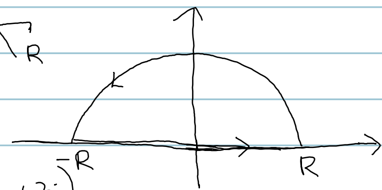
Föreläsning 27/9-13

ex) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ $\quad n \in \mathbb{N}, \; n >> 0$

Huvudreceptet: Låt Γ_R



Residysatsen:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i \sum_{z_j \text{ sing} \in \text{inre}(\Gamma_R)} \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n}}, z_j\right)$$

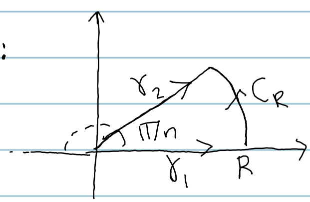
Singulära punkter: $1+z^{2n}=0 \Rightarrow z^{2n} = -1 = e^{i\pi + 2\pi i k}$

$$z = e^{i\pi/2n + 2k\pi i/2n}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1$$

Har alltså $2n$ lösningar, varav hälften (n st) ligger i övre halvplanet. Jobbigt!

Bättre metod:

Γ_R:



Delar upp så endast ett nollställe hamnar i området.

Residysatsen:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dx}{1+x^{2n}} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} - \int_{\gamma_2} \frac{dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i \, \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n}}, e^{i\pi/2n}\right) =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2n\left(e^{i\pi/2n}\right)^{2n-1}} = \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2}n} \cdot \frac{e^{i\pi/2n}}{\left(e^{i\pi/2n}\right)^{2n}} =$$

$$= \frac{-i\pi}{n} e^{i\pi/2n}$$

$\displaystyle\int_{C_R} \longrightarrow 0$ (måste kolla egentligen)

Återstår $\int_{\gamma_2}$, parametrisera!

$\gamma_2(t) = t e^{i\pi/n}$, $0 < t < R$

$$\int_{\gamma_2} = \int_0^R \frac{e^{i\pi/n}\,dt}{1+(te^{i\pi/n})^{2n}} = e^{i\pi/n}\int_0^R \frac{dt}{1+t^{2n}}$$

$$\therefore \quad (1-e^{i\pi/n})\int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n}} + \int_{C_R} = -\frac{i\pi}{n} e^{i\pi/2n}$$

$R \to \infty$

$$(1-e^{i\pi/n})\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{-i\pi}{n} e^{i\pi/2n}$$

$$\frac{(e^{i\pi/2n} - e^{-i\pi/2n})}{2i}\int_0^\infty = \frac{\cancel{i}\pi}{n}\frac{1}{2\cancel{i}}$$

$$\sin(\pi/2n)\int_0^\infty = \pi/2n \implies \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi/2n}{\sin(\pi/2n)}$$

$$\downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n\to\infty$$

$$\int_0^1 dx \qquad 1$$

Argumentprincipen

Vet:

Sats

D enkelt sammanhängande, f holo i $D - \{w_1, \dots, w_n\}$. w_j poler av mult. P, γ enkel sluten i D, $w_j \notin \gamma$.

$f(z) = 0$; $z = z_1, \dots, z_q$ med mult. m_j, $z_j \notin \gamma$

Då: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = N - P$ = #nollst. − # poler innanför γ, räknade med mult.

$$N = \sum_{z_j \in \text{inre}(\gamma)} m_j \qquad P = \sum_{w_j \in \text{inre}(\gamma)} p_j$$

Kom ihåg:

Om f holo i Ω enkelt sammanh., $f \neq 0$

$\Longrightarrow \exists\ g(z) = \log f(z)$, holo i Ω.

$$g(z) = \int_a^z \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

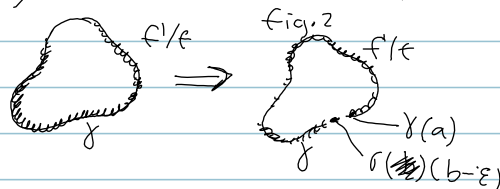
dvs. $\frac{f'}{f}$ holo i Ω $(f \neq 0)$

$\because \exists\ g(z)\ ;\ g' = f'/f$

Då $g = \log f$ (acceptera)

Betrakta nu $\frac{f'}{f}$ på kurvan γ, och låt Ω vara det skuggade området.

I kurvan existerar $\log f$.



$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\dot\gamma\,dt = (\text{integralen över fig. 2}) =$$

$$= \int_a^{b-\varepsilon} \frac{d}{dt}\log f(\gamma(t))\,dt = \log f(\gamma(b-\varepsilon)) - \log f(\underbrace{\gamma(a)}_{=\gamma(a)})$$

När $\varepsilon \to 0$: $\log f(\gamma(b-\varepsilon)) - \log f(\gamma(a)) \longrightarrow \log f(\gamma(b)) - \log f(\gamma(a)) = 0$?

