\theta)}{z^2-2rz\cos\theta+r^2}$
z19.	$r^n\sin n\theta$	$\frac{rz\sin\theta}{z^2-2rz\cos\theta+r^2}$
z20.	$a^n/n!$	$e^{a/z}$

Recurrence (difference) equations

An N^{th} order *linear recurrence equation with constant coefficients* and N initial values:

$$\begin{cases} x(n+N)+a_{N-1}\,x(n+N-1)+\ldots+a_0x(n)=f(n), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots & (13.1)\\ x(0),\ x(1),\ \ldots,\ x(N-1)\ \text{given} & (13.2)\end{cases}$$

To find the solution, take z-transform of (13.1) and use z4 and (13.2). This gives $X(z)$, from which $x(n)$, $n=0, 1, 2, \ldots$ are uniquely determined.

LÖSNINGAR
TMA251 och TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-08-21, f, VV11
Hjälpmedel: Formelblad.

---

1. TMA252 (4p) Laurentserieutveckla funktionen $f(z) = \frac{1}{z}e^z + \frac{1}{(z+1)^2}$ i potenser av z. Utvecklingen skall gälla i ett område som innehåller punkten $z = 2$.

Lösning: Det gäller för $|z| > 1$ att

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z+1} = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{z}\frac{1}{1+z^{-1}}\right\}$$

$$= -\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{-n-2}.$$

Kom ihåg att

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

för alla komplexa tal z. Om $|z| > 1$ blir därför

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{-n-2}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}z^n + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^{-n} \leftarrow SVAR$$

1. TMA251 (4p) Bestäm en harmonisk funktion $h(x,y)$ i området $x > 0$, $y > 0$, som har randvärdena

$$\begin{cases} h(x,0) = 1, \ x > 1 \\ h(x,0) = 0, \ 0 < x < 1 \\ h(0,y) = 2, \ y > 0. \end{cases}$$

Lösning: Avbildningen $w = u + iv = z^2$ avbildar området $x > 0$, $y > 0$ omvändbart entydigt på området $v > 0$. Vidare avbildas

$$x > 1, \ y = 0 \text{ på } u > 1, \ v = 0,$$

$$0 < x < 1,\ y = 0 \text{ på } 0 < u < 1,\ v = 0$$

och

$$x = 0,\ y > 0 \text{ på } u < 0,\ v = 0.$$

Vi söker därför först en harmonsk funktion $H(u, v)$ i området $\operatorname{Im} w > 0$ sådan att

$$\begin{cases} H(u,0) = 1,\ u > 1 \\ H(u,0) = 0,\ 0 < u < 1 \\ H(u,0) = 2,\ u < 0. \end{cases}$$

Enligt Poissons integralformel för övre halvplanet kan vi definiera

$$H(u,v) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{vH(t,0)dt}{(t-u)^2+v^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{2vdt}{(t-u)^2+v^2} + \frac{1}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{vdt}{(t-u)^2+v^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\arctan\frac{t-u}{v}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\arctan\frac{t-u}{v}\right]_{1}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arctan\frac{u}{v} - \arctan\frac{1-u}{v}\right).$$

Slutligen definieras

$$h(x,y) = H(u,v) = H(x^2-y^2, 2xy)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arctan\frac{x^2-y^2}{2xy} - \arctan\frac{1-x^2+y^2}{2xy}\right) \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Hur många rötter har ekvationen $z^2e^z = 5z + 2$ i området $|\, z \,| < 1$?
Lösning: Sätt $f(z) = -5z - 2$ och $g(z) = 5z + 2 - z^2e^z$. På enhetscirkeln $|\, z \,| = 1$ gäller att

$$|\, f(z) \,| \geq 5 \,|\, z \,| - 2 = 3$$

och

$$|\, f(z) + g(z) \,| \leq |\, z \,|^2 \, e^{\operatorname{Re} z} \leq e$$

och därmed är $|\, f(z) + g(z) \,| < |\, f(z) \,|$ på enhetscirkeln. Enligt Rouchés sats har f och g lika många nollställen innanför enhetscirkeln. Funktionen $f(z)$ har exakt ett nollställe, nämligen i punkten $-\frac{2}{5}$, som ligger innanför enhetscirkeln. Härav följer att den givna ekvationen har exakt *ett nollställe innanför enhetscirkeln.* ← *SVAR*

3. (4p) Funktionen $f(z)$ är hel och $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$. Vidare gäller att $u(x,y) + v(x,y) = x^2 - y^2$ och $f(0) = 0$. Beräkna

$$\int_\gamma \frac{z}{f(z)} dz$$

där γ är den positivt orienterade enhetscirkeln.

