Föreläsning 1/10-13 em

Elektromagnetism (vågekvationer) (kap. 11)
Statiska elektriska och magnetiska fält (11.1)
Maxwells ekvationer (11.2), beskriver tidsberoende elektriska och magnetiska fält.

Elektrostatik

Laddningstäthet $\rho(\mathbf{r})$ dvs elektrisk laddning i en volym V är $\int_V dV\, \rho(\mathbf{r})$ ($\rho(\mathbf{r})$ enhet: As/m³ = Coulomb/m³)

elektrisk laddning/volymsenhet

Elektrisk fältstyrka $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (enhet: V/m)

De båda är relaterade enligt

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

(ε_0 = permetiviteten för vakuum = $= 8{,}8 \cdot 10^{-12}$ C/(Vm))

ex elektriskt fält:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

r = avstånd till origo
q = konstant
$\hat{\mathbf{r}}$ = radiell enhetsvektor

fält från punktladdning q i origo. (Coulombs lag)
Vad är alltså $\nabla \cdot \mathbf{E}$ då $\mathbf{r} \neq 0$?
Eftersom $\rho(\mathbf{r}) = 0$ då $\mathbf{r} \neq 0$ så borde vi ha $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ där.

Vi kollar: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{x^2+y^2+z^2} \frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right] \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} =$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \left[\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(\;)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(\;)^{3/2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(\;)^{3/2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(\ )^{3/2}} + x\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(\ )^{5/2}}2x + \frac{\partial}{\partial y}(\ ) + \frac{\partial}{\partial z}(\ )\right\} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(\ )^{3/2}} - 3\frac{x^2}{(\ )^{5/2}} + \frac{1}{(\ )^{3/2}} - 3\frac{y^2}{(\ )^{5/2}} + \frac{1}{(\ )^{3/2}} - 3\frac{z^2}{(\ )^{5/2}}\right\}$$

$= 0$ förutsatt att $(x, y, z) \neq (0,0,0)$

Dessutom har vi $\boxed{\nabla \times \mathbb{E} = 0}$
vilket är ekvivalent med att $\mathbb{E} = -\nabla\phi$ för någon elektrisk potential $\phi(\mathbb{r})$

Magnetostatik

Det finns inte några magnetiska laddningar (magnetiska monopoler).
Men det finns magnetiska fält $\mathbb{B}(\mathbb{r})$.

$\boxed{\nabla \cdot \mathbb{B} = 0}$ $\boxed{\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{j}}$

$\mathbb{j}$ ← elektrisk strömtäthet
μ_0 ← vakuums magnetiska permeabilitet

Statiska ekvationer

$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla \times \mathbb{E} = 0$ (*)

$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$, $\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{j}$ (**)

(*) och (**) måste ändras i en dynamisk situation
Ta divergensen av (**):

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbb{j}$

Men VL $= 0$ medan HL $= \mu_0\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$ ty $\nabla \cdot \mathbb{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$
(kontinuitetsekvationen för elektrisk laddning)

Så (**) kan inte stämma i allmänhet!

Ersätt den med $\boxed{\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}}$

Ta divergensen $-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$

Använd att $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\Rightarrow -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}$ kontinuitetsekvationen!

Men (*) då?

Dynamiska magnetiska fält kan ge upphov till $\nabla \times \mathbf{E}$.

Ersätt (*) med $\boxed{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0}$

Alla inringade ekvationer kallas för Maxwells ekvationer. Kontinuitetsekvationen följer från dessa.

Intressant exempel på tidsberoende lösning till Maxwells ekvationer.

Vi ansätter en planvågslösning (rumsberoende $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$) vågvektor: $\mathbf{k}$

(våg som utbreder sig i $\mathbf{k}$'s riktning med våglängd $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$. Ändra $\mathbf{r}$ med en vektor $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, där $\Delta\mathbf{r}$ är parallell med $\mathbf{k}$ och har storleken λ.

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \longrightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i2\pi} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ är alltså periodisk med perioden $\Delta\mathbf{r}$.)

med tidsberoende $e^{i\omega t}$ ← vinkelfrekvens

$\omega = 2\pi\nu$, $\nu = 1/T$ ← periodtiden.

konstant vektor

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\mathbb{r},t) = \mathbb{e}\, e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}+\omega t)} + \text{komplext konjugat} \\ \mathbb{B}(\mathbb{r},t) = \mathbb{b}\, e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}+\omega t)} + \text{— " —} \end{cases}$$

Sätt in detta i Maxwells ekvationer med $\underbrace{\rho = 0 \text{ och } \mathbb{j} = 0}_{\text{(vakuum)}}$

$$0 = \nabla\cdot\mathbb{E} = i\mathbb{k}\cdot\mathbb{e}\, e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}+\omega t)} + \text{c.c.} \text{ dvs } \boxed{\mathbb{k}\cdot\mathbb{e} = 0}$$

$$0 = \nabla\times\mathbb{E} + \frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} = (i\mathbb{k}\times\mathbb{e} + i\omega\mathbb{b})\, e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}+\omega t)}$$

$$\boxed{\mathbb{k}\times\mathbb{e} + \omega\mathbb{b} = 0}$$

$$0 = \nabla\cdot\mathbb{B} = i\mathbb{k}\cdot\mathbb{b}\, e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}+\omega t)} \Rightarrow \boxed{\mathbb{k}\cdot\mathbb{b} = 0}$$

$$0 = \nabla\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} = (i\mathbb{k}\times\mathbb{b} - i\varepsilon_0\mu_0\omega\,\mathbb{e})\, e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}+\omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{k}\times\mathbb{b} - \varepsilon_0\mu_0\omega\,\mathbb{e} = 0}$$

Givet $\mathbb{k}$ (vågvektorn) finner vi att $\mathbb{e}$ och $\mathbb{b}$ är ortogonala mot $\mathbb{k}$ och mot varandra.

Dessutom har vi $\begin{cases} k\cdot|\mathbb{e}| = \omega\cdot|\mathbb{b}| \\ k\cdot|\mathbb{b}| = \varepsilon_0\mu_0\omega|\mathbb{e}| \end{cases}$

$$\frac{|\mathbb{e}|}{|\mathbb{b}|} = \frac{\omega}{k} = \frac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = \text{ljusets hastighet i vakuum.}$$

vågens utbredningshastighet