Föreläsning 2/10-13

Möbiusavbildningar

$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ där $ad-bc \neq 0$

(om $ad-bc=0$, $ad=bc$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$

då $a=\lambda c$, $b=\lambda d$

$T(z) = \frac{\lambda cz + \lambda d}{cz+d} = \lambda$ konstant)

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

Om $ad-bc \neq 0$ är T injektiv,

dvs $T(z_1) = T(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$

Därför har T en invers $T(z) = w \Rightarrow z = T^{-1}(w)$

(för w i bilden av $\mathbb{C}$.)

$$\frac{az+b}{cz+d} = w \iff z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Funkar för alla w ($w \neq a/c$) så T surjektiv.

a/c?

Konventionen: $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$

Betrakta:

$$T: \underbrace{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}_{\hat{\mathbb{C}}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}_{\hat{\mathbb{C}}}$$

$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad cz+d = 0 \Rightarrow z = -d/c$.

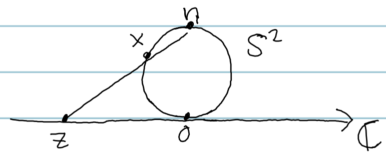
$\Rightarrow T(-d/c) = \infty$

$T(\infty)$: $T(z) = \dfrac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \Longrightarrow T(\infty) = \dfrac{a}{c}$

Koll: $T^{-1}(w) = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$

$T^{-1}(a/c) = \infty$, $T^{-1}(\infty) = -d/c$ OK!

$\hat{\mathbb{C}}$ kallas för Riemannsfären:



Finns $\pi: S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$

$\pi(x) = z$, $\pi(n) = \infty$

T, S möbiusavb.

$\Longrightarrow$ $S \circ T$ möbius

$T = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad S(w) = \dfrac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$

$$S(T(z)) = \frac{\alpha\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \beta}{\gamma\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \delta} = \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} =$$

$$= \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}$$ Möbius!

Jämför:

$\underset{T}{\underset{\wr}{M}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \underset{S}{\underset{\wr}{N}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $\quad \underset{S \circ T}{\underset{\wr}{NM}} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$

Fixpunkter

Definition

z är en fixpunkt till T om $T(z) = z$.

Lemma

T har högst 2 fixpunkter, om $T(z) \neq z$.

Bevis

$$T(z) = z \iff \frac{az+b}{cz+d} = z$$

$$az + b = cz^2 + dz \quad \longleftarrow \text{ 2:gradsekvation!}$$

$\Longrightarrow$ Högst två nollställen. $\blacksquare$

Låt nu (z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) vara tripler

$z_j \neq z_k$ och $w_j \neq w_k$

Säg nu att $T(z_j) = w_j$ och $S(z_j) = w_j$

$\Longrightarrow T = S$.

Bevis

$T(z_j) = w_j = S(z_j)$

så $S^{-1} \circ T(z_j) = z_j$

$\because$ z_1, z_2, z_3 är fixpunkter

$\therefore$ $S^{-1} \circ T(z) = z \Longrightarrow T(z) = S(z)$

Sats

Givet två tripler $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$

så finns exakt en T $(\exists! T)$ som uppfyller

$T(z_j) = w_j$.

Bevis

Steg 1 Antag att $(w_1, w_2, w_3) = (0, 1, \infty)$

Vill: $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = \infty$

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{duger}$$

Steg 2 Allmänt: (w_1, w_2, w_3) given

$\exists\, S$; $S(w_1) = 0$, $S(w_2) = 1$, $S(w_3) = \infty$

Tag T från del 1, bilda $S^{-1} \circ T = R$

$R(z_1) = w_1$, $R(z_2) = w_2$, $R(z_3) = w_3$ $\blacksquare$

Figur 1

$$\begin{tikzcd}
(z_1, z_2, z_3) \arrow[r, "T"'] \arrow[rr, bend right, "R = S^{-1} \circ T"'] & (0, 1, \infty) \arrow[r, shift left, "S^{-1}"] & (w_1, w_2, w_3) \arrow[l, shift left, "S"]
\end{tikzcd}$$

ex $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, i)$

$(w_1, w_2, w_3) = (i, 0, 1)$

Först: $T: (0, 1, i) \longrightarrow (0, 1, \infty)$

$$T(z) = \frac{z(1-i)}{z-i}$$

Sen: $S: (i, 0, 1) \longrightarrow (0, 1, \infty)$

$$S(w) = \frac{w-i}{w-1}(-i) \qquad S^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta - 1}{\zeta + i}$$

