Allmännare:

$\mathcal{L}(u^{(k)})(s) = s^k \hat{u}(s) - (s^{k-1}u(0) + s^{k-2}u'(0) + \ldots + u^{(k-1)}(0))$

Storgruppsövning 9/10-13

3.3 Möbiusavbildningar

$\left(\begin{array}{l} D_T = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ V_T = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \end{array} \right)$

Definition

En rationell fkn av formen

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ där $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ och $ad-bc \neq 0$

kallas för en Möbiusavbildning (M.a).

Några viktiga egenskaper:

(i) $ad-bc \neq 0 \Rightarrow T$ injektiv $\Rightarrow T^{-1}$ existerar.

Kan visa att $T^{-1}(w) = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$

(ii) Låt $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Riemannsfären

Varje M.a är en bijektiv avb. från $\hat{\mathbb{C}}$ till $\hat{\mathbb{C}}$

(iii) Om S och T är M.a, så är $S \circ T$ M.a

(iv) Låt "cirkel" = cirkel eller $\{$rät linje$\} \cup \{\infty\}$

(dvs "cirkel" = cirkel på $\hat{\mathbb{C}}$).

Om T M.a så avbildar T "cirklar" på "cirklar"

3.3.4 a) Finn en M.a P som avbildar $(1, i, -1)$ på $(-1, i, 1)$

lösn: Idé: Hitta
$$1 \xrightarrow{T} 0 \qquad \text{och} \qquad -1 \xrightarrow{S} 0$$
$$i \xrightarrow{T} 1 \qquad\qquad\qquad i \xrightarrow{S} 1$$
$$-1 \xrightarrow{T} \infty \qquad\qquad\qquad 1 \xrightarrow{S} \infty$$

Då är $P = S^{-1} \circ T$

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{i+1}{i-1} \quad , \quad S(z) = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{i-1}{i+1} = \frac{z+1}{z-1} \cdot i =$$
$$= \frac{iz+i}{z+(-1)}$$

$$\Rightarrow S^{-1}(z) = \frac{z+i}{z-i} \quad , \quad T(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$$

$$P(z) = S^{-1} \circ T(z) = \frac{\frac{-iz+i}{z+1} + i(z+1)}{\frac{-iz+i}{z+1} - i(z+1)} =$$

$$= \frac{-\cancel{iz}+i+\cancel{iz}+i}{-iz+\cancel{i}-iz-\cancel{i}} = \frac{2i}{-2iz} = -\frac{1}{z} \qquad \text{OK!}$$

b) Finn en M.a P som avbildar $(\infty, -1, i)$ på $(1, 0, 1-i)$

lösn: Vill hitta
$$\infty \xrightarrow{T} 0 \qquad \text{och} \qquad 1 \xrightarrow{S} 0$$
$$-1 \rightarrow 1 \qquad\qquad\qquad 0 \rightarrow 1$$
$$i \rightarrow \infty \qquad\qquad\qquad 1-i \rightarrow \infty$$

"som vanligt"

$$T(z) = \frac{-1-i}{z-i} \quad , \quad S(z) = \frac{z-1}{z-(1-i)} \cdot \frac{(1-i)}{1} = \text{[redacted]} \ldots =$$
$$= \frac{2z-2}{(1+i)z-2}$$

forts. →

$$\Longrightarrow S^{-1}(z) = \frac{2z-2}{(1+i)z-2}$$

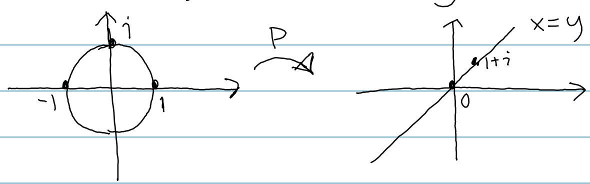
$$P(z) = S^{-1} \circ T(z) = \ldots = \frac{z+1}{z}$$

3.3.5

a) Finn en M.a P som avbildar cirkeln $|z|=1$ på den räta linjen $\mathrm{Re}((1+i)w) = 0$.

Lösn: $w = x+iy \Longrightarrow (1+i)w = (1+i)(x+iy) =$
$= (x-y) + i(x+y)$.

$\mathrm{Re}((1+i)w) = 0 \Longleftrightarrow x = y$



$z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ $\quad w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1+i$

Följer av egenskap (iv) att det räcker att hitta en M.a som avbildar z_1, z_2, z_3 på w_1, w_2, w_3.

