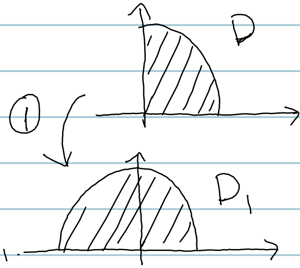
Föreläsning 16/10-13

forts. gårdagens tentauppg.

$D = \{z;\ |z|<1,\ x>0,\ y>0\}$

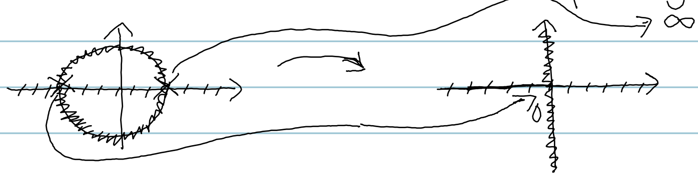


Avbilda konformt på ÖHP.

Låt $D_1 = \{w;\ |w|<1,\ \operatorname{Im} w>0\}$

$w = f(z) = z^2$ avbildar D på D_1.

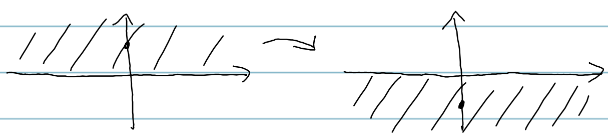
② Låt $T(z)$ vara en möbius so. , avbildar $\{|z|=1\}$ på Im-axeln och Re-axeln på sig själv.



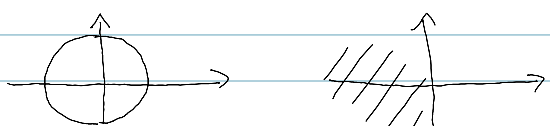
Då avbildar T D_1 på en av kvadranterna. Tag

$$T(w) = \frac{w+1}{w-1}$$

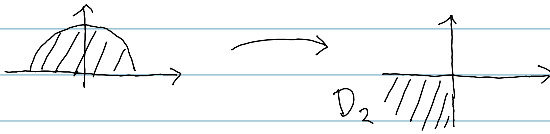
$$T(i) = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)^2}{-1-1} = -i,$$ $\therefore$ T avbildar ÖHP på UHP.



Dessutom $T(0) = -1$, $\therefore$ T avbildar enhetsskivan på VHP.



∴ T avbildar D_1 på NHP $\cap$ VHP



③ $g: D_2 \to$ ÖHP om $g(z) = z^2$

④ $h = g \circ T \circ f : D \to$ ÖHP.

$$\Longrightarrow h(z) = \left(\frac{z^2+1}{z^2-1} \right)^2$$

Januari 2013/1

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixa}}{x^2+2x+2} \, dx = ?$$

dvs vad är $\hat{u}(a)$ om $u(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

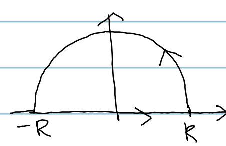
(Genväg: $u(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2+1} = v(x+1)$

där $v(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, vet att $\hat{v}(a) = \pi e^{-|a|}$

∴ $\hat{u}(a) = e^{ia} \hat{v} = \pi e^{-|a|+ia}$)

Utan genväg:

sätt $f(z) = \dfrac{e^{-iaz}}{z^2+2z+2}$ $\qquad \Gamma_R$:



$$I_R = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \text{inre}(\Gamma_R)} \text{Res}_{z_i}$$

Singulära punkter:

$z^2+2z+2=0$

$z=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm i$

inuti $\Gamma_R = -1+i$ om $R>>0$

$\therefore I_R = 2\pi i \dfrac{e^{-ia(-1+i)}}{2(-1+i)+2} = \dfrac{\cancel{2}\pi \cancel{i}\, e^{ia+a}}{\cancel{2}\cancel{i}} = \pi e^{ia+a}$

$$\int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R}$$

$$\left|\int_{C_R} f\,dz\right| \le \pi\cdot R\cdot \max f \le \pi R \frac{|e^{-iaz}|}{R^2-2R-2} \le$$

$$\le \{e^{-iaz} = \{z=x+iy\} = e^{-iax}e^{ay}\} \le$$

$$\le \frac{\pi R}{R^2-2R-2}e^{ay} \le \frac{\pi R}{R^2-2R-2} \longrightarrow 0 \quad \text{om } a\le 0$$

$$\therefore \hat{u}(a) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz =$$

$= \pi e^{ia+a}$ om $a\le 0$

$= \pi e^{ia-|a|}$

För $a>0$:

$$\hat{u}(a) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{+ixa}}{x^2+2x+2}}\,dx = \overline{\underset{-a<0}{\hat{u}(-a)}} = \overline{\pi e^{-ia + (-a)}} =$$

$=\pi e^{ia-a} = \pi e^{ia-|a|}$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Re}\hat{u}(a) = \pi e^{-|a|}\cos a$$

