30/8 2011

Komplexanalys

Bo Berndtsson

Komplexa tal

$z = x+iy;\ x,y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}$

$i^2 = -1$

I $\mathbb{C}$ har ekvationen $z^2=-1$ en lösning ($z=i$) (Gauss, tidigt 1800-tal)

Fantastisk konsekvens: Varje algebraisk ekvation $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ har en lösning i $\mathbb{C}$.
Detta är algebrans fundamentalsats.

Jämför ekvationen $x^2=2$, vilken inte har en rationell lösning. $\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$.

Däremot $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ löser $x^2=2$.

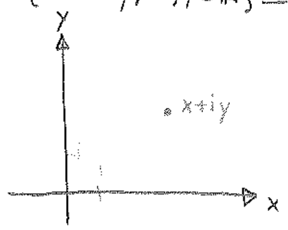
Vi får tal på formen $z = x+y\sqrt{2}$, vilka ej löser till exempel $x^2=3$.

$\mathbb{C}$ dyker upp i många sammanhang:

Fysik (Elektromagnetism, Kvantmekanik)

Signalanalys (Fouriertransform)

$\mathbb{C} = \{z = x+iy;\ x,y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$.



Notera: $\mathbb{R}^3$ saknar utvidgning på sådant sätt.
$\mathbb{R}^4$ har kvaternionerna som analog

Viktig operation: $\bar{z} = x - iy$ KONJUGATET

$z = x+iy,\ w = u+iv$

$zw = xu - yv + i(yu+xv)$

$\bar{z}\bar{w} = xu - yv - i(yu+xv) = \overline{zw}$

Inför $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z|^2 = z\bar{z}$

OBS! $|zw| = |z||w|$

Det vill säga: $\sqrt{(xu-yv)^2+(yu+xv)^2} = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$. Jobbigt bevis

Bevis för $|zw| = |z||w|$:

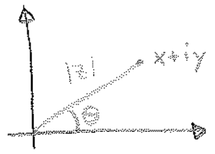
$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$

Division

Hur ska $\frac{z}{w}$ beräknas? Förläng formellt med $\frac{\bar{w}}{\bar{w}}$.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{1}{|w|^2} z\bar{w}$$

Polär framställning



$x = |z|\cos\theta$
$y = |z|\sin\theta$

$$z = x+iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Notera att $\theta = \arg z$ ej är entydigt bestämt, utan bara så när som på $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$z \cdot w = (r\cos\theta + ri\sin\theta)(\rho\cos\varphi + \rho i\sin\varphi) = r\rho(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)) =$$
$$= r\rho(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$$

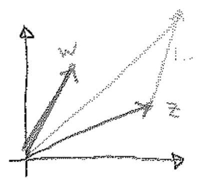
Hemligheten bakom detta: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$

Exempel $\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$

Speciellt: de Moivres formel
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \left[(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}\right]$$

Triangelolikheten

$|z+w| \leq |z| + |w|$



Bevis: Välj θ så att
$e^{i\theta}(z+w) \in \mathbb{R}^+$, $\theta = -\arg(z+w)$

$$|z+w| = |e^{i\theta}(z+w)| = \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}(z+w)\right] = \mathrm{Re}\, e^{i\theta}z + \mathrm{Re}\, e^{i\theta}w \leq |e^{i\theta}z| + |e^{i\theta}w| = |z| + |w|$$

Ekvationen $z^n = A$

$A = a + ib;\ a, b \in \mathbb{R}$

Sätt $\rho e^{i\varphi} = a$

Ansätt $z = re^{i\theta}$

$z^n = r^n e^{ni\theta} = \rho e^{i\varphi} = A$

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi \quad (\text{mod } 2\pi) \end{cases}$$

Alltså:

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

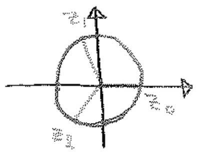
Exempel $z^2 = 1$

$1 = e^{i\cdot 0},\ \varphi = 0$

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \cos k\pi + i\sin k\pi = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -1, & k = 1 \end{cases}$$

$z^3 = 1$

$$z = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ & \end{cases}$$



De tredje enhetsrötterna.

Geometrisk innebörd

Räta linjen: $ax + by + c = 0$

$A = a + ib$

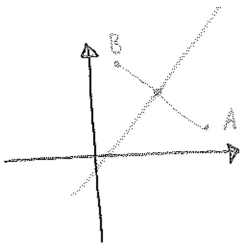
$z = x + iy$ $\quad \text{Re}\, z\bar{A} = \text{Re}\left[(x+iy)(a+ib)\right] = ax + by$

Alltså: $\text{Re}\, z\bar{A} = c$

Cirklar: $|z - c| = r$

Observera att $|z - w|^2 = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - w\bar{z} - \bar{w}z = |z|^2 + |w|^2 - w\bar{z} - \overline{w\bar{z}} =$
$= |z|^2 + |w|^2 - 2\text{Re}\,(w\bar{z})$

Ex $|z-A| = |z-B|$



$|z-A|^2 = |z-B|^2$

$|z|^2 + |A|^2 - 2\operatorname{Re} z\bar{A} = |z|^2 + |B|^2 - 2\operatorname{Re} z\bar{B}$

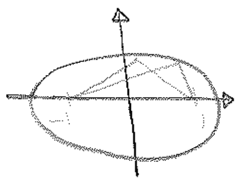
$\operatorname{Re} z(\overline{B-A}) = \frac{1}{2}(|B|^2 - |A|^2)$ Rät linje

