Föreläsning 1/10-13

Stabilitet, tillämpning av argumentprincipen

Betrakta diff. ekv. $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ konstant.
, A $n \times n$-matris, konstant.

Låt $x_1(t)$ vara lösn. med begynnelsevärde $x_1(0) = a_1$.
Låt $x_2(t)$ — " — $x_2(0) = a_2$
Låt $w(t) = x_1(t) - x_2(t)$
Vill ha: $a_1 \simeq a_2 \Rightarrow x_1(t) \simeq x_2(t)$ $t > 0$,
vilket ger stabilitet.

I termer av w:
w löser: $\dot{w} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = Ax_1 - Ax_2 + b - b = A(x_1 - x_2)$
$\dot{w} = Aw$, $w(0) = a_1 - a_2 \simeq 0$.
Hur löser vi?
Låt λ vara ett egenv. till A, ev. komplext,
v motsvarande egenvektor.
dvs $Av = \lambda v$, $v = (v_1 \ldots v_n)$, $v_i \in \mathbb{C}$
Då har $\dot{w} = Aw$ lösning $w = ve^{\lambda t}$
ty $\dot{w} = \lambda v e^{\lambda t} = Ave^{\lambda t} = Aw$

Allm: om $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ egenv. med egenvektorer v_i
så $w = \sum v_i e^{\lambda_i t}$ löser $\dot{w} = Aw$.

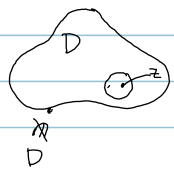
Om $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$ så är detta alla lösningar.
Antag det. (bevisar det inte)

Egenvärdena löser ekv. $\det(A-\lambda I)=0$
När är problemet stabilt?
Jo, $w(t)$ kan gå mot ∞ omm något λ_i uppfyller $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$, annars är det stabilt (allra bäst om $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$)

Nu till något annat.

__Maxprincipen__

__Påminnelse:__ $D \subseteq \mathbb{C}$ är öppen om varje $z \in D$ har en cirkelskiva $\{w, |w-z|<\delta\} \subseteq D$

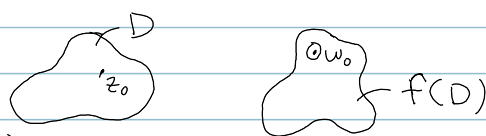


öppet

__Sats__

Låt D vara öppen, f holo i D, f ej konstant.
Då är $f(D) = \{f(z);\ z \in D\}$ öppen.

__Bevis__



Låt $z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0$
Antag f ej konstant.
Låt $f(z) - w_0 = (z-z_0)^m g(z)$
$g(z_0) \neq 0$, g holo.
$\therefore$ om $|z-z_0| \leq r$ så $g(z) \neq 0$ om $r \ll 1$.
$\therefore$ $|f(z)-w_0| = |z-z_0|^m |g(z)| \neq 0$ om $|z-z_0| = r$
$\therefore$ $|f(z)-w_0| \geq \varepsilon$ om $|z-z_0| = r$
Tag $a \in \mathbb{C}$, $|a| < \varepsilon$.
Då $|f(z)-w_0| \geq \varepsilon > |a|$ om $|z-z_0| = r$
Rouché $\Rightarrow$ $f(z)-w_0$ och $f(z)-w_0-a$ har lika

många nollst. i $|z-z_0|<r$.
$f(z)-w_0$ har minst ett, ∴ $f(z)-w_0-a$ har minst ett nollst.
dvs $f(z)=w_0+a$ har en lösning.
∴ $f(D)$ öppen. $\blacksquare$

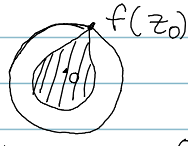
Följdsats (maxprincipen)

f holo och icke-konstant
$\Longrightarrow$ f har inget lokalt maximum.
dvs $\nexists\, z_0$ s.a $|f(z)|\le|f(z_0)|$ om z nära z_0.
$\underbrace{\text{Därför}}_{(*)}$ har vi att $\max\limits_{D}|f| \le \max\limits_{\text{randen av } D}|f|$

ex
$|f(z)|\le 1$ då $|z|=1$
$\Longrightarrow$ $|f(z)|\le 1$ då $|z|\le 1$.