Januari 2013 / 2

$P(z) = z^4 + z^3 + 1$

Visa att P har alla sina nollst. i ringen $\{z;\ 3/4 < |z| < 3/2\}$

① Beräkna med Rouché antalet nollst. i $\{z; |z| < 3/2\}$

Dela P i en dominerande term f, och en rest h. Försök med $f(z) = z^4$ och $h(z) = z^3 + 1$

På $|z| = 3/2$: $|f(z)| = (3/2)^4 = 81/16$

$|h(z)| \le |z|^3 + 1 = 27/8 + 8/8 = 35/8 = 70/16 < |f|$

$\therefore |f| > |h|$

$\therefore$ f och $f+h = P$ har lika många nollst. i $\{|z| < 3/2\}$, dvs 4 st.

② Beräkna # nollst. i $|z| < 3/4$ m. Rouché

Tag $f(z) = 1$, $h(z) = z^4 + z^3$

$|f| = 1$, $|h| = \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 < 1 = |f|$

$\therefore$ Rouché $\Rightarrow$ f och $p = f+h$ har lika många nollst. i $\{|z| < 3/4\}$, dvs 0.

③ P har fyra nollst. i $\{z;\ 3/4 < |z| < 3/2\}$, alltså alla nollst. ligger där.

Januari 2013 / 3

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8}\, dz = ?$$

$= 2\pi i \,\mathrm{Res}_0$ (holo i alla pkter utom i nollan)

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + z^9(\ldots)$

(har utvecklat kring $z_0 = 0$)

forts. →

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + z^9(\dots)$$

$$\sin z - \sinh z = -2\left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^7}{7!} + z^9(\dots)\right)$$

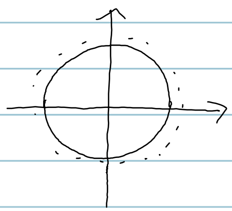
$$\frac{\sin z - \sinh z}{z^8} = -2\left(\frac{z^{-5}}{3!} + \frac{z^{-1}}{7!} + \text{holo}\right) = f$$

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{-2}{7!}$$

$$\therefore \int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Res}_0 = -\frac{4\pi i}{7!}$$

Januari 2013/8

$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ är holo i $\{|z|<r\}$, $r>1$



$|f| \leq 1$. Då $|a_j| \leq 1$.

Använd:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{j+1}}\,dz$$ enligt Residysatsen, eller formel i boken.

$$\frac{f(z)}{z^{j+1}} = \frac{a_0}{z^{j+1}} + \frac{a_1}{z^j} + \dots + \frac{a_j}{z} + a_{j+1} + \dots$$

$$\therefore \text{Res}\left(\frac{f}{z^{j+1}}, 0\right) = a_j$$

$$\therefore |a_j| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \max_{|z|=1} \frac{|f|}{|z|^{j+1}} = 1$$ ∎

Augusti 2013/5

a) Låt $M(z) = \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ där $|a|<1$

Visa att $M : \Delta \circlearrowleft$ där $\Delta = \{z;\ |z|<1\}$

b) antag att $f(z)$ holo i Δ, $|f| \le 1$ och $f(b) = 0$

Då $|f(z)| \le \left|\dfrac{z-b}{1-\bar{b}z}\right|$ (dvs $|f(z)| \le |z|$ om $b=0$)

lösning av a)

Tag 3 pkter på $|z|=1$. $(1, -1, i)$

Vill visa $|M(1)|, |M(-1)|, |M(i)| = 1$

$$|M(1)| = \left|\frac{1+a}{1+\bar{a}}\right| = \frac{|1+a|}{|\overline{1+a}|} = 1$$

$$|M(-1)| = \left|\frac{-1+a}{1-\bar{a}}\right| = 1$$

$$|M(i)| = \left|\frac{i+a}{1+i\bar{a}}\right| = \left|\frac{i+a}{i(-i+\bar{a})}\right| = \frac{1}{|i|}\left|\frac{i+a}{\overline{i+a}}\right| = 1$$

$\therefore$ M: enhetscirkeln $\circlearrowleft$

$\therefore$ M avbildar Δ på Δ eller på $\{|z|>1\}$.

$|M(0)| = |a| < 1$, $\therefore M : \Delta \circlearrowleft$.

lösning av b)

antag $f(a) = 0$

Låt $g(z) = f(M(z))$

Då $g(0) = f(M(0)) = f(a) = 0$ och $|g| \le 1$

Schwartz $\Rightarrow |g(z)| \le |z|$, $|z|<1$

Sätt $z = M^{-1}(w)$

$|g \circ M^{-1}(w)| \le |M^{-1}(w)|$, $\therefore |f(w)| \le |M^{-1}(w)|$

Then $M^{-1}(w) = \dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}$

$\because |f(w)| \leq \left| \dfrac{w-a}{1-\bar{a}w} \right|$

$\blacksquare$