Lösning: Derivering av ekvationen $u(x,y) + v(x,y) = x^2 - y^2$ ger

$$u'_x + v'_x = 2x$$

och

$$u'_y + v'_y = -2y.$$

Den senare ekvationen medför, genom att utnyttja Cauchy-Riemanns ekvationer $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, att

$$-v'_x + u'_x = -2y.$$

Härav följer att

$$u'_x = x - y$$

och

$$v'_x = x + y.$$

Alltså är $f'(z) = u'_x + iv'_x = x - y + i(x+y)$ och $f'(x+i0) = (1+i)(x+i0)$. Eftersom två hela funktioner som sammanfaller på realaxeln är lika blir $f'(z) = (1+i)z$ varav följer att $f(z) = \frac{1+i}{2}z^2$ eftersom $f(0) = 0$. Residusatsen ger nu att

$$\int_\gamma \frac{z}{f(z)} dz = \frac{2}{1+i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz$$

$$= \frac{2}{1+i} 2\pi i = 2\pi(1+i) \leftarrow SVAR$$

4. (4p) Låt $P(z) = z^2 + 2bz + c$, där b och c är komplexa tal, och låt γ vara en enkel sluten kurva i komplexa talplanet sådan att $P(z) \neq 0$ för alla punkter z på γ. För varje positivt heltal n definieras

$$A_n = \int_\gamma \frac{dz}{P(z)^n} \, .$$

Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} .$$

(Ledning: Om m är ett positivt heltal gäller att

$$m! = \sqrt{2\pi} m^{m+\frac{1}{2}} e^{-m+\theta_m}$$

där $0 < \theta_m < 1$.)

Lösning: Integranden har poler i nollställena z_0 och z_1 till $P(z)$.

Fall 1: z_0, z_1 ligger utanför γ (dvs ej på eller innanför γ).

I detta fall är $A_n = 0$ beroende på residusatsen och $\lim_{n\to\infty} \mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} = 0$

Fall 2: z_0, z_1 ligger innanför γ.

Låt C_r vara den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie r, där r är så stort att γ ligger innanför C_r. Då är

$$A_n = \int_{C_r} \frac{dz}{P(z)^n}.$$

Om dessutom $r^2 - 2r \mid b \mid - \mid c \mid > 0$ följer att

$$\mid A_n \mid \leq 2\pi r \max_{C_r} \mid \frac{1}{P(z)^n} \mid \leq \frac{2\pi r}{(r^2 - 2r \mid b \mid - \mid c \mid)^n}$$

där uttrycket i högra ledet konvergerar mot noll då $r \to \infty$. Alltså är $A_n = 0$ och

$$\lim_{n\to\infty} \mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Fall 3: z_0 ligger innanför γ och z_1 utanför γ.

I detta fall är

$$A_n = 2\pi i \mathrm{Res}(\frac{1}{P(z)^n}; z_0)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z-z_1)^n} \right\}_{|z=z_0}$$

$$= 2\pi i \frac{(-1)^{n-1} n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+n-2)}{(n-1)!(z_0 - z_1)^{2n-1}}$$

$$= 2\pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(z_0 - z_1)^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

Genom att utnyttja att

$$m! = \sqrt{2\pi}m^{m+\frac{1}{2}}e^{-m+\theta_m}$$

där $0 < \theta_m < 1$, följer att

$$\mid A_n \mid = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\mid z_0 - z_1 \mid^{2n-1}}\frac{2^{2n-\frac{3}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}e^{\theta_{2n-2}-2\theta_{n-1}}.$$

Eftersom

$$\mid z_0 - z_1 \mid^2 = 2^2 \mid b^2 - c \mid$$

blir

$$\lim_{n\to\infty} \mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\mid b^2 - c \mid}.$$

Fall 4: z_1 ligger innanför γ och z_0 utanför γ.
Som i fall 3 erhålls att

$$\lim_{n\to\infty} \mid A_n \mid^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\mid b^2 - c \mid}.$$

5. (2p) Funktionen $f(z)$ är analytisk i en domän D. Visa att $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ i D, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$.

6. (2p) Formulera och bevisa Liouvilles sats för hela funktioner.

7. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1, ..., s_n$ och

$$\lim_{s\mapsto\infty} g(s) = 0.$$

Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(g(s)e^{st}; s_k)$$

har Laplacetransformen $g(s)$.

Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-01-16, f, M
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0740 459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

---

1. (4p) Låt C beteckna den positivt orienterade cirkeln $|z| = 10$. Beräkna integralen
$$\int_C \frac{e^z}{e^z - 1} dz.$$

2. (4p) Bestäm konvergensradien för potensserien
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^{n^2}.$$

3. (4p) Betrakta polynomet $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$, där $a_0, .., a_{n-1}$ är komplexa tal och låt C beteckna den positivt orienterade enhetscirkeln i komplexa talplanet. Beräkna integralen
$$\int_C \frac{z^{n-1}p(\bar{z})}{z-w} dz$$
då w är ett komplext tal som uppfyller $|w| > 1$.

