Föreläsning 4/10-13

Möbiusavbildningar

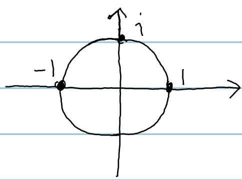
$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$

1) T avbildar en "cirkel eller linje" på "cirkel eller linje".

2) T är bestämd av $T(z_1), T(z_2), T(z_3)$ om z_j distinkta.

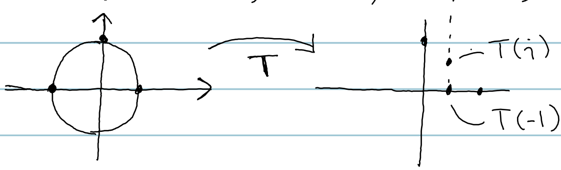
ex Vad är bilden av $\mathcal{C} = \{z ; |z|=1\}$ under $T(z) = \dfrac{1}{1-z}$?

lösn:



Välj z_j på $\mathcal{C}$
$-1, i, 1$.

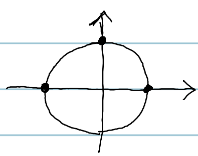
$T(1) = \infty$, $T(-1) = 1/2$, $T(i) = (1+i)/2$



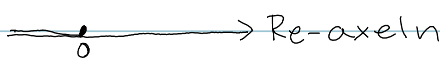
$T(\mathcal{C}) \ni \infty$ $\therefore$ $T(\mathcal{C})$ är en linje.

ex Bestäm en T som avbildar $\mathcal{C}$ på Re-axeln.

lösn:



Välj 3 punkter på $\mathcal{C}$.



$T(-1) = 0$

$T(1) = \infty$

$T(i)$ reellt

forts.

$T(z) = \frac{z+1}{z-1} k$

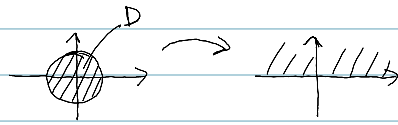
$T(-1) = 0$, $T(1) = \infty$

$T(i) = -\frac{1+i}{1-i} k = -\frac{(1+i)^2}{2} k = -ik \in \mathbb{R}$

Tag t.ex $k = i$

$\Rightarrow T(z) = i \frac{z+i}{z-1}$

ex Hitta en T:



enhetsskivan $\to$ övre halvplanet

lösn: Hitta först T: $\mathcal{C} \to$ Re-axeln

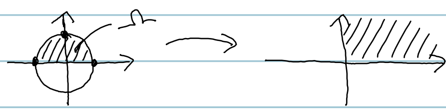
Det gjordes i förra exemplet: $T(z) = i \frac{z+1}{z-1}$

$\therefore$ $D \to$ ÖHP el. NHP.

$T(0) = -i \Rightarrow T(D) = $ NHP

Sätt $S = -T = -i \frac{z+1}{z-1}$

ex Hitta T:



lösn:

Ω begränsas av enhetscirkeln och Re-axeln.

Pkterna -1 och $1 \in$ cirkeln $\cap$ Re-axeln

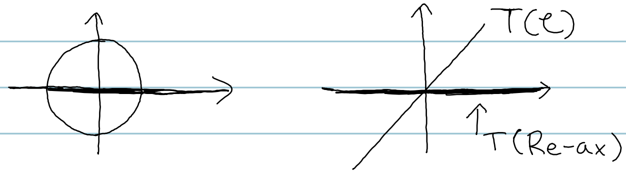
Välj T; $T(-1) = 0$ och $T(1) = \infty$

Då: enhetscirkeln $\to$ linje genom origo.

och Re-axeln $\to$ linje genom origo.

$T = \frac{z+1}{z-1}$ $T(x)$ reellt $\Rightarrow T(\text{Re-ax.}) = \text{Re-ax.}$

forts. $\to$



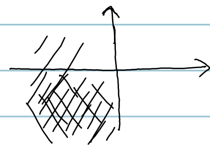
$T(i) = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(1+i)^2}{2} = -i$

$\therefore$ $T(\ell)$ = Im-axeln.

$T(\Omega)$ begränsat av Im-axeln och Re-axeln.

$T(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$

$\therefore$ T(enhetsskivan) =



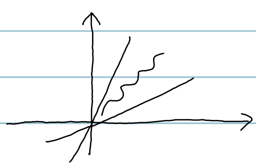
$T(i) = -i$

$T(\text{ÖHP}) = \text{UHP}$

$\therefore$ $T(\Omega)$ = 3:dje kvadr.

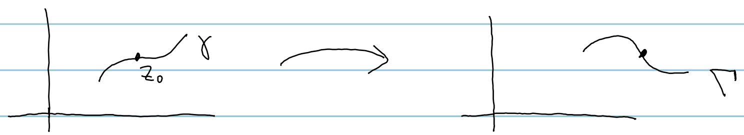
$\Rightarrow T = -\frac{1+z}{z-1}$

Konform avbildning



Låt $f(z)$ holo nära z_0,
$f'(z_0) \neq 0$.