Annat ex

$|z-A| + |z-B| = R \gg 0$

Ta till exempel $A=1$, $B=-1$

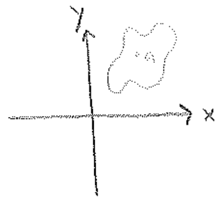
$|z-A| = R - |z-B|$



Imorgon: Funktioner $z \longrightarrow f(z)$, $z, f(z) \in \mathbb{C}$

Analyticitet, $\exists g(z)$: $g(z) = f'(z)$

$\Omega \in \mathbb{C}$



<u>DEF.</u> $\Delta(a,r) = \{z;\ |z-a|<r\}$

<u>DEF.</u> Ω öppen om $\forall a \in \Omega\ \exists\ \Delta(a,r) \in \Omega$

$\partial\Omega := \{a \in \mathbb{C};\ \forall r>0\ \exists b,c \in \Delta(a,r)\ \ b \in \Omega\ \ c \in \Omega^c\}$

Ω sluten om Ω^c öppen $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega \subseteq \Omega$ (visa själv)

<u>Ex.</u> $\Omega = \{z;\ |z|<1\}$ öppen

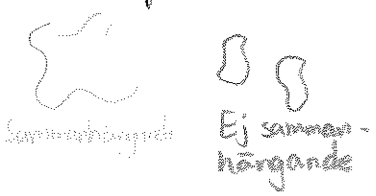
$\partial\Omega = \{z;\ |z|=1\}$ rand

$E = \Omega \cup \partial\Omega = \{z;\ |z| \leq 1\}$ sluten

E^c öppen

Är till exempel $A = \{x+iy;\ x,y \in \mathbb{Q}\}$

<u>DEF.</u> Ω sammanhängande om $\forall a,b \in \Omega$ så finns en kurva γ som förbinder a & b, och sådan att $\gamma \in \Omega$



Låt $z \mapsto f(z)$ vara en funktion.

<u>DEF.</u> $\Omega = D(f) =$ definitionsmängd $= \{z \in \mathbb{C};\ f(z)$ är definierad$\}$

$R(f) = \{f(z);\ z \in D(f)\}$

<u>Ex.</u> $f(z) = \frac{1}{z}$ definieras för $z \neq 0$

<u>Ex.</u> $\Omega = \Delta(2,1) = \{z;\ |z-2|<1\}$

$f(z) = \frac{1}{z}$ för $z \in \Omega$

Vad är $R(f)$?

$R(f) = \{w = \frac{1}{z} ;\ |z-2|<1\} = \{w;\ |\frac{1}{w}-2|<1\}$

$|\frac{1}{w}-2|<1 \Leftrightarrow |w||\frac{1}{w}-2|<|w| \Leftrightarrow |1-2w|^2<|w|^2 \Leftrightarrow 1+4|w|^2-4\mathrm{Re}\,w<|w|^2$

$\Leftrightarrow |w|^2-\frac{4}{3}\mathrm{Re}\,w+\frac{1}{3}<0 \Leftrightarrow |w|^2-2\mathrm{Re}\,\overline{\tfrac{2}{3}}w+\frac{4}{9}<\frac{4}{9}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow |w-\frac{2}{3}|<\frac{1}{3}$

GRÄNSVÄRDEN

Gränsvärde för en följd:

DEF. För följden $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ säger man $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ om $|z_n - A| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Och:

$z_n \to \infty$ om $|z_n| \to \infty$

PROP. $z_n \to A \quad w_n \to B$

$z_n + w_n \to A+B$ (i)

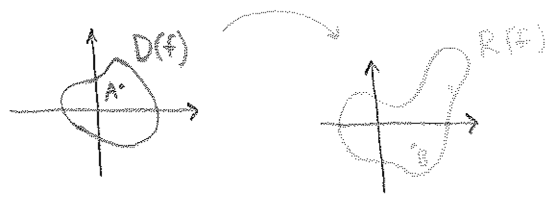
$z_n - w_n \to A-B$ (ii)

$z_n w_n \to AB$ (iii)

$\frac{z_n}{w_n} \to \frac{A}{B},\ B \neq 0$ (iv)

DEF. $\lim_{z\to A} f(z) = B$ om:

$z_n \to A \Rightarrow f(z_n) \to B$



DEF. f är kontinuerlig om $\lim_{z\to A} f(z) = f(A) \quad \forall A \in D(f)$

PROP. Alla polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ är kontinuerliga

Bevis: Vill visa $z \to A \Rightarrow p(z) \to p(A)$. Skriv $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

$z \to A \Rightarrow (z \cdot z \to A \cdot A \Leftrightarrow z^2 \to A^2) \therefore z^n \to A^n$

$a_k \to a_k$ då $z \to A$

Alltså $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \to \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = p(A)$

DEF. f är deriverbar i a om $\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existerar.

Fråga: Är Re z deriverbar i 0?
Är |z| deriverbar i 0?

$f(z) = \operatorname{Re} z$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{x}{z}$$

Ta t.ex. z reellt: $\lim_{z\to 0} \frac{x}{x} = 1$

Ta sedan z rent ~~im~~ imaginärt: $\lim_{z\to 0} \frac{0}{z} = 0$

Ex. $f(z) = z^k$, $k\in\mathbb{N}$ är deriverbar i alla punkter, ty:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{z^k - a^k}{z-a} = \sum_{n=0}^{k-1} a_n z^{k-1-n} \longrightarrow k a^{k-1}$$

Prop. Varje polynom är deriverbart (överallt).
(Detsamma är sant för alla $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$)

Oändliga serier

Def: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ är konvergent om $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k$ existerar

Obs! $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ är konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} c_k \wedge \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} c_k$ konvergenta

Reella konvergenskriterier

I Låt $a_k \in \mathbb{R}$. Om $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ konvergerar så konvergerar $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$

II. Rotkriteriet

Antag att $a_k \geq 0$, och $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$

Då är $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent om $A<1$ och divergent om $A>1$.

Komplexa konvergenskriterier

I. Låt $a_k \in \mathbb{C}$. Om $\sum_{k=m}^{\infty} |c_k| < \infty$ så är $\sum_{k=m}^{\infty} c_k$

Bevis: $\sum_{k=m}^{\infty} |c_k| \geq \sum_{k=m}^{\infty} |\operatorname{Re} c_k| \therefore \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{Re} c_k$, $\sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{Im} c_k$ konvergerar

$\therefore \sum_{k=m}^{\infty} c_k$ konvergerar

II. Rotkriteriet

Antag $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = A$.