4. (4p) Bestäm alla hela funktioner $f(z)$ sådana att $f(0) = 1$ och
$$f(2z) = 2f(z)f'(z)$$
för alla komplexa tal z.

5. (2p) Härled Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}.

6. (2p) Formulera och bevisa Liouvilles sats för hela funktioner.

7. (3p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela planet utom i ändligt många punkter $s_1, ..., s_n$ och
$$\lim_{s \to \infty} g(s) = 0.$$
Visa att funktionen
$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(g(s)e^{st}; s_k)$$
har Laplacetransformen $g(s)$.

LÖSNINGAR: TMA251 och TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 02-01-16, f, M

---

1. (4p) Låt C beteckna den positivt orienterade cirkeln $\mid z \mid= 10$. Beräkna integralen
$$\int_C \frac{e^z}{e^z-1}dz.$$
Lösning: Integranden har enkelpoler i punkterna $z_k = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Punkterna z_0 och $z_{\pm 1}$ ligger innanför C och de övriga punkterna utanför C. Vidare gäller att
$$\text{Res}(\frac{e^z}{e^z-1}; z_k) = (\frac{e^z}{\frac{d}{dz}(e^z-1)})_{|z=z_k} = 1$$
för varje $k \in \mathbf{Z}$. Residusatsen ger nu att
$$\int_C \frac{e^z}{e^z-1}dz = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i \leftarrow SVAR$$

2. (4p) Bestäm konvergensradien för potensserien
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^{n^2}.$$
Lösning: Om $r \in [0, 1[$ följer att
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} r^{n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}.$$
Konvergensradien är alltså större än eller lika med 1. Antag nu att $r > 1$ och skriv
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} r^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2 \ln r - n}.$$
Denna serie är divergent eftersom allmänna termen
$$e^{n^2 \ln r - n} = e^{n^2(\ln r - \frac{1}{n})} \rightarrow \infty$$
då $n \rightarrow \infty$ (för en konvergent serie konvergerar allmänna termen mot noll i oändligheten). Den givna serien har därför konvergensradien 1. $SVAR$: 1.

3. (4p) Betrakta polynomet $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, där $a_0, \ldots, a_{n-1}$ är komplexa tal och låt C beteckna den positivt orienterade enhetscirkeln i komplexa talplanet. Beräkna integralen

$$\int_C \frac{z^{n-1}p(\bar{z})}{z-w}dz$$

då w är ett komplext tal som uppfyller $\mid w \mid > 1$.

Lösning: Det gäller att

$$\int_C \frac{z^{n-1}p(\bar{z})}{z-w}dz = \int_C \frac{z^{n-1}p(\frac{1}{z})}{z-w}dz = \int_C \frac{1 + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n}{z(z-w)}dz$$

$$= 2\pi i \text{Res}(\frac{1 + a_{n-1}z + \ldots + a_0 z^n}{z(z-w)}; 0) = -\frac{2\pi i}{w} \leftarrow SVAR$$

4. (4p) Bestäm alla hela funktioner $f(z)$ sådana att $f(0) = 1$ och

$$f(2z) = 2f(z)f'(z)$$

för alla komplexa tal z.

Lösning: Derivering ger

$$2^n f^{(n)}(z) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) f^{(n+1-k)}(z).$$

Sätts $z = 0$ erhålls med beteckningen

$$x_n = f^{(n)}(0), \ n \in \mathbf{N}$$

att

$$2^{n-1}x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k x_{n+1-k}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Vi ser från denna ekvation att sekvensen $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ är unik ty $x_0 = 1$. Om vi sätter $n = 0$ och utnyttjar att $x_0 = 1$ blir $x_1 = \frac{1}{2}$. Sätts $n = 1$ erhålls på liknande sätt att $x_2 = \frac{1}{4}$. Vi gissar nu att $x_n = 2^{-n}$. Eftersom

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 01-10-24, e, V
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0704-459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

---

1. (4p) Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $z^3 - 3z + 1 = 0$ innanför cirkeln $\mid z - 1 \mid = 1$?

2. (2p+2p) a) Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $i = T(2)$ och $\infty = T(3)$. b) Beräkna

$$\int_\gamma T^2(z)dz$$

då γ är den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie 4.

3. (1p+2p+1p) a) Visa att funktionen

$$u(x,y) = x\cosh x\cos y - y\sinh x\sin y$$

är harmonisk.

b) Bestäm en analytisk funktion $f(z)$ vars realdel är lika med $u(x,y)$ och som uppfyller $f(0) = 0$.

c) Beräkna $f''(i\frac{\pi}{2})$.

4. (4p) Antag a och b är positiva reella tal. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx.$$

5. (2p) Härled Fouriertransformen till funktionen e^{-t^2}.

6. (2p) Funktionen f är analytisk. Visa att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ och } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$.

