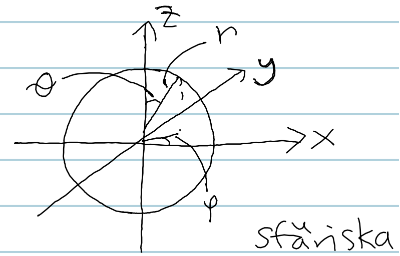
# Föreläsning 10/9-13 em

## Kroklinjiga koordinater

speciellt viktiga

- sfäriska $r\,\theta\,\varphi$
- cylindriska $\underbrace{\rho\,\varphi}_{\text{polära}}\,z$



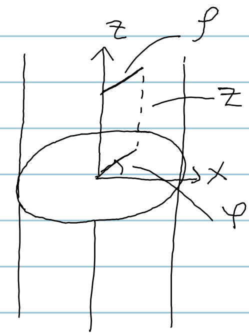

## Koordinater $u_1 u_2 u_3$

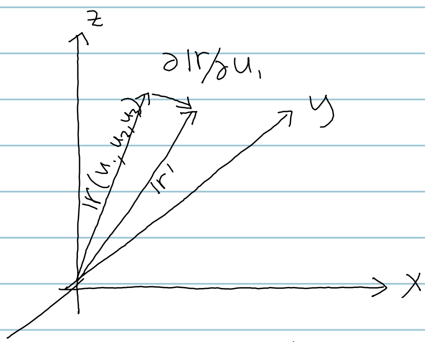
översättningstabell:

$x = x(u_1, u_2, u_3)$

$y = y(\text{———})$

$z = z(\text{———})$




ändra en av koord. i taget $\Longrightarrow$ de riktningarna tar man som basfaktorer

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(u_1+du_1, u_2, u_3) = \mathbf{r}(u_1,u_2,u_3) + du_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3)$$

Välj $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|}$ ← skalfaktor $h_1$

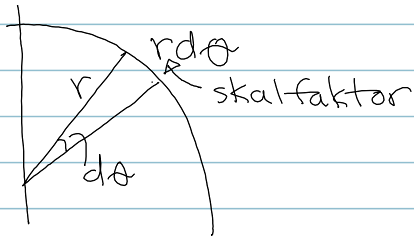
$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

ex $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta)$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Skalfaktor $h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| =$

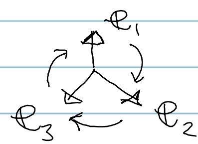
$$= \sqrt{\underbrace{r^2(\cos^2\theta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \sin^2\theta)}_{=1}} = r$$




Vi vill bara ha koordinatsystem där

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Högersystem: $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$




Om vi gör en förändring av koord. $du_i$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}du_3 = \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$= h_1\mathbf{e}_1 du_1 + h_2\mathbf{e}_2 du_2 + h_3\mathbf{e}_3 du_3$$

$(\text{avstånd})^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$

## Skalfaktorer

sfäriska $\begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\varphi = r\sin\theta \end{cases}$ cylind-riska $\begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\varphi = \rho \\ h_z = 1 \end{cases}$

## Koordinatlinjer

Kurvor som fås då en koord. varierar

ex r-linje: stråle genom origo
$\theta$-linje: 1/2-cirkel

## Koordinatytor

Ytor som fås då en koord. varierar

ex r-yta: sfär
$\theta$-yta: kon

## Gradien $\nabla\phi$ "i kroklinjiga koord."

Alltså: Om $\phi$ är givet som $\phi(u_1, u_2, u_3)$, vad är då $\nabla\phi$ uttryckt i basvektorerna $e_i$?

Slarvigt argument:

Derivatan av $\phi$ ~ "ändring av $\phi$" / sträckan — skalfaktor × ändring av koord.

I Cartesiska koord.:

$$\nabla\phi = \hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Gissning: $\nabla\phi = \frac{1}{h_1}e_1\frac{\partial\phi}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2}e_2\frac{\partial\phi}{\partial u_2} + \dots$ ?

Gör en ändring av koord. $du_i$, $i=1,2,3$

$\Rightarrow$ Förflyttning: $d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^{3} h_i \mathbf{e}_i du_i$

$$\Rightarrow d\Phi = \begin{cases} d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi = \sum_{i=1}^{3} h_i \mathbf{e}_i du_i \cdot \nabla \phi \\ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} du_i \end{cases}$$

= för alla ändringar $du_i$

$$\Rightarrow h_i \mathbf{e}_i \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \nabla \phi = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

$$\Rightarrow \nabla \phi = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

Sfäriska: $\nabla \phi(r, \theta, \varphi) = \hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$

Cylindriska: $\nabla \phi(\rho, \varphi, z) = \hat{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z}$

---

$\mathbf{F} = \mathbf{r} = (x, y, z) = r\hat{r}$

$\nabla \cdot \mathbf{F} = \cancel{\frac{\partial F_r}{\partial r} = 1} ?$

$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$