Då konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ om $A<1$ och divergerar om $A>1$

III. Kvotkriteriet

Antag $\lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = A$. Då gäller samma slutsats som i II.

IV. Antag $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = A$

Då konvergerar $\sum_{k=m}^{\infty} c_k z^k$ om $|z|<\frac{1}{A}$ och divergerar om $|z|>\frac{1}{A}$

Bevis: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}\, |z| = A|z|$.

IV följer nu av II

ELEMENTÄRA FUNKTIONER

Kom ihåg att vi vet $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

I allmänhet: $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Konvergensradie:

$c_n = \frac{1}{n!}$

Kvotkriteriet: $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\therefore$ e^z är definierad på hela $\mathbb{C}$

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}$$

$$\text{Re}\, e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} = \cos\theta$$

$$\text{Im}\, e^{i\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \theta^k}{(2k-1)!}$$

31/8 2011
e.m.

DEF: f deriverbar i a om $f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{\tau\to 0} \frac{f(z+\tau)-f(z)}{\tau}$

Cauchy-Riemanns Ekvationer

Sats: $f'(a)$ existerar $\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$ i a

Mer explicit: $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$, för $f = u + iv$

Bevis: $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\mathbb{R}\ni k\to 0} i\,\frac{f(a+ik)-f(a)}{ik} = i f'(a)$$

$$\because \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = f(a) - f(a) = 0$$

Sats: Antag att $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ existerar och att f är differentierbar, det vill säga att $f(a+(h+ik)) - f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + o(|h|+|k|)$, $\left(\frac{o(|h|+|k|)}{|h|+|k|} \to 0 \text{ då } (h,k)\to 0\right)$
Antag också att f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.
Då existerar $f'(a)$.

Bevis: $f(a+(h+ik)) - f(a) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + o(|h|+|k|) = h\frac{\partial f}{\partial x} + ki\frac{\partial f}{\partial x} + o(|h|+|k|) = (h+ik)\frac{\partial f}{\partial x} + o(|h|+|k|)$

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f(a+\tau)-f(a)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{o(|h|+|k|)}{\tau}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$$

Kurvintegralen

$t \mapsto \gamma(t)$, $t \in [a,b]$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

$\dot{x}, \dot{y}$ existerar och är kontinuerliga
$\dot{\gamma} = \dot{x} + i\dot{y}$

Men hur integrerar vi "vanligt"?

DEF: för $g(x) \in \mathbb{C}$ definierar vi integralen mellan a och b som:

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt$$

Triangelolikheten

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$$

Bevis: Välj θ så att:

$$e^{i\theta}\underbrace{\int_a^b g(t)\,dt}_{re^{i\alpha}} \geq 0 \qquad \text{(Det vill säga } \theta = -\alpha)$$

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = e^{i\theta}\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b e^{i\theta} g(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{i\theta}\cdot g(t))\,dt \leq \int_a^b |e^{i\theta} g(t)|\,dt = \int_a^b |g(t)|\,dt$$

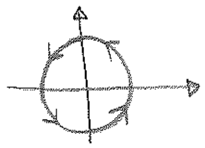
DEF: Kurvintegralen $\int_\gamma f\,dz$ definieras som:

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt, \qquad \gamma: a \longrightarrow b$$

Jämför det reella fallet: $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b (P(\gamma(t))\dot{x} + Q(\gamma(t))\dot{y})\,dt$

Ex. Låt γ vara cirkeln med radie $r > 0$.

$\gamma(t) = r(\cos t + i\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $(= re^{it})$



$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{r(\dot{\cos t} + i\dot{\sin t})}{r(\cos t + i\sin t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt =$$

$$= 2\pi i$$

Alltså: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1}{z}\,dz = 1$

Längden av en kurva

Reell variant: $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

$$|\gamma| = L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_a^b |\dot{\gamma}|\, dt$$

Triangelolikheten:

$$\left|\int_a^b \dot{\gamma}\, dt\right| \leq \int_a^b |\dot{\gamma}|\, dt = |\gamma|$$

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = |B - A|$$

Prop: $\left|\int_\gamma f dz\right| \leq \sup_\gamma |f| \cdot |\gamma|$

Bevis: $\left|\int_\gamma f dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t) dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}| dt \leq \int_a^b \sup_\gamma |f| |\dot{\gamma}| dt = \sup_\gamma |f| \cdot L(\gamma)$

Greens Formel

Låt γ vara en enkel, sluten kurva som begränsar området Ω.

($\exists$ kontinuerlig kurva som går genom varje punkt i $\mathbb{C}$)

Antag P, Q differentierbara

$$\int_\gamma P dx + Q dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

(Komplex form av Green:)

γ enkel, sluten, glatt, omsluter Ω.

$$\int_\gamma f dz = i \iint \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy$$

Följd: Om f uppfyller Cauchy-Riemanns ekvation i Ω, det vill säga $f'(z)$ existerar i Ω, så:

$$\int_\gamma f dz = 0$$

Bevis: ⓘ Greens formel gäller även om P, Q är komplexvärda.

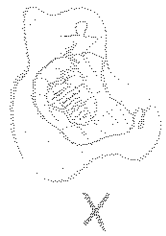
ⓘⓘ $\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f\,\dot\gamma\,dt = \int_a^b f[\dot x(t) + i\dot y(t)]\,dt = \int_\gamma f\,dx + i f\,dy = \iint_\Omega [\tfrac{\partial}{\partial x} if - \tfrac{\partial}{\partial y} f]\,dxdy =$

$= i\iint_\Omega (\tfrac{\partial}{\partial x} f + i\tfrac{\partial}{\partial y} f)\,dxdy$

DEF: f är holomorf i Ω om f' existerar överallt i Ω (det vill säga om $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$). (Holomorf kallas också analytisk)

Cauchys Integralsats

Om f är holomorf i Ω, så: $\int_\gamma f\,dz = 0$ längs varje (enkel), sluten kurva i Ω som begränsar ett delområde till Ω.



