Storgruppsövning 11/9-13

Linjeintegralen 1.6

Flervar: $\mathbb{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektorfält, γ kurva

$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$ linjeintegralen av $\mathbb{F}$ längs γ

Låt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ param. av γ. Då

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

Komplext: $\mathbb{F} \longleftrightarrow f(z)$

$d\mathbf{r} \longleftrightarrow dz$

$\mathbf{r}(t) \longleftrightarrow \gamma(t), z(t), z(\theta) \ldots$

På motsvarande sätt gäller här:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

1.6.9 a) Påst: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{om } k = 0 \\ 0 & \text{om } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$

Bevis: övning!

b) Påst: $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z-p} = \begin{cases} 1 & \text{om } |p| < 1 \\ 0 & \text{om } |p| > 1 \end{cases}$

Bevis: $|p| < 1$: $|z| = 1 \Longrightarrow \left|\frac{p}{z}\right| < 1$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1 - p/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p}{z}\right)^k \quad \text{(abs. konv.)}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{z-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{z^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z-p}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{z^{k+1}}\,dz=\{\text{abs.konv.}\}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{0}^{\infty}p^k\int_{|z|=1}\frac{1}{z^{k+1}}\,dz=\left\{\begin{array}{l}z=e^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi\\ dz=ie^{i\theta}\,d\theta\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\sum_{0}^{\infty}p^k\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cancel{e^{i\theta}}e^{ik\theta}}\cancel{i}\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}p^k\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\theta}\,d\theta=\{\text{se a)}\}=p^0=1$$

<u>$|p|>1$:</u> $|z|=1\implies\left|\frac{z}{p}\right|<1$

$$\implies\frac{1}{1-\frac{z}{p}}=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{p}\right)^k$$

$$\frac{1}{z-p}=-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-z/p}=-\sum_{0}^{\infty}\frac{z^k}{p^{k+1}}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z-p}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\sum_{0}^{\infty}\frac{z^k}{p^{k+1}}=\{\text{abs. konv.}\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}\int_{|z|=1}z^k\,dz=\left\{\begin{array}{l}z=e^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi\\ dz=ie^{i\theta}\,d\theta\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\cancel{i}}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}\,\cancel{i}e^{i\theta}\,d\theta=$$

$$=-\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{p^{k+1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(k+1)\theta}\,d\theta$$ aldrig noll då $k=0,1,2\ldots$

$$=\{(a)\}=0.\quad\blacksquare$$

<u>Vanligt fel:</u>

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z-p}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}-p}\,d\theta=\Big[\log(e^{i\theta}-p)\Big]_0^{2\pi}=0\ ???$$

$\log(z)$ är <u>inte</u> en funktion! ("inversen" till e^z ← ej injektiv)

1.6.10 Låt $f=u+iv$ kont.

$\gamma=\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ der.bar

Påst: $\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)dz\right)=\int_\gamma(udx-vdy)$

$\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)dz\right)=\int_\gamma(vdx+udy)$

där $dx=x'(t)dt$ och $dy=y'(t)dt$

Bevis: $\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt=$

$=\int_a^b(u(\gamma(t))+iv(\gamma(t)))(x'(t)+iy'(t))dt=$

$=\int_a^b(u(\gamma(t))x'(t)dt-v(\gamma(t))y'(t)dt)+$

$+i\int_a^b(u(\gamma(t))y'(t)dt+v(\gamma(t))x'(t)dt)=$

$=\int_\gamma(udx-vdy)+i\int_\gamma(udy+vdx)$ ▨

2.1 Analytiska och harmoniska funktioner

Allt börjar med en oskyldig liten def. ...

Definition

Vi säger att $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ är analytisk/komplext deribar/holomorf i en $z_0\in\mathbb{C}$ om gränsvärdet

$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existerar (Obs! $h\in\mathbb{C}$)

Betyder att oavsett hur $h\in\mathbb{C}$ än går mot noll, går differenskvoten mot ett och samma tal.

Kan visa att

$f'(z_0)$ existerar $\Leftrightarrow \begin{cases} u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) \\ u'_y(x_0,y_0) = -v'_x(x_0,y_0) \end{cases}$ (*)

(*) kallas för Cauchy-Riemanns ekvation((

CR + Green gör $\mathbb{C}$-analys mycket annorlunda från $\mathbb{R}$-analys.

Definition

Låt $D \subset \mathbb{C}$ vara en öppen mängd.

Vi säger att $u \in C^2(D)$ är harmonisk i D om $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ i D.

Sats

Om $f = u + iv$ holomorf, så är både u och v harmoniska.

Givet u harmonisk kan vi ta fram v s.a u och v uppfyller CR. v kallas då för det harmoniska konjugatet till u.

2.1.20 d) Finn det harmoniska konjugatet till $u = \cosh(y)\sin(x)$

Lösning:

Vill hitta v s.a $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \cosh(y)\cos x$ $\left(\frac{d}{dy}\sinh(y) = \cosh(y)\right)$

$v(x,y) = \sinh(y)\cos(x) + g(x)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\sinh(y)\sin x + g'(x) \\ &\parallel \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= -\sinh(y)\sin x \end{aligned}\right\} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C$$

$\therefore v(x,y) = \sinh(y)\cos(x) + C$

4.1 Harmoniska funktioner

4.1.1 e) Finn det harmoniska konjugatet till $u(x,y) = \arctan(x)$

Lösning:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow v(x,y) = \frac{y}{1+x^2} + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2xy}{(1+x^2)^2} + g'(x) \overset{"}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} \leftarrow \text{beror av både } x \text{ och } y \quad ???$$

beror endast av x

Meningslöst att prata om harm. konj. till u då u ej harmoniskt!

4.1.12 a) Antag att både u och u^2 är harmoniska på D, då ska vi visa att $u \equiv$ konstant.

Bevis

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 2u \cdot u_x \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2u \cdot u_x) = 2u_x^2 + 2u \cdot u_{xx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) = 2u_y^2 + 2u \cdot u_{yy}$$

$$0 = \Delta(u^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) =$$

$= 2(u_x^2+u_y^2)+2u(\underbrace{u_{xx}+u_{yy}}_{=0 \text{ ty } u \text{ harmonisk}})$

$\Longrightarrow u_x = u_y = 0$

$\Longrightarrow u = \text{konstant}.$ $\blacksquare$

b) Antag att både u och u^n är harmoniska, för något $n \geq 2$. Visa att u=konstant.

Bevis

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^n) = n u^{n-1} u_x.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^n) = n(n-1)u^{n-2}u_x^2 + n u^{n-1} u_{xx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^n) = n(n-1)u^{n-2}u_y^2 + n u^{n-1} u_{yy}$$

$$0 = \Delta(u^n) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^n) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^n) =$$

$$= n(n-1)u^{n-2}(u_x^2+u_y^2) + n u^{n-1}(\underbrace{u_{xx}+u_{yy}}_{=0})$$

$\Longrightarrow u$=konstant (se a)) $\blacksquare$