~~Tolkning av formeln~~:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = N - P$$

VL: $\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\dot\gamma\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{f'}{f}\dot\gamma\,dt$

På $\{\gamma(t)\ ;\ a \le t \le b-\varepsilon\} \subseteq \Omega$

har f en logaritm $g = \log f(z)$ och $g' = f'/f$.

$\therefore$ $VL = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{d}{dt} \log f(\gamma(t))\,dt =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0}{}^{(*)} \underbrace{\log f(\gamma(b-\varepsilon))}_{\gamma(b-\varepsilon) \to \gamma(b) = \gamma(a)} - \log f(\gamma(a)) =$ $\quad \left((*) - \frac{1}{2\pi i}\right)$

$= \lim \frac{1}{2\pi i}\left[\log|f(\gamma(b-\varepsilon))| + i \arg f(\gamma(b-\varepsilon))\right] -$
$- \log|f(\gamma(a))| - i \arg f(\gamma(a)) =$

$= \lim \frac{1}{2\pi i}\, i\left(\arg f(\gamma(b-\varepsilon)) - \arg f(\gamma(a))\right) =$

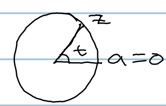
$= (\operatorname{argvar}(f,\gamma)) \frac{1}{2\pi}$

$\therefore$ $N - P = \operatorname{argvar}(f,\gamma)\frac{1}{2\pi}$ (argumentprincipen)

ex

$f(z) = z$, $\gamma = |z| = 1$

$z = e^{it}$, $\log z = it$, $\arg z = t$

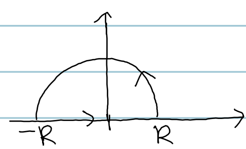


$\operatorname{argvar}(z,\gamma) = 2\pi$

Satz: $N - P = 2\pi / 2\pi = 1$

ex Hur många nollställen har $f(z) = z^4 - 2z^2 + 4$ i övre halvplanet?

Låt Γ_R:



Räkna nollst. innanför $\Gamma_R = \operatorname{argvar}(f, \Gamma_R)\frac{1}{2\pi} =$
$= \operatorname{argvar}(f, [-R,R]) + \operatorname{argvar}(f, C_R)$

På $[-R,R]$ är f reell och $f > 0$.

$\therefore$ $\operatorname{argvar}(f, [-R,R]) = 0$.

På C_R gäller $(R>>0)$ $f = z^4 - 2z^2 + 4 \simeq z^4$

$\therefore$ ~~[illegible]~~ $\arg f \simeq \arg z^4$,

$\operatorname{argvar}(f, C_R) \simeq \operatorname{argvar}(z^4, C_R) = 4\pi$

$\therefore$ # nollställen innanför $\Gamma_R \simeq \frac{4\pi}{2\pi} = 2$

$\therefore$ $N = 2$.

Rouchés sats

f holo i D enkelt sammanhängande.
$\gamma \subseteq D$ och är enkel och sluten. Antag h holo i D och $|h| < |f|$ på γ.
Då har f och $f+h$ lika många nollst. innanför γ.

ex Hur många nollst. har $p(z) = z^3 + z - 5$ i $|z| < 2$?
Låt $f = z^3$, $h = z - 5$ på $|z| = 2$, $|f(z)| = |z^3| = 8$
$|h| = |z-5| \leq 2 + 5 = 7 < 8 = |f|$.
Rouché $\Longrightarrow$ $p = f + h$ har lika många nollst. som f i $|z| < 2$, dvs 3.

Bevis

Låt $f_t = f + th$
$f_0 = f$, $f_1 = f + h$, N_t = antal nollst. till f_t.
vill att $N_0 = N_1$
vet att $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_t'}{f_t} \, dz = N_t$

Obs $|f_t| \geq |f| - t|h| > 0$ på γ.
Obs VL är en kont. funktion av t.
$\therefore$ Beror ej av t, ty den är heltalsvärd.
$\Longrightarrow N_0 = N_1$ $\blacksquare$

Algebrans fundamentalsats

Låt $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$

Då har ekv. $p(z) = 0$ n st nollst. i $\mathbb{C}$.

Bevis

Låt $\gamma_R = \{|z| = R\}$, $R > 0$

$f = z^n$, $h = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$

På γ_R: $|h(z)| \leq |a_n| + \ldots + |a_1||z|^{n-1} =$

$= |a_n| + \ldots + R^{n-1}|a_1| < R^n = |z^n| = |f|$

Rouché $\Rightarrow$ f och $f + h = p$ har lika många nollst., dvs n st. $\blacksquare$