Storgruppsövning 4/9-13

1.1 Komplexa tal

1.1.4 Låt $z = x + iy$, $z \neq 0$

a) Finn $\text{Re}(\frac{1}{z})$, $\text{Im}(\frac{1}{z})$

b) Visa att $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$

$\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$

Lösning

a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$

$\therefore \text{Re}(1/z) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\text{Im}(1/z) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

b) $\text{Re}(iz) = \text{Re}(i(x+iy)) = \text{Re}(-y+ix) = -y = -\text{Im}(z)$

$\text{Im}(iz) = \text{Im}(i(x+iy)) = \text{Im}(-y+ix) = x = \text{Re}(z)$

1.1.12 Låt $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$

Bevisa följande påståenden med hjälp av induktion

a) $|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2|\ldots|z_n|$ (*)

B-vis

(i) Antag $n=2$

Vill visa att $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Vet att $|z|^2 = z\bar{z}$

$\Longrightarrow |z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$\Longrightarrow |z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})} = \sqrt{z_1\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2} =$

$= \sqrt{z_1\bar{z}_1}\sqrt{z_2\bar{z}_2} = |z_1||z_2|$

(ii) Antag att (*) sann då $n=k$

(iii) Visa att om (ii) gäller, är (*) sann även då $n=k+1$.

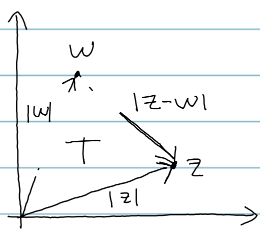
$$|\underbrace{z_1 z_2 \ldots z_k}_{w} z_{k+1}| = |w z_{k+1}| \overset{(i)}{=} |w||z_{k+1}| =$$

$$= |z_1 z_2 \ldots z_k||z_{k+1}| \overset{(ii)}{=} |z_1||z_2| \ldots |z_k||z_{k+1}| \quad \blacksquare$$

(1.1.15) Visa att en triangel med hörn i origo, z och w är liksidig omm

$|z|^2 = |w|^2 = 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$

Bevis



Ser direkt att T liksidig omm

$|z| = |w| = |z-w|$

$$\Leftrightarrow \quad |z|^2 = |w|^2 = |z-w|^2$$

$$|z-w|^2 = (z-w)(\overline{z-w}) = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) =$$

$$= |z|^2 + |w|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) =$$

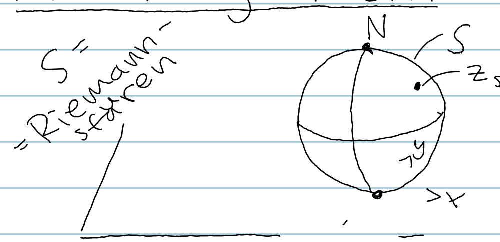
$$= \{ z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\mathrm{Re}(z) \} =$$

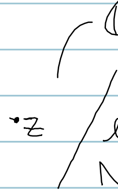
$$= |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

$$|z|^2 = |z-w|^2 \Leftrightarrow \cancel{|z|^2} = \cancel{|z|^2} + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 = 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \quad \blacksquare$$

1.2 Lite geometri





Varje punkt $z \in \mathbb{C}$ svarar entydigt mot en punkt $z_s \in S$. Dra en rät linje mellan z och N. z_s är den punkt (förutom N)

där linjen skär S.
Kan tänka i termer av S istället för $\mathbb{C}$.
Fördel: S har en extra punkt, N, som man kan tänka på som ∞.
(Kommer återvända till detta om några veckor)

1.2.35 Låt $L = \{z \in \mathbb{C};\ z = x + ia,\ a > 0\}$

$L^{-1} = \{1/z;\ z \in L\}$

$C = \{w \in \mathbb{C};\ |w + \frac{i}{2a}| = \frac{1}{2a}\}$

Påstående: $L^{-1} = C$

Bevis:

$L^{-1} \subset C$: Låt $w \in L^{-1}$

Då $w = 1/z$ där $z \in L$, så $w = \frac{1}{x+ia}$

Uppfyller w kravet på att få tillhöra C?

$$\left|w + \frac{i}{2a}\right| = \left|\frac{1}{x+ia} + \frac{i}{2a}\right| = \left|\frac{2a + i(x+ia)}{2a(x+ia)}\right| =$$

$$= \left|\frac{a+ix}{2a(x+ia)}\right| = \frac{|a+ix|}{2|a||x+ia|} = \frac{\cancel{\sqrt{a^2+x^2}}}{2a\cancel{\sqrt{x^2+a^2}}} = \frac{1}{2a}$$

$\therefore\ w = \frac{1}{x+ia} \in C$

$C \subset L^{-1}$: Låt $w \in C$, vill $w \in L^{-1}$

$\Leftrightarrow w = 1/z$ där $z \in L \Leftrightarrow w = 1/(x+ia)$

Antag att $w = 1/(x+iy)$

Visa att $w \in C \Rightarrow y = a$

$$\left|\frac{1}{x+iy} + \frac{i}{2a}\right| = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow \left|\frac{2a + i(x+iy)}{2a(x+iy)}\right| = \frac{1}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(2a-y) + ix}{2a(x+iy)}\right| = \frac{1}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2a-y)^2+x^2}}{\cancel{2}a\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\cancel{2}a} \Leftrightarrow (2a-y)^2+\cancel{x^2} = \cancel{x^2}+y^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2-4ay+\cancel{y^2}=\cancel{y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a(a-y)=0$$

$$\therefore \quad y=a \qquad \blacksquare$$

Obs! Har hela tiden förutsatt att $w \neq 0$. Men $|0+\frac{i}{2a}|=\frac{1}{2a}$ så $0 \in C$

Har endast visat $C\setminus\{0\}=L^{-1}$.

Så $L^{-1} \neq C$ i $\mathbb{C}$!

Betrakta L, L^{-1} och C som objekt på S istället.

Varje rät linje i $\mathbb{C}$ motsvarar en cirkel på S som passerar genom $N=\infty$. I så fall $\infty \in L \Rightarrow 0=1/\infty \in L^{-1}$

$\therefore$ $L^{-1}=C$ på S! (men inte på $\mathbb{C}$)

1.2.36 L rät linje genom origo

$L^{-1}=\{1/z;\ z\in L\}$

Påstående: L^{-1} också rät linje genom origo.

Bevis

$L=\{z=x+iy;\ y=kx,\ k \text{ reell konstant}\}=$

$=\{z=x+ikx;\ x\in\mathbb{R}\}$

eller $L=\{z=iy;\ y\in\mathbb{R}\}$ – Lämnas som övning

Om $w\in L^{-1}$ så $w=1/z$ där $z\in L$

Återigen, ej sant i $\mathbb{C}$, men sant på S.

I $\mathbb{C}$: $w=1/z$ där $z\in L\setminus\{0\}$

$0\notin L^{-1}$

På S: $\infty\in L$ så $0\in L^{-1}$, $1/0=\infty\in L^{-1}$ inga problem!

Förutom $w=0,\infty$ så har vi

$$w=\frac{1}{x+ikx}=\frac{x-ikx}{x^2+k^2x}=\frac{1}{x(1+k^2)}-i\frac{k}{x(1+k^2)}$$

Sätt $u=\frac{1}{x(1+k^2)}$, $x\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}\Rightarrow u\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$

$\therefore L^{-1}=\{w=u-iku;\ u\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}\}$

$\Rightarrow L^{-1}$ rät linje genom origo med lutning $-k$. $\blacksquare$