7. (3p) Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

Matematik CTH: TMA252 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 01-10-24, e, V
Telefonvakt: Per Hörfelt, tel 0704-459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!

---

1. (4p) Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $z^3 - 3z + 1 = 0$ innanför cirkeln $| z - 1 |= 1$?

   Lösning: Sätt $z = w + 1$. Då är

$$z^3 - 3z + 1 = w^3 + 3w^2 + 3w + 1 - 3w - 3 + 1$$

$$= w^3 + 3w^2 - 1.$$

   Det gäller alltså att avgöra hur många nollställen, räknade med multiplicitet, som polynomet $w^3 + 3w^2 - 1 = 0$ har innanför cirkeln $| w |= 1$. På cirkeln $| w |= 1$ gäller att

$$| (w^3 + 3w^2 - 1) + (-3w^2) |\leq| w^3 - 1 |\leq 2 < 3 =| -3w^2 | .$$

   Rouchés sats medför nu att polynomen $w^3 + 3w^2 - 1$ och $-3w^2$ har lika många nollställen, räknade med multiplicitet, innanför cirkeln $| w |= 1$ dvs 2. $SVAR : 2$

2. (2p+2p) a) Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $i = T(2)$ och $\infty = T(3)$. b) Beräkna

$$\int_\gamma T^2(z)dz$$

   då γ är den positivt orienterade cirkeln med centrum 0 och radie 4.

   Lösning: a) Vi får att

$$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{i-\infty}{i-0} = \frac{z-1}{z-3}\frac{2-3}{2-1}$$

   dvs

$$w = T(z) = i\frac{1-z}{z-3} \leftarrow SVAR$$

b) Antag $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, där $f(z)$ är analytisk och $v(x,y)$ är en reellvärd funktion som uppfyller $v(0,0) = 0$. Beroende på Cauchy-Riemanns ekvationer gäller att

$$f'(x+iy) = u'_x - iu'_y$$

$$= \cosh x \cos y + x \sinh x \cos y - y \cosh x \sin y$$

$$-i(-x \cosh x \sin y - \sinh x \sin y - y \sinh x \cos y).$$

Genom att sätta $y = 0$ får vi att

$$f'(x) = \cosh x + x \sinh x.$$

Om två hela funktioner sammanfaller på realaxeln så är de lika överallt och det följer att

$$f'(z) = \cosh z + z \sinh z.$$

Alltså är

$$f(z) = z \cosh z + C.$$

Men $f(0) = 0$ ger $C = 0$ och vi får att $f(z) = z \cosh z \leftarrow SVAR$

c) Eftersom $f''(z) = 2\sinh z + z \cosh z$ är $f''(i\frac{\pi}{2}) = (i-(-i)) + \frac{i\pi}{4}(i-i) = 2i \leftarrow SVAR$

4. (4p) Antag a och b är positiva reella tal. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx.$$

Lösning: Det gäller att

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx.$$

Sätt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(a^2+z^2)(b^2+z^2)}.$$

Antag först att $a \neq b$. I övre halvplanet har funktionen $f(z)$ enkelpoler i punkterna $z_0 = ia$ och $z_1 = ib$. I övriga punkter i övre halvplanet är $f(z)$ analytisk och residuteorin medför att

$$I = 2\pi i(\text{Res}(f(z);\ z_0) + \text{Res}(f(z);\ z_1))$$

Matematik CTH: TMA251 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 01-01-11 f M
Telefonvakt: Petter Brändén, 0740 - 45 90 22.
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
OBS: Text på två sidor!

---

1. (3p) Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $2 = T(i)$ och $\infty = T(-1)$. Vilken kurva i z-planet avbildas på reella axeln i w-planet?

2. (3p) Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

i Laurentserie i området

a) $0 <| z |< 1$

b) $1 <| z |< 2$

c) $| z |> 2$.

3. (3p) Visa att

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2} \sin \omega x dx = e^{-\omega^2/2} \int_0^\omega e^{x^2/2} dx$$

för varje reellt tal ω. (Ledning: Antag först att $\omega, R > 0$ och beräkna kurvintegralen $\int_C e^{-z^2/2} dz$, där C är den positivt orienterade rektangeln med hörn i $0, R, R + i\omega$ och $i\omega$.)

4. (4p) Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $p(z) = z^4 + iz + i$ i området $\operatorname{Im} z > 0$? Visa också att varje sådant nollställe har multipliciteten ett.

5. (4p) Den reellvärda funktionen $u(x, y)$ är harmonisk och icke-negativ i en omgivning av enhetscirkelskivan $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$. Visa att

$$\frac{1-r}{1+r} u(0,0) \leq u(x,y) \leq \frac{1+r}{1-r} u(0,0) \text{ om } r < 1.$$

V. g. vänd!

6. (0.5p+0.5p) Antag

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

där $ad - bc \neq 0$. a) Beräkna $T'(z)$. b) Visa att funktionen $T(z)$ är omvändbart entydig.

