Storgruppsövning 20/9-13

2.4 Konsekvenser av CS och CIF

Sats 2.4.1

$f \in A(D) \Longrightarrow$ går alltid att utveckla f i en potensserie kring $z_0 \in D$, $\forall z_0 \in D$.

Definition

$f \in A(D)$, $z_0 \in D$

$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$

Om $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$ säger vi att f har ett av ordning/multiplicitet m i z_0.

2.4.2

Bestäm ordningen av alla nollställen till

$f(z) = (e^z - 1)^2$

Lösn: $e^z = 1 \Longrightarrow z = k \cdot 2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

Kring $z_0 = k2\pi i$ har e^z potensserieutvecklingen

$$e^z = e^{2\pi i k} + e^{2\pi i k}(z - 2\pi i k) + \frac{1}{2} e^{2\pi i k}(z - 2\pi i k)^2 + \dots =$$

$$= 1 + (z - 2\pi i k) + \frac{1}{2}(z - 2\pi i k)^2 + \dots$$

$$\Longrightarrow f(z) = ((z - 2\pi i k) + \frac{1}{2}(z - 2\pi i k) + \dots)^2 =$$

$$= (z - 2\pi i k)^2 \underbrace{(1 + \frac{1}{2}(z - 2\pi i k) + \frac{1}{6}(z - 2\pi i k)^2 + \dots)^2}_{\neq 0 \text{ då } z = 2\pi i k}$$

$\therefore$ $z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, nollställe av ordning 2.

2.4.6

Bestäm ordningen av alla nollställen till

$f(z) = \mathrm{Log}(1-z)$, $|z| < 1$.

Lösn: $\mathrm{Log}(1-z) = 0$ då $z = 0$

Potensserieutveckla $\mathrm{Log}(1-z)$ kring $z_0 = 0$

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \dots$

$f'(z) = -1/(1-z)$, $f''(z) = -1/(1-z)^2$, $f^{(3)}(z) = -2/(1-z)^3$

$\Longrightarrow \text{Log}(1-z) = 1 \cdot (z-0) - \frac{1}{2} \cdot 1 \, (z-0)^2 - \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (z-0)^3 + \dots$

$= z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots = z\underbrace{\left(1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} - \dots\right)}_{\neq 0 \text{ då } z=0.}$

$\therefore$ $z=0$ nollställe av ordning 1.

2.5.6

Bestäm alla ~~...~~ isol. sing. till

$f(z) = \dfrac{e^z - 1}{e^{2z}-1}$ och ange vilken sorts sing. det är.

Lösn: $e^{2z} - 1 = (e^z - 1)(e^z + 1)$

$e^z = 1$ då $z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, hävbara sing.

$e^z = -1 \Longleftrightarrow e^x e^{iy} = -1 \Longleftrightarrow e^x \cos y + i e^x \sin y = -1$

$\begin{cases} e^x \cos y = -1 \\ e^x \sin y = 0 \Longrightarrow \sin y = 0 \end{cases}$

$y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow e^x \cos(k\pi) = -1 \Longleftrightarrow e^x (-1)^k = -1$

lösbart då $x=0$ och k udda ($k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$)

$\Longrightarrow z = x + iy = 0 + i(2n+1)\pi = (2n+1)\pi i$

Serieutveckla e^z kring $z_0 = (2n+1)\pi i$

$e^z = e^{z_0} + e^{z_0}(z-z_0) + \frac{1}{2} e^{z_0}(z-z_0)^2 + \dots =$

$= -1 + (-1)(z - (2n+1)\pi i) + \frac{1}{2}(-1)(z-(2n+1)\pi i)^2 + \dots$

$\Longrightarrow f(z) = \dfrac{\cancel{e^z - 1}}{(\cancel{e^z-1})(e^z+1)} = \dfrac{1}{e^z+1} = \dfrac{1}{-(z-(2n+1)\pi i)(1+\frac{1}{2}\dots)}$

$\therefore$ $z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$ hävbara sing.

$z = (2n+1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ poler av ordn. 1.

2.4.12 Potensserieutveckla $f(z) = z^2/(1-z)$ kring $z_0 = 0$.

Lösn.: $f(z) = z^2 \cdot \frac{1}{1-z} = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+2}$, $|z|<1$

2.5 Isolerade singulariteter

Definition

Om $f \in A(\{0<|z-z_0|<r\})$ säger vi att z_0 är en isolerad singularitet till f. Dessa delas upp i tre klasser.

(i) Hävbara, tex $f(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0}$

(ii) Poler: f kan skrivas som $\underbrace{f(z) = \frac{k(z)}{(z-z_0)^m}}_{\text{Pol av ordning } m}$ där $k(z_0) \neq 0$ och k holo.

(iii) Essentiell: Varken (i) eller (ii).
T.ex $f(z) = e^{1/(z-z_0)}$ (behöver $m=\infty$ i (ii))

2.5.4 Bestäm alla isolerade singulariteter till
$f(z) = \pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$
och ange vilken sorts sing. det är. ((i), (ii) el. (iii))

Lösn.: $f(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$, låt $w = \pi z$, $\sin w = 0$ då $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Serieutveckla $\sin w$ kring $w_0 = k\pi$

$\sin w = \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}(w-k\pi) - \frac{\cos(k\pi)}{3!}(w-k\pi)^3 + \ldots =$

$= (-1)^k(w-k\pi) - \frac{(-1)^k}{3!}(w-k\pi)^3 + \frac{(-1)^k}{5!}(w-k\pi)^5 - \ldots =$

$= (-1)^k(w-k\pi)\left[1 - \frac{1}{3!}(w-k\pi)^2 + \ldots\right]$, stoppa in $w = \pi z$

$\Rightarrow f(z) = \frac{\cancel{\pi}\cos(\pi z)}{\cancel{\pi}(-1)^k(z-k)\underbrace{(1-\frac{\pi^2}{3!}(z-k)^2+\ldots)}_{g(z)}} = \frac{1}{(z-k)} \cdot \underbrace{\frac{\cos(\pi z)}{(-1)^k g(z)}}_{\text{holo och } \neq 0 \text{ då } z=k} = h$

$= \frac{h(z)}{(z-k)^1}$, h holo och $h(k) \neq 0$

$\therefore z = k$, $k \in \mathbb{Z}$ pol av ordning 1.