▨ Utanför Ω

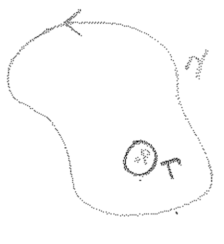
Jämför med $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 1$. Cauchys integralsats är EJ tillämpbar, ty $\frac{1}{z}$ singulär i origo.

PROP: Låt γ vara en enkel, sluten kurva i $\mathbb{C}$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z-p} = \begin{cases} 0 & \text{om } p \text{ är utanför } \gamma \\ 1 & \text{om } p \text{ är innanför } \gamma \end{cases}$$

Bevis: a) p utanför $\gamma \Rightarrow \frac{1}{z-p}$ holomorm innanför $\gamma \Rightarrow$ Integralen $= 0$

b) inför Γ innanför γ, cirkel centrerad kring p. Men $\int_\gamma \frac{dz}{z-p} - \int_\Gamma \frac{dz}{z-p} = 0$
(Cauchys sats giltig på det skuggade området)



Repetition

1) $f'(a) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(a+\tau) - f(a)}{\tau}$

$f'(a)$ existerar $\Leftrightarrow$ f deriverbar i komplex mening

$f'(a)$ existerar $\forall a \in \Omega$ benämns "f holomorf i Ω", $f \in H(\Omega)$

2) Om $f \in H(\Omega)$ så:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$$

Det vill säga, för $f = u + iv$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\because \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \quad \text{Cauchy-Riemanns ekvationer}$$

3) Omvändningen gäller nästan. Om f är reellt differentierbar och löser Cauchy-Riemanns ekvationer så är f holomorf.

4) Greens formel på komplex form

Komplex form: $\int_\gamma f dz = i \iint_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy$

5) Cauchys integralsats

$f \in H(\Omega)$ innanför γ (enkel, sluten) $\Rightarrow \int_\gamma f dz = 0$

Ex $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $z \in \mathbb{C}$

Faktum: $e^z e^w = e^{z+w}$

bevis: $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) \overset{!}{=} \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{z^m w^k}{m!\,k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m,k;\, m+k=n} \frac{z^m w^k n!}{m!\,k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m+k=n} \frac{z^{n-k} w^k n!}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m+k=n} z^{n-k} w^k \binom{n}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} (z+w)^n$$

Speciellt om $z=x+iy$, $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$u = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$

$v = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$

Koll: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y \overset{\text{wow!}}{=} \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

Ex $\ln z = ?$

Bör definieras så att $\ln z = w$; $e^w = z$

Men ekvationen $e^w = z$ har flera lösningar!

$e^{w_1} = e^{w_0}$

$e^{w_1 - w_0} = 1$

$w_1 - w_0 = x+iy$

$e^x(\cos y + i\sin y) = 1 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ \cos y = 1 \\ \sin y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Så $w_1 - w_0 = 2k\pi i$, $w_1 = w_0 \pmod{2\pi i}$

∴ $\log z = w$ bestämd upp till en multipel av $2\pi i$

$\log z = w = u + iv$ $\quad z = e^u(\cos v + i\sin v)$

$|z| = |e^u|$ $\quad v = \arg z$

∴ $\log z = \log|z| + i\arg z$. (notera att arg z ej är entydigt bestämt)

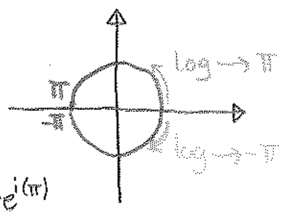
Så till exempel: $\log 1 = 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

Val av entydigt gren för logaritmen

Principalgrenen: $-\pi < \arg < \pi$

(Hade vi tillåtit π eller $-\pi$ hade $\log \notin H$)

Notera att $\log z$ är odefinierad för $z = re^{i(\pi)}$



Ex. $f(z) = \log z$

$u = \operatorname{Re} f = \log|z|$

$v = \operatorname{Im} f = \arg z = \arctan\frac{y}{x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

DEF: $a^z := e^{z \log a}$ Flertydig!

Ex. $(-1)^i = e^{i(\log(-1))} = e^{i \cdot i(2k+1)\pi} = e^{-(2k+1)\pi}$ (ty $\log(-1) = i\arg(-1) = i(2k+1)\pi$)

DEF. u är harmonisk i det komplexa talplanet om:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 \quad (\Delta \text{ laplaceoperatorn})$$

$$\left(\text{i } \mathbb{R}^n: \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = 0\right)$$

SATS: Om $f = u + iv$ är holomorf, är u, v harmoniska

Bevis: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\right) u = 0$

SATS: (Omvändningen) Antag u en harmonisk funktion i en cirkelskiva, Ω. Då:

$\exists f \in H(\Omega)$; $u = \operatorname{Re} f$

bevis u harmonisk

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Låt $P\,dx + Q\,dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$

Då $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$\therefore$ $\exists$ en funktion v; $\frac{\partial v}{\partial x} = P = -\frac{\partial u}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial y} = Q = \frac{\partial u}{\partial x}$

Sätt $f = u + iv$. Då uppfyller f Cauchy-Riemanns ekvationer.

$\therefore$ f holomorf

v kallas det harmoniska konjugatet till u.

