Storgruppsövning 13/9-13

$D \subset \mathbb{C}$, öppen sammanhängande

$A(D) = \{f : D \to \mathbb{C},\ f \text{ holomorf}\}$

2.1.15 Låt $f \in A(D)$ och antag att $f'(z) = 0$ $\forall z \in D$

Påstående: f = konstant på D.

Bevis: $f = u + iv$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$\operatorname{Im}(h) = 0$: $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x = 0 \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = u(y) \\ v(x,y) = v(y) \end{cases}$$

$\operatorname{Re}(h) = 0$: $f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_y = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C \\ v = D \end{cases}$$

$\therefore f(z) = C + iD$ konstant. ▨

2.3 Cauchys sats och integralformel

Cauchys sats

Antag att $f \in A(D)$. Låt γ vara en styckvis deriverbar, enkel, sluten kurva i D. Då gäller att $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Direkt konsekvens av C.R och Green.

Cauchys integralformel (CIF):
Antag $f \in A(D)$, γ som i CS, låt Ω vara området innanför γ.
Då gäller att $f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-p}\,dz$

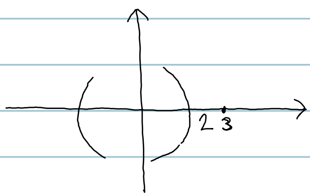
$\forall p \in \Omega$.

Konsekvens av CS.

2.3.2 Beräkna följande integral m.hj.a CS eller CIF:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)}\,dz$$

Lösning:



$f(z) = \frac{e^z}{z-3}$ holomorf på omgivningen till $\{|z| \leq 2\}$.

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)}\,dz = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z}\,dz \overset{CIF}{=} 2\pi i\, f(0) =$$

$$= 2\pi i \frac{e^0}{0-3} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\pi i}{3}$$

2.3.2* Beräkna $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z-3)}\,dz$

Lösning:
$f(z)=e^z$ holomorf på omg. till $\{|z|\leq 4\}$.
Partialbråksuppdela!

$$\frac{1}{z(z-3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-3}$$

$$A(z-3)+Bz=1$$

$z=3$: $3B=1 \Leftrightarrow B=1/3$

$z=0$: $-3A=1 \Leftrightarrow A=-1/3$

$$\Rightarrow \frac{1}{z(z-3)} = -\frac{1}{3z}+\frac{1}{3(z-3)}$$

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z(z-3)}\,dz = \int_{|z|=4} e^z\left(-\frac{1}{3z}+\frac{1}{3(z-3)}\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{|z|=4}\frac{e^z}{z-0}\,dz + \frac{1}{3}\int_{|z|=4}\frac{e^z}{z-3}\,dz =$$

$$\overset{\text{CIF}}{=} -\frac{1}{3}2\pi i e^0 + \frac{1}{3}2\pi i e^3 = \frac{2\pi i}{3}(e^3-1)$$

2.3.4 Beräkna $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z}\,dz$

Lösning: $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ holo.

$$\Rightarrow \int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z-0}\,dz \overset{\text{CIF}}{=} 2\pi i \sin(0) = 0$$

(2.3.8) Använd tekniken i ex. 6 och 7 (föreläsn.) för att beräkna

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = I$$

~~Lösning~~: Idé: Tänk på I som en parametriserad linjeintegral och använd CIF.

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2} =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1-\frac{1}{4}\left(e^{2i\theta}-2+e^{-2i\theta}\right)} \frac{4}{4} =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{4\,d\theta}{6-\left(e^{2\theta i}+e^{-2i\theta}\right)} = \left\{\begin{array}{l} z = e^{2i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi \\ dz = 2ie^{2i\theta}d\theta \\ d\theta = \frac{dz}{2ie^{2i\theta}} = \frac{dz}{2iz} \end{array}\right\} =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{\cancel{4}2}{6-(z+1/z)} \frac{dz}{\cancel{2}iz}$$

$$= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{6z-z^2-1} = -\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-6z+1} = (*)$$

$$z^2-6z+1=0 \Longrightarrow z = 3 \pm \sqrt{8}$$

$$z_1 = 3+\sqrt{8}, \quad z_2 = 3-\sqrt{8}$$

$$(*) = -\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \left\{ f(z) = \frac{1}{z-z_1} \text{ holo på } \{|z| \le 1\} \right\}$$

$$= -\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-z_2} dz \overset{CIF}{=} -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i f(z_2) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$