7. (3p) Visa att ett polynom av graden n, där n är ett positivt heltal, har exakt n nollställen, räknade med multiplicitet.

8. (4p) Funktionerna $u(x,y)$ och $v(x,y)$ är reellvärda och u, v, $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$ och $\partial v/\partial y$ är kontinuerliga i en omgivning till punkten $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Vidare gäller att u och v uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i punkten (x_0, y_0). Visa att funktionen

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \; z = x + iy$$

är deriverbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$.

CB

LÖSNINGAR
TMA252 och TMA251 (gamla kursen) Komplex matematisk analys för F och Kf, 01-01-11

1. Bestäm den Möbiusavbildning $w = T(z)$ som uppfyller $0 = T(1)$, $2 = T(i)$ och $\infty = T(-1)$. Vilken kurva i z-planet avbildas på reella axeln i w-planet?

Lösning: Vi får att

$$\frac{w-0}{w-\infty}\frac{2-\infty}{2-0} = \frac{z-1}{z+1}\frac{i+1}{i-1}$$

dvs

$$\frac{w}{2} = \frac{z-1}{z+1}\frac{i+1}{i-1}.$$

Efter förenkling erhålls

$$w = 2i\frac{1-z}{1+z}.$$

Punkterna $1, i$ och -1 på cirkeln $\mid z \mid = 1$ avbildas alla på reella axeln i w-planet. Alltså avbildas cirkeln $\mid z \mid = 1$ på reella axeln i w-planet.

SVAR: $w = 2i\frac{1-z}{1+z}$; cirkeln $\mid z \mid = 1$.

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

i Laurentserie i området

a) $0 < \mid z \mid < 1$
b) $1 < \mid z \mid < 2$
c) $\mid z \mid > 2$.

Lösning: Partialbråksuppdelning ger

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+2}.$$

a) Om $0 < |z| < 1$ så är

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

och

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1} z^n$$

varför

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{-n-2}-1)z^n \leftarrow SVAR$$

b) Om $1 < |z| < 2$ så är

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}$$

och

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1} z^n.$$

Alltså är

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{-n-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-2} z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{-n-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-2} z^n \leftarrow SVAR$$

c) Om $|z| > 2$ så är

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}$$

och

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n z^{-n-1}$$

varför

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2^{n-1}-1)z^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2^{n-1}-1)z^{-n-1} \leftarrow SVAR$$

3. Visa att
$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\sin\omega x dx = e^{-\omega^2/2}\int_0^\omega e^{x^2/2}dx$$
för varje reellt tal ω. (Ledning: Antag först att $\omega, R > 0$ och beräkna kurvintegralen $\int_C e^{-z^2/2}dz$, där C är den positivt orienterade rektangeln med hörn i $0, R, R+i\omega$ och $i\omega$.)

Lösning: Antag först att $\omega, R > 0$. Vi har att
$$0 = \int_C e^{-z^2/2}dz$$
eftersom funktionen $e^{-z^2/2}$ är analytisk. Härav följer att
$$0 = \int_0^R e^{-x^2/2}dx + i\int_0^\omega e^{-(R+iy)^2/2}dy$$
$$-\int_0^R e^{-(x+i\omega)^2/2}dx - i\int_0^\omega e^{y^2/2}dy$$
$$= \int_0^R e^{-x^2/2}dx + i\int_0^\omega e^{-(R^2-y^2)/2}e^{-iRy}dy - \int_0^R e^{-(x^2-\omega^2)/2}e^{-i\omega x}dx - i\int_0^\omega e^{y^2/2}dy.$$
Här gäller att
$$\left|\int_0^\omega e^{-(R^2-y^2)/2}e^{-iRy}dy\right| \leq e^{-R^2/2}\int_0^\omega e^{y^2/2}dy \to 0$$
då $R \to \infty$ varför
$$0 = \int_0^\infty e^{-x^2/2}dx - \int_0^\infty e^{-(x^2-\omega^2)/2}e^{-i\omega x}dx - i\int_0^\omega e^{y^2/2}dy.$$
Imaginärdelen av högra ledet är därför lika med 0 dvs
$$0 = \int_0^\infty e^{-(x^2-\omega^2)/2}\sin\omega x dx - \int_0^\omega e^{y^2/2}dy$$
vilket är ekvivalent med påståendet för $\omega > 0$. Eftersom sinusfunktionen är udda följer nu för $\omega < 0$ att
$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\sin\omega x dx = -\int_0^\infty e^{-x^2/2}\sin(-\omega x)dx = -e^{-(-\omega)^2/2}\int_0^{-\omega} e^{y^2/2}dy$$

$$= e^{-\omega^2/2} \int_{-\omega}^{0} e^{y^2/2} dy = e^{-\omega^2/2} \int_{0}^{\omega} e^{y^2/2} dy.$$

Fallet $\omega = 0$ är trivialt.