Ex. $u = x$, $v = y$

$u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

$u = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \arg z$

DEMONSTRATIONSTILLFÄLLE

2/9 2011

1.1 2 b) $2z^2+2z+5=0$

$z^2+z+\frac{5}{2}=0$

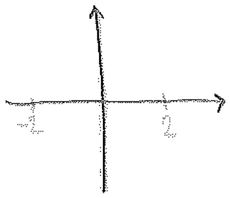
$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=0$

$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{9}{4}$

$z+\frac{1}{2}=\pm\frac{3}{2}i$

$z=\frac{-1+3i}{2}$

3 $|w+2|=|w-2|$



$|w+2|^2=|w-2|^2$

$|w|^2+4-2\mathrm{Re}\,2\bar{w}=|w|^2+4+2\mathrm{Re}\,2\bar{w} \Rightarrow$

$8\mathrm{Re}\,w=0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,w=0$

5 Bestäm alla z så att $|z+2|+|z-2|=5$

$|z+2|=5-|z-2|$

$|z|^2+4+4\mathrm{Re}\,z=25+|z|^2+4-4\mathrm{Re}\,z-10|z-2|$

$8x-25=-10|z-2|$

$64x^2-400x+625=100(|z^2|+4-2\mathrm{Re}\,2z)=100|z^2|+400-400x$

$64x^2+225=100|z|^2=100(x^2+y^2)$

$225=36x^2+100y^2$

$\left(\frac{6x}{15}\right)^2+\left(\frac{10y}{15}\right)^2$

$\left(\frac{2x}{5}\right)^2+\left(\frac{2y}{3}\right)^2=1$

1.2. 19 $|z-p| = cx, \quad p, c > 0$

$|z|^2 + p^2 - 2\mathrm{Re}\, pz = c^2x^2$

$|z|^2 + p^2 - 2px = c^2x^2$

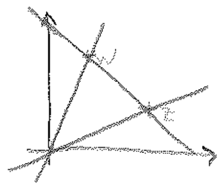
$x^2 + y^2 - c^2x^2 - 2px = -p^2$

$(1-c^2)x^2 + y^2 - 2px = -p^2$, $c=1$ parabel. annars:

$x^2 + \frac{y^2}{1-c^2} - \frac{2px}{1-c^2} = \frac{p^2}{c^2-1}$

$\left(x - \frac{p}{1-c^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-c^2} = \frac{p^2}{c^2-1} + \frac{p^2}{(1-c^2)^2} = \frac{p^2}{c^2-1}\left(1 + \frac{1}{-(c^2-1)}\right) = \frac{p^2}{c^2-1}\left(1 + \frac{1}{1+c^2}\right)$

15



Visa att triangeln i figuren är liksidig omm $|z|^2 = |w|^2 = 2\mathrm{Re}\, z\bar{w}$

$|z| = |w| = |z-w|^2$

$|z|^2 = |w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}\, z\bar{w}$

$|z|^2 = 2|z|^2 - 2\mathrm{Re}\, z\bar{w} \Rightarrow |z|^2 = |z|^2 = 2\mathrm{Re}\, z\bar{w}$

Omvänt: om detta gäller då $|z-w|^2 = |w|^2$, så triangeln liksidig

21 $|z-\alpha| < |1-\bar{\alpha}z|$, $|\alpha| < 1$. $\Leftrightarrow |z| < 1$

lösning

$|z-\alpha|^2 < |1-\bar{\alpha}z|^2$

$|z|^2 + |\alpha|^2 - 2\mathrm{Re}\, z\bar{\alpha} < 1 - 2\mathrm{Re}\, \bar{\alpha}z + |\bar{\alpha}z|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\, \bar{\alpha}z + |\bar{\alpha}|^2|z|^2$

$(1-|\alpha|^2)|z|^2 < 1 - |\alpha|^2$

$|z|^2 < 1$

1.1.3 $|w^2 - 2w - 1| = 0$ $\quad |z| = 0 \Rightarrow z = 0$

$w^2 - 2w - 1 = 0$

1.1.19 Visa att $\cos n\theta$ är ett polynom i $\cos\theta$, och bestäm detta polynom

de Moivre

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Av detta följer:

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathrm{Re}\left[\binom{n}{n}\cos^n\theta + \binom{n}{n-1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta + \ldots + \binom{n}{n-k}\cos^{n-k}\theta\sin^k\theta\cdot i^k + \ldots\right] =$$

$$= \binom{n}{n}\cos^n\theta - \binom{n}{n-2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \ldots$$ (Ty alla udda potenser av i "försvinner", $\mathrm{Re}\, i^{2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$)

På de jämna potenserna av sinus används trigonometriska ettan (alla potenser är jämna!):

$\cos n\theta = \cos^n\theta + C_2\cos^{n-2}(1-\cos^2\theta) + C_4\cos^{n-4}(1-\cos^2\theta)^2 + \ldots$ är ett polynom i $\cos\theta$

15 Var är funktionen $f(z)$ kontinuerlig?

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3+i}{z-i}, & z \neq i \\ -3, & z = i \end{cases}$$

Definitionen av kontinuitet kräver: $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$

Det enda problemet är punkten $a = i$.

Sätt $g(z) = z^3 + i$ (täljaren)

Vi ser att $g(i) = i^3 + i = 0$, och kan alltså göra omskrivningen:

$$\lim_{z\to i}\frac{z^3+i}{z-i} = \lim_{z\to i}\frac{g(z)-g(i)}{z-i} = g'(i) = 3i^2 = -3 = f(i)$$ (Ty $g(i) = 0$)

Alltså är $f(z)$ kontinuerlig i hela $\mathbb{C}$.

<u>Prop.</u> $\int_\gamma f(z)dz$ är oberoende av γ:s parametrisering.

<u>bevis:</u> $\gamma(t)$ en parameter

$$I_1 = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Varje parameterbyte har formen $t = g(s)$, så tag $\gamma(g(s))$ som ny parameter.

