Storgruppsövning 2/10-13

2.6 Residylkalkyl

$f \in A(\{0<|z-z_0|<R\})$ $\quad$ (z_0 iso. sing.)

$$\operatorname{Res}(f;z_0) = \{0<r<R\} \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \left\{\begin{matrix}\text{från}\\ \text{Laurentserie}\end{matrix}\right\}$$

$$= a_{-1} = \left\{\begin{matrix}\text{Sats om } z_0 \text{ pol}\\ \text{av ordn. } m\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = \left\{\begin{matrix}\text{om}\\ m=1\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \left\{f = \frac{P}{Q},\ m=1\right\} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Sats (Residysatsen)

$f \in A(D\setminus\{z_1,\dots,z_n\})$

D och γ som i figur

Då gäller:

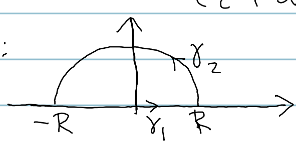
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \text{inre}(\gamma)} \operatorname{Res}(f;z_k)$$

2.6.3

Beräkna $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ där $a,b>0$

Lösn.: Låt $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \dfrac{1}{(z-ia)(z+ia)(z-ib)(z+ib)}$

Betrakta:



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Intressanta poler: $z_1 = ia$, $z_2 = ib$ då $a,b>0$.

(ligger i övre halvplanet)

Parametriseringar:

γ_1: $z = x$, $-R \le x \le R$, $dz = dx$

γ_2: $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, $dz = Rie^{i\theta} d\theta$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz =$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)\,dx}_{\xrightarrow{R\to\infty} I} + \underbrace{\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\,d\theta}_{\xrightarrow{R\to\infty} 0}$$

Å andra sidan:

$$\underbrace{\int_\gamma f(z)\,dz}_{\xrightarrow{R\to\infty} I} = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f; z_1) + \mathrm{Res}(f; z_2)\right) \quad \forall R > 0$$

Beräkna

z_1 och z_2 enkla poler (dvs $m=1$):

$$\mathrm{Res}(f; z_1) = \lim_{z\to ia} (z - ia)f(z) = \frac{1}{2ia(ia-ib)(ia+ib)} =$$

$$= \frac{1}{2ia(b^2-a^2)}$$

$$\mathrm{Res}(f; z_2) = \lim_{z\to ib} (z-ib)f(z) = \frac{1}{(ib-ia)(ib+ia)2ib} = \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$$

$$\therefore I = \cancel{2}\pi \cancel{i}\left(\frac{1}{\cancel{2i}a(b^2-a^2)} + \frac{1}{\cancel{2i}b(a^2-b^2)}\right) = \pi\frac{a-b}{ab(a^2-b^2)} =$$

$$= \pi\frac{1}{ab(a+b)}$$

2.6.8

Beräkna $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\gamma x)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx$ (av svaret framgår att $\alpha, \beta, \gamma > 0$)

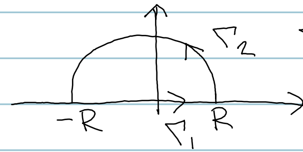
Lösn: Låt $f(z) = \dfrac{e^{i\gamma z}}{(z^2+\alpha^2)(z^2+\beta^2)} = \dfrac{e^{i\gamma z}}{(z-i\alpha)(z+i\alpha)(z-i\beta)(z+i\beta)}$

$f(z)$ jämn fkn $\Longrightarrow I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$

$e^{i\gamma z} = e^{i\gamma(x+iy)} = e^{-\gamma y} \cdot \underbrace{e^{i\gamma x}}_{\text{begränsad}}$

Då $\gamma > 0$ är $e^{-\gamma y}$ begr. för $y > 0$.

$\Longrightarrow$ Betrakta återigen:



$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Intressanta poler:

$z_1 = i\alpha$, $z_2 = i\beta$ då $\alpha, \beta > 0$.

Samma param. som i förra uppg. ger

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\,d\theta\right| \le \int_0^{\pi} R\,|f(Re^{i\theta})|\,d\theta \le$$

$$\left\{\begin{matrix}\gamma y \ge 0 \Rightarrow -\gamma y \le 0 \\ \Rightarrow e^{-\gamma y} \le e^{0} = 1\end{matrix}\right\} \le \int_0^{\pi} \frac{R}{|(R^2e^{2i\theta}+\alpha^2)||(R^2e^{2i\theta}+\beta^2)|}\,d\theta \le$$

$$\left\{\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b|\right\} \le \int_0^{\pi} \frac{R}{|R^2-\alpha^2||R^2-\beta^2|}\,d\theta \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

z_1 och z_2 enkla poler:

$$\Longrightarrow \operatorname{Res}(f;z_1) = \lim_{z\to i\alpha} \ldots = \frac{e^{-\alpha\gamma}}{2i\alpha(\beta^2-\alpha^2)}$$

$$\operatorname{Res}(f;z_2) = \ldots = \frac{e^{-\beta\gamma}}{2i\beta(\alpha^2-\beta^2)}$$