4. Hur många nollställen, räknade med multiplicitet, har polynomet $p(z) = z^4 + iz + i$ i området $\operatorname{Im} z > 0$? Visa också att varje sådant nollställe har multipliciteten ett.

Lösning: Antag $\rho > 0$ och betrakta kurvan $\gamma_\rho = I_\rho + C_\rho$, där I_ρ är sträckan från $-\rho$ till ρ och C_ρ är halvcirkelbågen ρe^{it}, $-\pi \leq t \leq \pi$. Eftersom

$$p(z) = z^4(1 + \frac{i}{z^3} + \frac{i}{z^4})$$

följer att

$$\Delta_{C_\rho} \arg p(z) \approx 4\pi, \;\; \rho \text{ stort.}$$

Vidare gäller för varje $x \in I_\rho$ att

$$p(x) = u(x) + iv(x)$$

där $u(x) = x^4$ och $v(x) = x + 1$. Speciellt följer att

$$u(x) \geq 0 \text{ och } p(x) \neq 0$$

samt

$$\frac{v(x)}{u(x)} \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

Alltså är

$$\Delta_{I_\rho} \arg p(x) \approx 0 \text{ då } \rho \text{ stort.}$$

Eftersom

$$\Delta_{\gamma_\rho} \arg p(z) \approx 4\pi, \;\; \rho \text{ stort,}$$

så ger argumentprincipen att $p(z)$ har två nollställen, räknade med multiplicitet, i området $\operatorname{Im} z > 0$. Om dessa nollställen sammanfaller och vi får ett nollställe av multipliciteten två så följer att polynomet $p'(z) = 4z^3 + i$ har samma nollställe. Om $z^4 + iz + i = 0$ och $4z^3 + i = 0$ så är $z^4 + (-4z^3)z + i = 0$

dvs $z^4 = i/3$ och det följer att $|\ z\ | = 3^{-1/4}$. Men $4z^3 + i = 0$ ger att $|\ z\ | = 4^{-1/3}$ och vi har fått en motsägelse. Nollställena i $\operatorname{Im} w > 0$ är enkla.

5. Beräkna integralen
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{(3\cos t + 5)^2} dt.$$

Lösning: Vi har att
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{(3\cos t + 5)^2} dt = \operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{(3\cos t + 5)^2} dt\right)$$

Låt C vara enhetscirkeln $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Det följer att
$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{(3\cos t + 5)^2} dt = \int_C \frac{z^2}{(3(z + 1/z)/2 + 5)^2} \frac{dz}{iz}$$
$$= \frac{4}{i} \int_C \frac{z^3 dz}{(3z + 1)^2 (z + 3)^2}.$$

Integranden
$$f(z) = \frac{z^3}{(3z + 1)^2 (z + 3)^2}$$
har inga poler på C och endast en pol innanför C, nämligen i punkten $-1/3$. Sätt $w = z + 1/3$. Då är
$$f(z) = \frac{(w - 1/3)^3}{9w^2 (w + 8/3)^2}$$
$$= \frac{(-1/3)^3 (1 - 3w)^3 (1 + (3/8)w)^{-2}}{9w^2 (8/3)^2}$$
$$= \frac{-1}{27 \cdot 64 w^2} (1 - 9w + \ldots)(1 - \frac{3w}{4} + \ldots)$$
och därmed
$$\operatorname{Res}(f(z); -1/3) = \frac{-1}{27 \cdot 64}(-9 - \frac{3}{4}) = \frac{13}{36 \cdot 64}.$$

Alltså är

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2it}}{(3\cos t+5)^2}dt = 2\pi i \frac{4}{i}\frac{13}{36\cdot 64} = \frac{13}{288}\pi.$$

SVAR: $\frac{13}{288}\pi$

5. (gamla kursen) Den reellvärda funktionen $u(x,y)$ är harmonisk och icke-negativ i en omgivning av enhetscirkelskivan $r=\sqrt{x^2+y^2}\le 1$. Visa att

$$\frac{1-r}{1+r}u(0,0) \le u(x,y) \le \frac{1+r}{1-r}u(0,0) \text{ om } r<1.$$

Lösning: Sätt $u(x,y)=u(re^{i\theta})$ om $x+iy=re^{i\theta}$. Poissons integralformel ger för $r<1$ att

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}u(e^{it})dt.$$

För $r=0$ får vi

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt.$$

Härav följer för $r<1$ att

$$u(x,y) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r+r^2}u(e^{it})dt = \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt =$$

$$= \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt = \frac{1+r}{1-r}u(0,0)$$

och

$$u(x,y) \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+2r+r^2}u(e^{it})dt = \frac{1-r}{1+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt =$$

$$= \frac{1-r}{1+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})dt = \frac{1-r}{1+r}u(0,0)$$

vilket visar olikheterna i problemet.