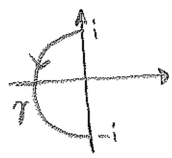
$$I_2 = \int_\alpha^\beta f(\gamma(g(s)))\frac{d}{ds}\gamma(g(s))\,ds$$

Är nu $I_1 = I_2$? Ja, för att se detta, använd kedjeregeln:

$$\frac{d}{ds}\gamma(g(s)) = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dg}{ds}$$

$$I_2 = \int_\alpha^\beta f(\gamma(g(s)))\dot{\gamma}\frac{dg}{ds}ds = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}\,dt = I_1$$

1.6 1 Beräkna $\int_\gamma z\,dz$, där γ är:



Parameterframställning av γ: $\gamma(t) = e^{it}$ $\quad \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$

$$\int_\gamma z\,dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{it}\,ie^{it}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2ie^{2it}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2it}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{1}{2}\left[e^{3i\pi} - e^{i\pi}\right] = 0$$

(Uppgiften löses enklare senare i kursen.)

16 $\quad \int_\gamma \frac{dz}{(z-p)^m}$, $m = 2,3,\dots$, $p \in \mathbb{C}$

$\gamma(t) = p + re^{it}$, $0 < t \leq 2\pi$

Enligt definitionen: $\int_\gamma \frac{dz}{(z-p)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it})^m}dt = \frac{1}{r^{m-1}(m-1)}\int_0^{2\pi}(m-1)ie^{i(m-1)t}\,dt =$

$$= \frac{1}{r^{m-1}(m-1)}\left[e^{i(m-1)t}\right]_0^{2\pi} = 0$$

RÄKNEREGLER FÖR DERIVATA

Antag att f, g är holomorfa:

① $(f+g)' = f' + g'$, $(cf)' = cf'$ (c konstant)

Ⅱ $(fg)' = f'g + fg'$

Ⅲ $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$

Felaktigt bevis av Ⅲ:

$$\frac{f\circ g(\alpha+\tau) - f\circ g(\alpha)}{\tau} = \frac{f(g(\alpha+\tau)) - f(g(\alpha))}{g(\alpha+\tau) - g(\alpha)} \cdot \frac{g(\alpha+\tau) - g(\alpha)}{\tau} \longrightarrow f'(g(\alpha))g'(\alpha) \quad \text{då } \tau \to 0$$

Ⅲ' Låt $f \in H(\Omega)$ och låt γ en kurva i Ω. $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$

$(f \circ \gamma(t))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$

Här stämmer det felaktiga beviset om $t \longmapsto \gamma(t)$ är injektiv.

Ⅳ $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}$, och $f'(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

Ex. $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$

Ex. $g(z) = \log z$, $f\circ g = e^{\log z} = z$

$f'(g(z))g'(z) = 1$

$e^{\log z} g'(z) = 1 \Rightarrow g'(z) = \frac{1}{z}$

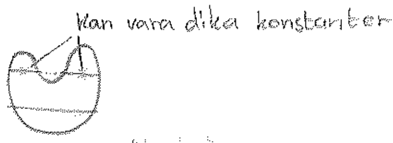
Koll: $\log z = \log|z| + i\arg z = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x} g = \frac{x}{x^2+y^2} + \left(\frac{-y}{x^2}\right)i\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

ÖVNING 2.1.15

Bevisa $f \in H(\Omega)$, Ω sammanhängande, $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ konstant

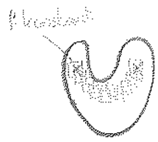
I reella fallet: $f(b) - f(a) = \int_a^b f' dx$



Pf. $0 = f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow u = u(y),\ v = v(y)$, ungefär

$0 = f' = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow f$ konstant i en omgivning av varje punkt.



Men eftersom Ω är sammanhängande kan vi lägga överlappande omgivningar mellan de två punkterna.

16. $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{\det M}{(cz+d)^2}, \text{ för } M := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Speciellt: $\det M = 0 \Rightarrow f'(0) \Rightarrow f$ konstant

(Om $\det M = 0$ så kan vi se att $(az+b)$ är en multipel av $(cz+d)$, ty matrisens rader är linjärt beroende. Alltså är $f'(z)$ verkligen konstant.)

18. $f(z) = \bar{z}$ ej komplext deriverbar

Bevis: $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x - iy) = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Def: $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

$\dfrac{\partial}{\partial z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0 & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1 \\ \frac{\partial}{\partial z} z = 1 & \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} = 0 \end{matrix}}$$

$f, g \in H(\Omega) \Rightarrow (f+g), (fg) \in H(\Omega) \wedge \left(\frac{f}{g}\right) \in H(\Omega)$ om $g \neq 0$

Ex. $z \in H(\Omega) \Rightarrow z^k \in H(\Omega) \Rightarrow p(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k \in H(\Omega) \Rightarrow r(z) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k z^k}{\sum_{k=1}^{m} b_k z^k}$, där nämnaren ej är 0.

POTENSSERIER

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ är en potensserie

SATS: $\forall f$ = potensserie $\exists R \geq 0$ sådan att

(i) f konvergerar om $|z-z_0| < R$

(ii) f divergerar om $|z-z_0| > R$

Bevis: Kan anta $z_0 = 0$. Antag nu att $\exists z_1 \neq 0$ sådant att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ är konvergent (Annars $R=0$)

$|z_1| = r > 0$. Tag z, $|z| < r$; $\sum a_n z_1^n$ konvergent $\Rightarrow |a_n z_1^n| \leq C$

$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq C \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$, $s = \frac{|z|}{r} < 1$

$\sum |a_n z^n| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} s^n < \infty$

Sätt $R = \sup |z_1|$ Då $|z| < R \Rightarrow \exists z_1$ där serien konvergent med $|z_1| > |z|$

$\therefore$ Serien konvergent i z

Å andra sidan om $|z| > R$ kan inte serien konvergera.