Vill hitta: $1 \xrightarrow{T} 0$ och $0 \xrightarrow{S} 0$
$i \rightarrow 1 \qquad \infty \rightarrow 1$
$-1 \rightarrow \infty \qquad 1+i \rightarrow \infty$

$$\Longrightarrow P = S^{-1} \circ T$$

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{i+1}{i-1} = \frac{z-1}{iz+i}$$

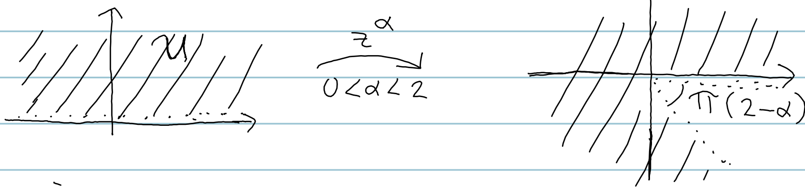
$$S(z) = \frac{z}{z-(1+i)} \Longrightarrow S^{-1}(z) = \frac{(1+i)z}{z-1}$$

$$\Longrightarrow P(z) = S^{-1}(T(z)) = \ldots = \frac{-z+1}{iz+1} \quad \text{OK!}$$

3.4–3.5 Konforma avbildningar

3.4.1.2

Påstående:



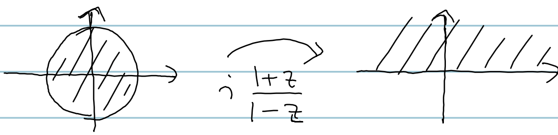
Bevis

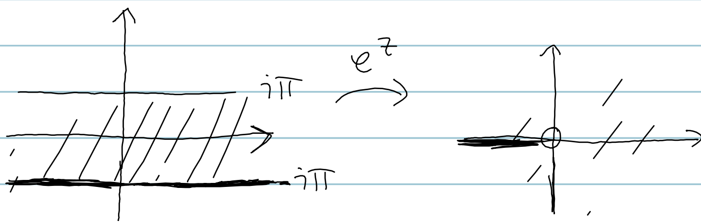
$z \in \mathcal{U} = \{\mathrm{Im}\, z > 0\} \iff z = re^{i\theta}, \quad 0<r<\infty, \quad 0<\theta<\pi$

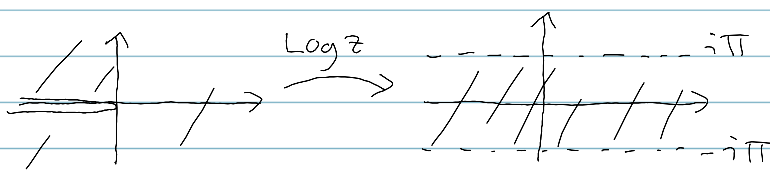
$\Rightarrow z^{\alpha} = r^{\alpha} e^{i\alpha\theta} = Re^{i\phi}, \quad 0<R<\infty, \quad 0<\phi<\alpha\pi$

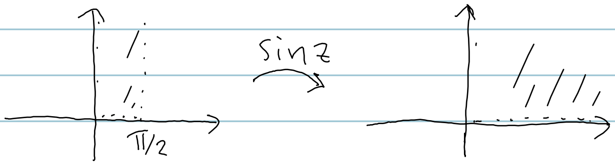
Sökt vinkel: $2\pi - \alpha\pi = \pi(2-\alpha)$ ∎

Andra konforma avbildningar som är bra att känna till:





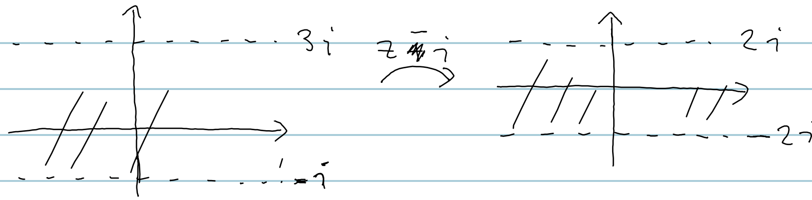


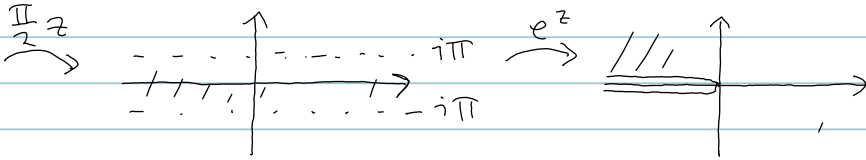


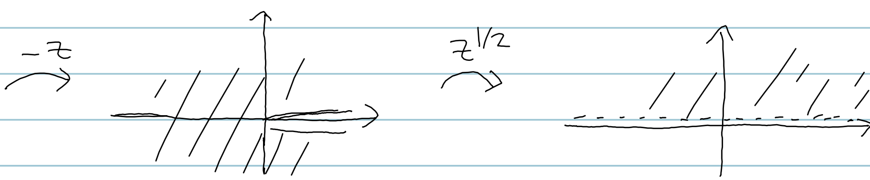
3.5.3

Avbilda $D = \{ z = x + iy \,;\, |y-1| < 2 \}$ konformt på $\mathcal{U}$.