Bevis av följdsats

Antag f holo i D (öppen) och z_0 lokalt max,
dvs om $|z-z_0|<r$ så $|f(z)|\le|f(z_0)|$
Då $f(\{z; |z-z_0|<r\}) \equiv$



∴ ej öppen
motsägelse! $= \Omega$
I formler: $f(\{z; |z-z_0|<r\})$ öppen så finns
$\varepsilon>0$; $|a|<\varepsilon \Longrightarrow f(z_0)+a\in\Omega$
Välj a s.a $|f(z_0)+a|>|f(z_0)|$
Motsäger att z_0 var max.
Del 2 (bevis av (*)): Antag f holo i D och
kontinuerlig på $\bar{D} = D \cup$ randen

forts →

Då har $|f|$ ett maximum, z_0.

Del 1 $\Rightarrow z_0 \in$ randen

$\therefore \ \forall z \quad |f(z)| \le |f(z_0)| \le \max\limits_{\text{randen av } D} |f|$ $\blacksquare$

<u>Kom ihåg:</u>

f holo i $\{|z|<1\}$

kontinuenlig i $\{|z| \le 1\}$ och

$|f(z)| \le 1$ då $|z|=1$

$\Rightarrow |f(z)| < 1 \quad , |z|<1.$

<u>Schwartz lemma</u>

Antag f holo i $\{|z|<1\}$, kont. då $|z| \le 1$,
$|f(z)| \le 1$ då $|z|=1$ och $f(0)=0$

Då gäller $|f(z)| \le |z|$

<u>Bevis</u>

Låt $g(z) = f(z)/z$ holo.

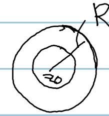
$|z|=1 \Rightarrow |g(z)| = \dfrac{|f|}{|z|} \le 1$

maxprincipen $\Rightarrow |g(z)| \le 1$ om $|z| \le 1$

$\therefore \ |f(z)| \le |z|$ $\blacksquare$

<u>Medelvärdessatsen</u>

Antag $f(z)$ holo då $|z-z_0|<R$



Låt $r<R$.

Då $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta$ (1)

medelvärdet

Följd

Antag u harmonisk i samma område.

Samma slutsats:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

Bevis (av följd)

$u = \mathrm{Re}(f)$, f holo.

Tag realdel av ①.

Bevis (av medelvärdessatsen)

Cauchys formel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \left\{ \begin{array}{l} z = z_0 + re^{i\theta}, \; dz = rie^{i\theta} d\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \qquad \blacksquare$$

Möbiusavbildningar

Definition

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ är en Möbiusavb.

Om $ad - bc \neq 0$ ← varför?

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\qquad cwz + wd = az + b$

$cwz - az = -wd + b$

$z(cw - a) = -wd + b$

$$z = \frac{-wd+b}{wc-a}$$

En annan approach:

Är T injektiv (ett-ett) dvs

$$T(z_1) = T(z_2) \underset{?}{\Longrightarrow} z_1 = z_2$$

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

$$(az_1+b)(cz_2+d) = (az_2+b)(cz_1+d)$$

$$\cancel{ac z_1 z_2} + \cancel{bd} + bcz_2 + adz_1 = \cancel{acz_1z_2} + \cancel{bd} + bcz_1 + adz_2$$

$$(ad-bc)z_1 = (ad-bc)z_2$$

$\Rightarrow z_1 = z_2$ om $ad-bc \neq 0$, annars ej

Förklaring: $ad-bc=0 \Rightarrow (a,b) = \lambda(c,d)$ ngt λ

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{\lambda cz + \lambda d}{cz+d} = \lambda \text{ konstant}$$

$\therefore \lambda = a/c$