SATS: a) Om $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$ existerar, så $R = \frac{1}{A}$ $\left(\begin{matrix} \frac{1}{0} = \infty \\ \frac{1}{\infty} = 0 \end{matrix}\right)$

b) Om $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = A$, så $R = \frac{1}{A}$

SATS: Låt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, antag konvergensradien $R > 0$

Då existerar $f'(z)$ för $|z-z_0| < R$ och $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

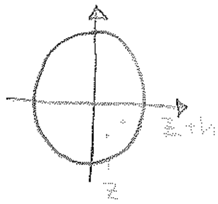
Som konsekvens: $f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(z-z_0)^{n-2}$, och $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}$

$\therefore f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{0!} = a_k$ $\therefore a_k = \frac{f^{(k)}(z)}{k!}$

$\therefore f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$

Notera att detta motsvarar Taylors formel i den reella analysen.

Bevis: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z_0=0)$



$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = ?$$

Låt $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Är g konvergent?

Tag $|z|<s<R$.

$$|na_n z^{n-1}| \le \underbrace{n\frac{|z|^{n-1}}{s^n}}_{\to 0}|a_n|s^n \le C|a_n|s^n$$ (C en konstant), ty:

$$n\frac{|z|^{n-1}}{s^n} = \frac{1}{|z|}\, n\left(\frac{|z|}{s}\right)^n \to 0, \text{ ty } \frac{|z|}{s}<1.$$

$$\therefore \sum |na_n z^{n-1}| \le C\sum |a_n s^n| < \infty$$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n[(z+h)^n - z^n]}{h} - g(z) = \frac{a_1 h}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right] - a_1 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right]$$

Denna beräknar vi nu med binomialsatsen: $(z+h)^n - z^n = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}h^k - z^n\right]\frac{1}{h} =$
$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}h^{k-1} = nz^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}h^{k-1}$. Alltså:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right] \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}|h|^{k-2} \le \frac{|h|}{\delta^2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\underbrace{(|z|+\delta)^n}_{\le C \text{ om } |z|+\delta<R} \to 0$$

(Där δ ett fixt tal: $\delta > h$)

Q.E.D.

Potensserier, forts.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$\exists R \geq 0$ Konvergensradien;

Serien konvergerar för $|z-z_0|<R$

Serien divergerar för $|z-z_0|>R$

f holomorf (analytisk)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Notera att denna, till skillnad från reella Taylorserier, alltid är konvergent där f är definierad.

Ex. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$, Bos definition

$g(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ Bokens definition

Påstående: $f=g$

Bevis: f, g holomorfa (f potensserie, g löser Cauchy-Riemanns ekvationer)

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=f(z)$$

$$g'(z)=\frac{\partial}{\partial x}g=e^x(\cos y+i\sin y)=g(z)$$

Betrakta $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}=\frac{fg-fg}{g^2}=0$

$\therefore \frac{f}{g}$ konstant

Men $f(0)=1=g(0)$, alltså $\frac{f}{g}=1$

$\therefore f=g$

Ex $\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$, $|z|<1$

$\left(s=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad zs=\sum_{n=1}^{\infty} z^n=s-1,\ s-zs=1,\ s=\frac{1}{1-z}\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n=z+2z^2+3z^3+\ldots=?$ (n=1 kan vi börja på)

Sätt $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. $\sigma=z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}=z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n=z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}=\frac{z}{(1-z)^2}$

Ex. $f(z) = (1+z)^n$ polynom

$$f'(z) = n(1+z)^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}(1+z)^{n-1}$$

$$f''(z) = n(n-1)(1+z)^{n-1} = \frac{n!}{(n-2)!}(1+z)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{n!}{(n-k)!}(1+z)^{n-k}, \quad k \leq n$$

$$\vdots$$

$$f^{(j)}(z) = 0, \quad j > n$$

Vi vet att $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$

Vi kan göra detta om $n \notin \mathbb{N}$! I så fall, tolka $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(\ldots)(n-k)$ eller använd; $\Gamma(n+1) = n!$

TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER

Vad är $\cos z$, $\sin z$?

Vet $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$$

DEF. $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$, $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$, $\frac{d}{dz}\cos z = \sin z$

Jämför $\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$, $\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})$

Serieframställning

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2} - \frac{iz^3}{6} + \ldots$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = 1 - iz - \frac{z^2}{2} + \frac{iz^3}{6} + \ldots$$

$$\cos z = (e^{iz} + e^{-iz}) \cdot \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}(-1)^{2n-1}$$

$$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})\frac{1}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^{2n+1}$$

SATS: Antag att $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$

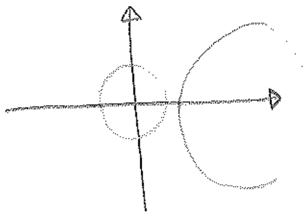
Då finns en potensserie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

Serien konvergerar i $\{z; |z-z_0|<r\}$, den största cirkelskivan med centrum i $z_0 \in \Omega$

Ex $f(z) = \frac{1}{1-z}$

Tag $z_0 = 0$ $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, konvergent för $|z|<1$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3)^n$, annan konvergensradie.



För beviset krävs Cauchys integralsats:

CAUCHYS INTEGRALSATS

SATS: Antag att $f \in H(\Omega)$, γ enkel sluten kurva i Ω, som begränsar ett område $D \subseteq \Omega$. Då:

$$\int_\gamma f\,dz = 0$$

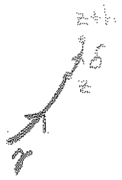
DEF. Antag att varje enkel, sluten kurva γ i ett område Ω begränsar ett område $D \subseteq \Omega$.
Då kallar vi Ω enkelt sammanhängande.

SATS: Antag att $f \in H(\Omega)$, Ω enkelt sammanhängande. Då: (†)

$\exists F \in H(\Omega)$. $F' = f$ (f har en primitiv funktion)

Ex $\frac{1}{z} = f(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. $F = \log z$ ej väldefinierad.

Bevis (Av (†))



Tag $z_0 \in \Omega$

Sätt $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ (längs någon γ)

Om γ och γ' två kurvor mellan z_0 och z, så: $\int_\gamma f\,d\zeta - \int_{\gamma'} f\,d\zeta = \int_T f\,d\zeta = 0$ (T sluten)

Alltså är F väldefinierad.