Lösn:





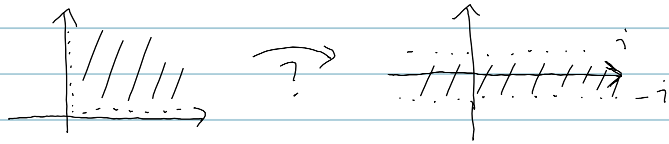


$$\therefore \left(-\exp\left(\frac{\pi}{2}(z-i)\right)\right)^{1/2} = i\, e^{\pi/4(z-i)} = i e^{\pi z/4} \cdot e^{-i\pi/4}$$

3.5.9

Avbilda 1:a kvadranten konformt på $\{w \in \mathbb{C} \,;\, |\operatorname{Im} w| < 1\}$.

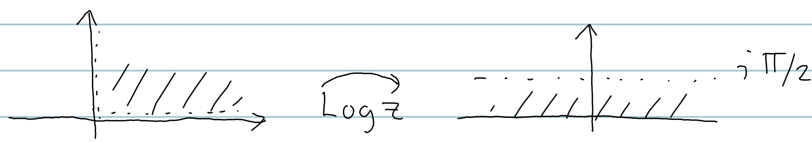
Lösn:

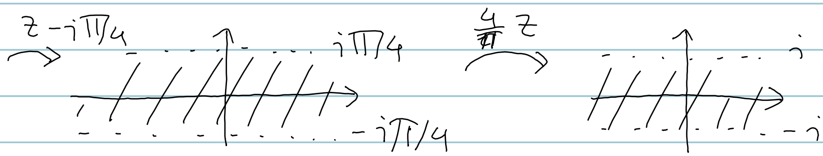


$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad , \; -\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$$

$$z \in Q_1 \implies -\infty < \ln|z| < \infty$$

$$z \in Q_1 \implies 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2$$

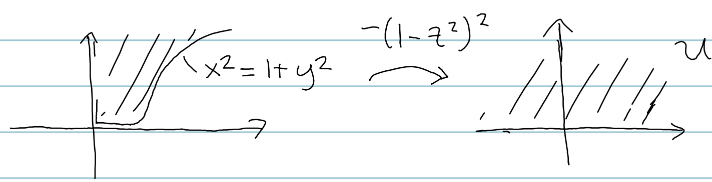




$$\therefore \; \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{Log}(z) - i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\operatorname{Log} z - i$$

3.4.15

Påstående:

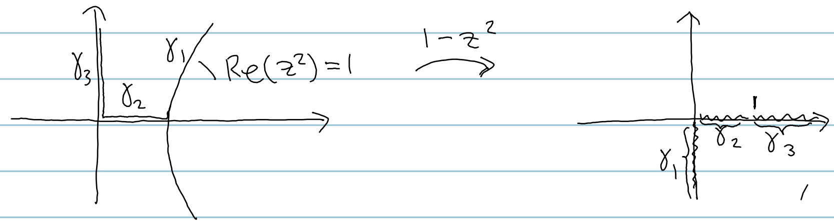


Bevis:

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$x^2 = 1 + y^2 \iff \operatorname{Re}(z^2) = 1$$

forts. →



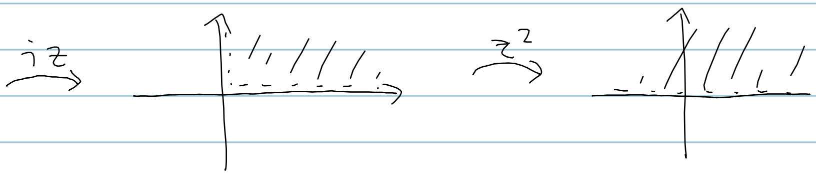
$\underline{\gamma_1}$: $1-z^2 = \underbrace{1-Re(z^2)}_{=0} - i\,Im(z^2) = -i2xy$

$\underline{\gamma_2}$: $z = x$, $0 \le x \le 1$

$1 - z^2 = 1 - x^2$

$\underline{\gamma_3}$: $z = iy$, $0 \le y \le \infty \Longrightarrow 1 - z^2 = 1 + y^2$

$Im(1-z^2) = -2xy < 0$ ~~om~~ om $x, y > 0 \Longrightarrow$ hamnar i Q_4.



$\therefore$ $(i(1-z^2))^2 = -(1-z^2)^2$ ▨