Residysatsen ger att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{\pi(\alpha e^{-\beta\gamma} - \beta e^{-\alpha\gamma})}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\gamma x)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx}_{=2I \text{ (jämn fkn)}} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\gamma x)}{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}\,dx$$

forts. $\rightarrow$

Identifiera Re- och Im-delar:

$$I = \frac{\pi(\alpha e^{-\beta\gamma} - \beta e^{-\alpha\gamma})}{2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}$$

3.1 Nollställen till holo. fkner

Argumentprincipen (sats)

$f \in A(D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$

D och γ som i figur.

γ; $z(t)$, $a \le t \le b$ (moturs orienterad)

$N(f;\gamma) = \#$ nollst. till f inuti γ

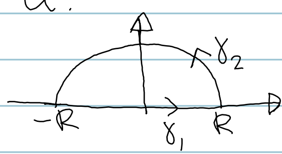
$P(f;\gamma) = \#$ poler — " —

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\left(\begin{matrix}\text{förändring i } \arg(f(z)) \\ \text{då } z(a) \longrightarrow z(b)\end{matrix}\right) = N(f;\gamma) - P(f;\gamma)$$

3.1.7

Bestäm # nollst. till $f(z) = z^4 + 3iz^2 + z - 2 + i$ i det övre halvplanet, $\mathcal{U}$.

Lösn: Betrakta



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

γ_1: $z = x$, $-R \le x \le R \Rightarrow f(x) = x^4 + 3ix^2 + x - 2 + i$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(f(x)) = x^4 + x - 2 \\ \mathrm{Im}(f(x)) = 3x^2 + 1 \end{cases}$$

Ser att $\mathrm{Im}(f(x)) > 1$ då $-R \le x \le R$

och att $\mathrm{Re}(f(-R)) \approx \mathrm{Re}(f(R)) > 0$ då $R >> 1$.

$\Rightarrow \arg f(x)$ oförändrad på γ_1.

γ_2: $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$

forts. $\longrightarrow$

$$f(Re^{i\theta}) = R^4e^{4i\theta} + 3iR^2e^{2i\theta} + Re^{i\theta} - 2 + i =$$
$$= R^4e^{4i\theta}\left(1 + \frac{3i}{R^2e^{2i\theta}} + \frac{1}{R^3e^{3i\theta}} + \frac{-2+i}{R^4e^{4i\theta}}\right) \approx$$

$\approx R^4e^{4i\theta}$ då $R >> 1$.

$\Longrightarrow \arg(f(Re^{i\theta})) \approx \arg(R^4e^{4i\theta}) = 4\theta$

$0 \xrightarrow[\theta]{} \pi \Longrightarrow 0 \xrightarrow[\arg(f(Re^{i\theta}))]{} 4\pi$

$f(Re^{i\theta})$ kommer att snurra 2 varv moturs runt origo på γ_2.

f har inga poler!

Arg. pr. $\Longrightarrow N(f;u) = \{R>>1\} = N(f;\gamma) = 2$

Rouchés sats

$f, g \in A(D)$, γ "normal" kurva i D

$|f \pm g| < |f|$ på γ

$\Longrightarrow N(f;\gamma) = N(g;\gamma)$

3.1.12

Bestäm # nollst. till $f(z) = z^3 - 3z + 1$ i området $D = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z| < 2\}$

lösn: Idé: Använd Rouché till att bestämma $N(f; |z|=1)$ och $N(f; |z|=2)$.

$\Longrightarrow N(f;D) = N(f;|z|=2) - N(f;|z|=1)$

$|z|=1$: Vilka av $f(z)$:s termer är störst till belopp då $|z|=1$? Svar: $-3z$

Studera: $|f(z) - (-3z)| = |z^3 + 1| \leq |z^3| + 1 = |z|^3 + 1 \overset{|z|=1}{=} 2$

$|-3z| = 3|z| = 3$

$\Longrightarrow |f(z) + 3z| < |-3z|$ på $|z| = 1$

Rouché $\Longrightarrow N(f; |z|=1) = N(-3z; |z|=1) = 1$

$|z|=2$: Vilken av f:s termer är störst...?

Svar: z^3

Studera: $|f(z)-z^3| = |-3z+1| \leq 3|z|+1 = 7$

$|z^3| = |z|^3 = 8$

$\Longrightarrow |f(z)-z^3| < |z^3|$ på $|z|=2$

Rouché $\Longrightarrow N(f;|z|=2) = N(z^3;|z|=2) = 3$

$\therefore N(f;D) = 3-1 = 2.$