Slutligen: $R = S^{-1} \circ T(z) =$

$$= \frac{T-1}{T+i} = \frac{\frac{z(1-i)}{z-i} - 1}{\frac{z(1-i)}{z-i} + 1} = \ldots = i\,\frac{1-z}{1+z}$$

Sats

Om T är en möbiusavb., och $\mathcal{C}$ är en cirkel eller linje, så är $T(\mathcal{C})$ också en cirkel eller linje.

ex ~~$i\frac{1-z}{1+z} = R(z)$ avbildar $(0,1,i)$ på $(i,0,1)$~~

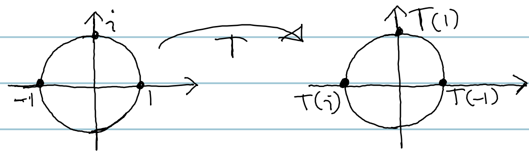
~~Alltså avbildar R $\{|z|=1\}$ på sig själv.~~

Nej! Det här var fel!

ex Säg att T avbildar $(-1, i, 1)$ på $(1, -1, i)$

Då avbildar T $\{|z|=1\}$ på sig själv.

Varför?



Jo, T avbildar $\{|z|=1\}$ på en cirkel eller rät linje genom $(-1, 1, i)$ dvs samma cirkel.

Varför vill man avbilda en cirkel på sig själv?
Jo, för då avbildar man ofta även det inre av cirkeln på sig själv.

Bevisskiss

Cirkelns ekv. $|z-c|^2 = r^2$

$|z|^2 + |c|^2 - 2\operatorname{Re}\bar{c}z - r^2 = 0$

$|z|^2 + B - 2\operatorname{Re}\bar{c}z = 0 \quad (*)$

Linjens ekv. $2\operatorname{Re}\bar{c}z = B$

① Antag att $T(z) = az$ där $|a| = 1$,
dvs $T(z) = e^{i\theta}z$
avbildar cirklar ↻ och linjer ↻ (↻ = på sig sj.)

② $T(z) = az = re^{i\theta}z$
också OK.

③ $T(z) = z + b$ OK.

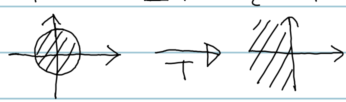
$\therefore$ $T(z) = az + b$ OK.

④ $T(z) = 1/z = w \Rightarrow z = 1/w$
Säg ℓ linjen $2\operatorname{Re}\bar{c}z = B$
$|w|^2 \, 2\operatorname{Re}\frac{\bar{c}}{w} = B|w|^2$
$2\operatorname{Re}\frac{\bar{c}}{w}|w|^2 = B|w|^2$
$2\operatorname{Re}\bar{c}\bar{w} = B|w|^2$
$|w|^2 - 2\operatorname{Re}\frac{c}{B}w = 0$, jämför med (*)
Detta är alltså en ekv. för en cirkel.
Om ℓ är cirkel, liknande.

⑤ $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = q + \dfrac{r}{cz+d} = U \circ R \circ S$ där

$S(z) = cz + d$, $R(z) = 1/z$, $U(z) = rz + q$
Alla dessa uppfyller satsen.
$\therefore$ T uppfyller satsen.

Ex Bestäm en T som avbildar $\Omega = \{|z|<1\}$ på
$D = \{w;\ \operatorname{Re} w < 0\}$.



① Välj tre punkter på cirkeln, $(-1, 1, i)$, avbilda på tre punkter på Im-axeln, $(0, \infty, i)$.

forts. →

$$T(z) = \frac{z+1}{z-1}, \quad \frac{i-1}{2}\, i$$

Då avbildar T cirkeln $|z|=1$ på Im-axeln.

Fortsättning följer!