Matematik CTH: TMA251 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag, tid, sal : 10 jan 00 f vv
Telefon: Henrik Olsson, 0740459022
Hjälpmedel: Formelblad.
Inlämning skall ske i uppgifternas ordning; v.g. sidnumrera!
OBS: Text på två sidor!

---

1. (7p) Laurentutveckla funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

i området $1 <|z|< 3$.

2. (7p) Lös ekvationen

$$\begin{cases} f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 1 \\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

3. (7p) Antag $x, y \in \mathbf{R}$ och $y \geq 0$. Visa att

$$|\cos(x+iy)| \leq e^y$$

och

$$|\sin(x+iy)| \leq e^y.$$

4. (7p) Avgör hur många nollställen, räknade med multiplicitet, som polynomet $z^5 - 2z^2 + 2z - 6i$ har i området $1 <|z|< 2$.

5. (7p) Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos x}{1+x^4} dx.$$

6. (3p+4p) a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ som avbildar reella axeln på reella axeln och imaginära axeln på cirkeln $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

   b) Bestäm alla sådana avbildningar.

   (Reella axeln skall uppfattas som $\{x;\ x \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$ och imaginära axeln som $\{iy;\ y \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$.)

7. (5p+6p) a) Definiera e^z då z är ett komplext tal och bevisa att

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

b) Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

8. (7p) Funktionen $g(s)$ är analytisk i hela s-planet utom i ändligt många singulära punkter $s_1, ..., s_n$ och $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$. Visa att funktionen

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left[g(s)e^{st}, s_k\right]$$

har Laplacetransformen $g(s)$.

/CB

LÖSNINGAR
Matematik CTH: TMA251 Komplex matematisk analys för F och Kf
Dag: 10 jan 00 f vv

1. Laurentutveckla funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

i området $1 < | z | < 3$.

Lösning: Partialbråksuppdelning ger

$$f(z) = \frac{\frac{3}{2}}{z-3} - \frac{\frac{1}{2}}{z-1}$$

och vi får

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Här är

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} z^k \text{ om } | z | < 3$$

och

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \text{ om } | z | > 1.$$

Alltså gäller att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2}\frac{1}{3^k}) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2}) \frac{1}{z^{k+1}}$$

i området $1 < | z | < 3$. Alternativt kan vi skriva

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-\frac{1}{2}) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2}\frac{1}{3^k}) z^k \text{ om } 1 < | z | < 3 \leftarrow SVAR$$

2. Lös ekvationen

$$\begin{cases} f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 1 \\ f(0) = 0,\ f(1) = 1\ ,\ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Lösning: Låt $F(z)$ beteckna z-transformen av $f(nT)$ där $T = 1$. Vi får med hjälp av z-transformering att

$$z^2F(z) - z - 5zF(z) + 6F(z) = \frac{z}{z-1}$$

dvs

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Partialbråksuppdelning ger nu att

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{2}{z-2} + \frac{\frac{3}{2}}{z-3}.$$

Alltså är

$$F(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-2} + \frac{3}{2}\frac{z}{z-3}$$

och tabellen för z-transformen visar att

$$f(n) = \frac{1}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^{n+1}}{2}, \ n \in \mathbf{N} \leftarrow SVAR$$

3. Antag $x, y \in \mathbf{R}$ och $y \geq 0$. Visa att

$$|\cos(x+iy)| \leq e^y$$

och

$$|\sin(x+iy)| \leq e^y.$$

Lösning: Vi har att

$$\cos(x+iy) = \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) =$$

$$\frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y)}) = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y})$$

och triangelolikheten ger

$$|\cos(x+iy)| \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) \leq e^y$$

eftersom $y \geq 0$. Detta visar den första olikheten i uppgiften. För att visa den andra olikheten utnyttjas att

$$\sin(x+iy) = \cos(\frac{\pi}{2} - x - iy)$$

och den olikhet vi redan visat ger att

$$| \sin(x + iy) | \leq | \cos(\frac{\pi}{2} - x - iy) | =$$

$$| \cos(-\frac{\pi}{2} + x + iy) | \leq e^y.$$

4. Avgör hur många nollställen, räknade med multiplicitet, som polynomet $z^5 - 2z^2 + 2z - 6i$ har i området $1 <| z |< 2$.

Lösning: Sätt $g(z) = z^5 - 2z^2 + 2z - 6i$. På cirkeln $| z |= 1$ gäller att $| 6i + g(z) | \leq | z |^5 + 2 | z |^2 + 2 | z |= 5 < 6$. Polynomet $g(z)$ saknar därför nollställen på cirkeln $| z |= 1$. Om $f(z) = 6i$ så gäller också enligt Rouchés sats att $g(z)$ och $f(z)$ har samma antal nollställen innanför cirkeln $| z |= 1$. Polynomet $g(z)$ saknar således nollställen i området $| z | \leq 1$. På cirkeln $| z |= 2$ gäller att $| -z^5 + g(z) | \leq 2 | z |^2 + 2 | z | + 6 = 18 < 2^5$. Om $f(z) = -z^5$ så följer beroende på Rouchés sats att $g(z)$ och $f(z)$ har samma antal nollställen innanför cirkeln $| z |= 2$ dvs 5 stycken.

