Storgruppsövning 25/9-13

Definition

$f \in A(D)$, $z_0 \in D$

Sats 2.4.1 $\Rightarrow$ går alltid att utveckla f i en potensserie kring z_0

$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$

Om $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$, men $a_m \neq 0$ säger vi att f har ~~ett~~ nollställe av ordning m i z_0.

2.4.5 Bestäm ordningen av alla nollställen till $f(z) = z^2(1-\cos z)$

Lösn.: $\cos z = 1 \Leftrightarrow \cos(x+iy) = 1$

$\Leftrightarrow \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 1$

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 1 \quad (*) \\ \sin x \sinh y = 0 \Rightarrow \underbrace{\sin x = 0}_{\text{fall 1}} \text{ eller } \underbrace{\sinh y = 0}_{\text{fall 2}} \end{cases}$$

fall 2: $\sinh y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Insatt i $(*)$: $\cos x \underbrace{\cosh(0)}_{=1} = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore \cos(z) = 1$ om $z = 2\pi k + i0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

fall 1: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Insatt i $(*)$: $\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \cosh y = 1$

$\cosh y = \frac{(-1)^{2n}}{(-1)^n} = (-1)^n \Rightarrow n$ jämn
$n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cosh y = 1$ ok då $y = 0$

$g(y) = e^y + e^{-y} = 2$

$g'(y) = e^y - e^{-y} = 0 \Rightarrow y = 0$

forts. $\longrightarrow$

$g''(y) = e^{y} + e^{-y} > 0 \Rightarrow y = 0$ min.punkt

$\lim_{y \to \pm\infty} g(y) = \infty$ så $y = 0$ unik.

$\therefore \cos z = 1$ om $z = 2\pi k + i0 = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Kring $z = 2\pi k$ har $\cos z$ potensserieutv.

$$\cos z = \cos 2\pi k - \frac{\cos 2\pi k}{2!}(z-2\pi k)^2 + \frac{\cos 2\pi k}{4!}(z-2\pi k)^4 - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(z-2\pi k)^2 + \frac{1}{4!}(z-2\pi k)^4 - \ldots$$

$$\Rightarrow f(z) = z^2\left(\frac{1}{2}(z-2\pi k)^2 - \frac{1}{4!}(z-2\pi k)^4 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} z^2 (z-2\pi k)^2 \underbrace{\left(1 - \frac{2}{4!}(z-2\pi k)^2 + \ldots\right)}_{\neq 0 \text{ då } z = 2\pi k}$$

$z = 0$ nollställe av ordning 4.

$z = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ nollställe av ordn. 2.

2.4.10 Potensserieutveckla $f(z) = e^z$ kring $z_0 = \pi i$

__lösn:__ $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \ldots$ (**)

$$\Rightarrow e^z = e^{\pi i} + e^{\pi i}(z-\pi i) + e^{\pi i}(z-\pi i)^2 + \ldots =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^k}{k!}$$

2.4.13 Potensserieutveckla $f(z) = \dfrac{z+2}{z+3}$ kring $z_0 = -1$

__lösn:__ (**) jobbig här!

$z - z_0 = z + 1$

Vill återföra på geometrisk summa.

forts. →

$$\frac{z+2}{z+3} = \frac{z+3-1}{z+3} = 1 - \frac{1}{z+3} = 1 - \frac{1}{2+(z+1)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z+1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left(-\frac{z+1}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z+1}{2}\right)^k =$$
$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(z+1)^k}{2^{k+1}} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(z+1)^k}{2^{k+1}}$$

2.4.17 Antag att $f \in A(D)$ och att f har ett nollställe av ordning m i $z_0 \in D$.

Påstående: a) f' har ett nollst. av ordn. $m-1$ i z_0.
b) f^2 har ett nollst. av ordn. $2m$ i z_0.

Bevis

$$f(z) = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1} (z-z_0)^{m+1} + \ldots =$$
$$= (z-z_0)^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \ldots)}_{g(z)} =$$
$$= (z-z_0)^m g(z)$$

$\therefore$ f har ett nollst. av ordn. m i z_0
$\iff$ $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ där $g \in A(D)$, $g(z_0) \neq 0$

a) $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$
$$\Longrightarrow f'(z) = m(z-z_0)^{m-1} g(z) + (z-z_0)^m g'(z) =$$
$$= (z-z_0)^{m-1} \underbrace{(m g(z) + (z-z_0) g'(z))}_{h(z) \text{ holo och } h(z_0) \neq 0}$$

$\Longrightarrow$ $f'(z)$ har nollst. av ordn. $m-1$ i z_0.

b) $f^2(z) = (z-z_0)^{2m} \underbrace{g^2(z)}_{\neq 0 \text{ då } z=z_0}$

$\Longrightarrow$ $f^2(z)$ har nollställe av ordn. $2m$ i z_0.

$\blacksquare$

2.4.18 Använd sats 2.4.1 till att bevisa Cauchy-uppskattningarna

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \quad , n=0,1,2,\dots$$

där $f \in A(D)$, $\{|z-z_0| \le r\} \subset D$

Bevis

Sats 2.4.1 $\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

där $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad , n=0,1,\dots$

Men vi vet även att om

$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$

så är $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$

$$\Longrightarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \left\{ \begin{matrix} z = z_0 + re^{i\theta}, \; 0 \le \theta \le 2\pi \\ dz = ri e^{i\theta} d\theta \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) \cancel{ri} \cancel{e^{i\theta}}}{(\cancel{z_0} + re^{i\theta} - \cancel{z_0})^{n+\cancel{1}}} d\theta =$$

$$= \frac{n!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right| \le$$

$$\le \frac{n!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \le \frac{n!}{r^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\max_{0 \le \theta \le 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|}_{\text{konstant}} d\theta$$

$$= \frac{n!}{r^n} \max_{0 \le \theta < 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| =$$

$$= \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \quad \blacksquare$$

2.4.21 Antag att $f \in A(\mathbb{C})$, f hel och att det existerar konstanter $A > 0$ och $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ s.a $|f(z)| \leq A|z|^m$ om $|z| \geq R_0 >> 0$
Använd Cauchy-uppskattningarna till att visa att f är ett polynom med grad(f) ≤ m.

Bevis

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \forall r > 0$$

Välj $r \geq R_0$:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z|=r} A|z|^m = \frac{n!}{r^n} A r^m = \frac{n! A}{r^{n-m}} \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

om $n > m$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$ då $n > m$

$$f \in A(\mathbb{C}) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , z \in \mathbb{C}$$

där $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

$\Rightarrow a_n = 0$ då $n > m$

$\therefore f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$

dvs. polynom av grad $\leq m$.