Låt $\gamma(t)$ kurva $\gamma(0) = z_0$ $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$



forts $\longrightarrow$

Riktningen av γ i $z_0 = \arg(\dot\gamma(0))$

Riktningen av Γ = $\arg \dot\Gamma(0) = \arg f'(z_0)\dot\gamma(0) =$

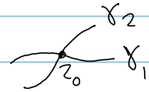
$= \arg \dot\gamma(0) + \theta$, $\theta = \arg f'(z_0)$

Betrakta nu γ_1 och γ_2

$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$

$\Gamma_1 = f(\gamma_1)$

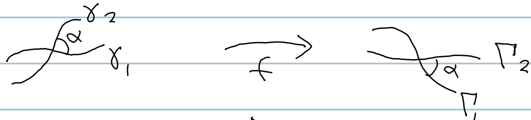
$\Gamma_2 = f(\gamma_2)$



$\arg \dot\Gamma_1(0) = \arg \dot\gamma_1(0) + \theta$

$\arg \dot\Gamma_2(0) = \arg \dot\gamma_2(0) + \theta$

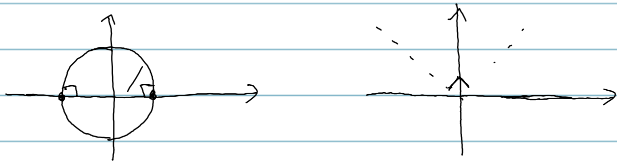
$\arg \dot\Gamma_1(0) - \arg \dot\Gamma_2(0) = \arg \dot\gamma_1(0) - \arg \dot\gamma_2(0)$



∴ Vinkeln bevaras!

∴ Om f är holomorf och $f' \neq 0$ så bevarar f vinklar. Sådana avbildningar kallas för konforma.

ex



Exempel på användbara konforma avbildningar:

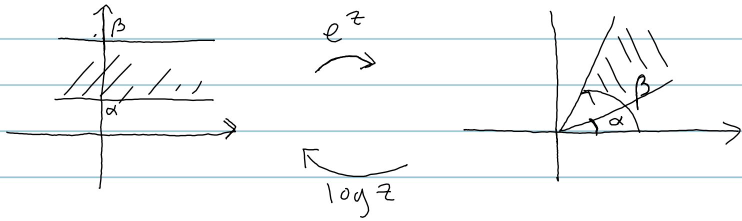
(1) Möbius

(2) $f(z) = e^z$, $f' = e^z \neq 0$, konform.

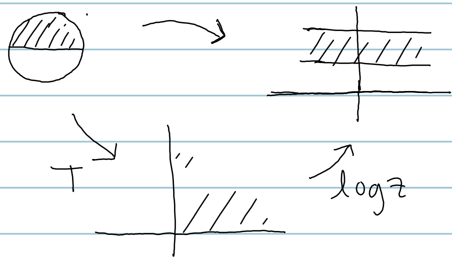
$\{z;\ \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\} \xrightarrow{e^z} \{w;\ \alpha < \arg w < \beta\}$

$e^z = e^x e^{iy}$

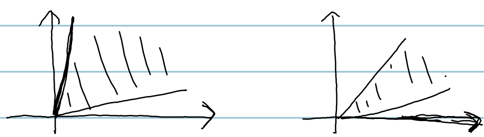
forts. →



ex



ex $f(z) = z^p$

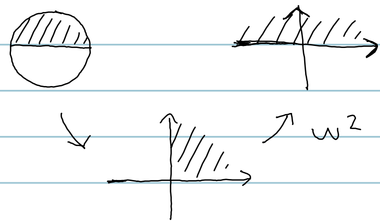


$\{z;\ \alpha < \arg z < \beta\} \xrightarrow{w = z^p}$

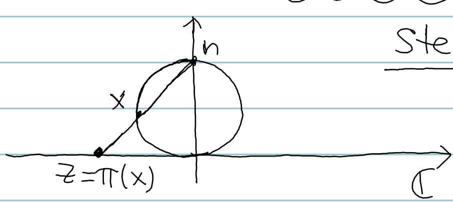
$\rightarrow \{w;\ p\alpha < \arg w < p\beta\}$

går ej pga nollan!

ex



$T = \left(\frac{z+1}{z-1} i\right)^2$



<u>Stereografisk Projektion</u>

$\pi(n) = \infty$

π är konform.

forts. →

$f(\Pi(x))$ ger en annan projektion.

(ex) $f(z) = \log z$

$\log(\Pi(x))$ är konform, Mercators proj.

Fouriertransform

Låt $u(t) \in L^1(\mathbb{R})$ dvs $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\,dt < \infty$

och u styckvis kont.

Då är $\hat{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-itx}\, dt$

Hemligheten: $\hat{u}$ bestämmer u; $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)\, e^{itx}\, dx$

(ex) $u(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \delta \\ 0 & |t| > \delta \end{cases}$

$$\hat{u}(x) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-itx}\, dt = \left[\frac{e^{-itx}}{-ix} \right]_{-\delta}^{\delta} = \frac{e^{i\delta x} - e^{-i\delta x}}{ix} = 2\,\frac{\sin \delta x}{x}$$

(ex) $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\hat{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{1+t^2}\, dt = \pi e^{-|x|}$$

Inversionsformen $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)\, e^{itx}\, dx = \frac{\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - |x|}\, dx$$

ex $u(t) = e^{-t^2/2}$

Då är $\hat{u}(x) = \sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2}$

Bevisar detta nästa gång!