SVAR: 5 stycken.

5. Beräkna integralen

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos x}{1 + x^4} dx.$$

Lösning: Sätt

$$f(z) = \frac{z^2 e^{iz}}{1 + z^4}.$$

Funktionen $f(z)$ har enkelpoler i punkterna

$$z = z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4})}, \ k = 0, 1, 2, 4.$$

Av dessa ligger

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ och } z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

i övre halvplanet.

Antag $r > 1$ och låt C_r vara den orienterade halvcirkeln

$$z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

och låt J_r vara sträckan från $-r$ till r. Residusatsen medför att

$$\int_{C_r \cup J_r} f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}\,[f(z), z_0] + \text{Res}\,[f(z), z_1]) =$$

$$2\pi i(\frac{z^2 e^{iz}}{4z^3} \mid_{z=z_0} + \frac{z^2 e^{iz}}{4z^3} \mid_{z=z_1}) = \frac{\pi i}{2}(\frac{e^{iz_0}}{z_0} + \frac{e^{iz_1}}{z_1}) =$$

$$\frac{\pi i}{2}(\bar{z}_0 e^{iz_0} + \bar{z}_1 e^{iz_1}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Vidare är

$$\mid \int_{C_r} f(z)dz \mid \leq \frac{r^2}{r^4 - 1} \pi r \to 0 \text{ då } r \to \infty.$$

Härav följer att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{1}{\sqrt{2}})$$

och vi drar slutsatsen att

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}(\cos \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \frac{1}{\sqrt{2}}) \leftarrow \text{SVAR}$$

6. a) Bestäm en Möbiusavbildning $w = T(z)$ som avbildar reella axeln på reella axeln och imaginära axeln på cirkeln $\mid w - \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}$. b) Bestäm alla sådana avbildningar. (Reella axeln skall uppfattas som $\{x;\ x \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$ och imaginära axeln som $\{iy;\ y \in \mathbf{R}\} \cup \{\infty\}$.)

Lösning: a) Antag $T(0) = 0$ och $T(\infty) = 1$. Välj $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0, 1$, och bestäm Möbiusavbildningen T så att $T(1) = r$. Detta medför att reella axeln avbildas på reella axeln ty en Möbiusavbildning avbildar en linje på en linje eller en cirkel. Den imaginära axeln avbildas på en linje eller cirkel som går genom origo och punkten ett och som dessutom skär reella axeln ortogonalt i origo eftersom en Möbiusavbildning är konform. Detta medför att T avbildar imaginära axeln på cirkeln $\mid w - \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}$. Vi får nu

$$\frac{w - 0}{w - 1} \frac{r - 1}{r - 0} = \frac{z - 0}{z - \infty} \frac{1 - \infty}{1 - 0}$$

dvs

$$\frac{w-0}{w-1}\frac{r-1}{r-0} = \frac{z-0}{1}\frac{1}{1-0}.$$

Efter förenkling erhålls

$$w = \frac{rz}{rz-r+1}.$$

Om vi t ex sätter $r = 2$ erhålls

$$w = T(z) = \frac{2z}{2z-1}.$$

b) Antingen gäller att $T(0) = 0$ eller $T(0) = 1$ ty punkten $T(0)$ ligger både på reella axeln och på cirkeln $\mid w - \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}$. Antag först $T(0) = 0$. Punkten $T(\infty)$ ligger både på cirkeln $\mid w - \frac{1}{2} \mid = \frac{1}{2}$ och på reella axeln. Alltså är $T(\infty) = 1$. Enligt del a) har Möbiusavbildningen formen

$$w = T(z) = \frac{rz}{rz-r+1}$$

för ett lämpligt $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0, 1$.

Antag nu $T(0) = 1$. Som ovan följer att $T(\infty) = 0$. Välj nu $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0, 1$, och bestäm Möbiusavbildningen T så att $T(1) = r$. Vi får

$$\frac{w-1}{w-0}\frac{r-0}{r-1} = \frac{z-0}{z-\infty}\frac{1-\infty}{1-0}$$

dvs

$$\frac{w-1}{w-0}\frac{r-0}{r-1} = \frac{z-0}{1}\frac{1}{1-0}.$$

Efter någon förenkling fås

$$w = T(z) = \frac{r}{(1-r)z+r}.$$

SVAR:

$$w = T(z) = \frac{rz}{rz-r+1}$$

eller

$$w = T(z) = \frac{r}{(1-r)z+r}.$$

där $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0, 1$.