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f\,d\zeta - \int_{z_0}^{z} f\,d\zeta = \int_\delta f\,d\zeta = \int_\delta [f(z) + O(|h|)]\,d\zeta = f(z)\int_z^{z+h} d\zeta + \int_z^{z+h} O(|h|)\,d\zeta$$

$$\int_z^{z+h} d\zeta = \int_a^b \dot{\delta}\, dt = \delta(b) - \delta(a) = z+h-z = h$$

$$\therefore\ F(z+h) - F(z) = f(z)h + \int_\delta o(|h|)\, d\zeta$$

Triangelolikheten för integraler:

$$\left|\int_\delta o(|h|)\, d\zeta\right| \leq |\delta| \sup_\delta |o(|h|)| \leq C|h|^2$$

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{C|h|^2}{|h|} \to 0,\ h \to 0$$

$$\therefore\ F'(z) = f(z)$$

CAUCHYS FORMEL

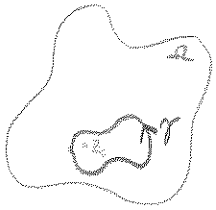
<u>SATS</u>: Cauchys integralformel

Låt $f \in H(\Omega)$, Ω område

γ kurva i Ω, vilken begränsar ett $D \subseteq \Omega$

Låt $z_0 \in D$. Då:

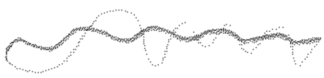
$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)$$



Anmärkning angående "$F' = f$"-satsen: e.m.

$f \in H(\Omega)$ $\exists F;\ F' = f$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw$$

Kurvor på formen  krånglar till resonemanget.

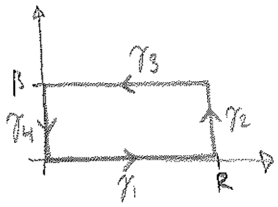
<u>PROP</u>: Antag att Ω enkelt sammanhängande, och $f \in H(\Omega)$. Då är:

$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$ för varje sluten kurva γ.

<u>Bevis</u>: Välj en parametrisering $t \mapsto \gamma(t)$, $a \xrightarrow{t} b$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ (sluten)

Per definition: $\int_\gamma f\, d\zeta = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, dt = (f = F') = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$

Ex. $f(z) = e^{-z^2}$



$$0 = \int_\gamma e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^\beta e^{-(R+it)^2} i\,dt + \int_R^0 e^{-(t+i\beta)^2} dt + \int_\beta^0 e^{-(it)^2} dt =$$

$$= \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^\beta e^{-(R+it)^2} i\,dt - \int_0^R e^{-(t+i\beta)^2} dt - \int_0^\beta e^{-(it)^2} dt = I(R)$$

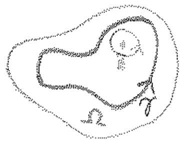
Låt nu $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty} I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \int_0^\infty e^{-t^2} (\cos 2\beta t + i \sin 2\beta t) dt - i \int_0^\beta e^{t^2} dt = 0$$

Separera Real- och Imaginärdel:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = e^{\beta^2} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos 2\beta t\, dt$$

CAUCHYS FORMEL, BEVIS



$f \in H(\Omega)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

Bevis: (1) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, följer av att $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ är holomorf i området mellan γ

och cirkeln, enligt principen:

Om g är holomorf mellan γ_1 och γ_2 så $\displaystyle\int_{\gamma_1} g\, d\zeta = \int_{\gamma_2} g\, d\zeta$

Foga ihop kurvorna som $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 + l_1 - l_2$.

$$\int_\Gamma = 0 = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{l_1} - \int_{l_2} \Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = I$$

Låt $r \to 0$. $f(\zeta) = f(z) + o(1)$ om $|\zeta - z| = r$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{|\zeta - z| = r} \frac{o(1)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int \frac{d\zeta}{\zeta - z} \frac{1}{2\pi i} + \text{rest} = f(z) + \text{rest}$$

Vi har sedan $|\text{resten}| \le \frac{1}{2\pi} \sup \frac{|O(1)|}{|\zeta - z|} 2\pi i \longrightarrow 0$

Ex. Antag att f polynom. Då kan formeln bevisas enklare. Dela $f(\zeta)$ med $(\zeta - z)$:

$$f(\zeta) = (\zeta - z) q(\zeta) + c = (\zeta - z) q(\zeta) + f(z)$$

Då
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\zeta - z) q(z)}{(\zeta - z)} d\zeta + f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z)$$

Ex. $\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2} d\theta = 1$ (Poissonkärnan), $|a| < 1$

Bevis: $\int_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta}) i e^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$

Välj nu $f(z) = \frac{z + a}{z - a}$. $\text{Re}\, f = \text{Re} \frac{|z|^2 + |a|^2 - \text{trans}}{|z - a|^2} = \frac{1 - |a|^2}{|z - a|^2}$ om $|z| = 1$

Betrakta $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z + a}{z - a} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{|z|=1} \frac{2}{z - a} dz + \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \right] = 2 - 1 = 1$

$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{z + a}{z - a} \frac{dz}{z} = \int \frac{e^{i\theta} + a}{e^{i\theta} - a} d\theta$ Tag nu realdelen:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2} d\theta = 1$$

SATS: $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ Då $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, med konvergensradie r

Bevis: Tag $z_0 = 0$, inför $|\zeta - z_0| = \rho < r$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Men $\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} f(\zeta) d\zeta =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{|\zeta| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \frac{1}{2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ där } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

FÖLJDSATS: f har derivator av hur hög grad som helst, och:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta$$

I allmänhet: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$

Vad Bo anser sig ha gått genom:

1 Uppskattning av kurvintegral $\int_\gamma f \leq |\gamma| \sup_\gamma |f|$

2 Cauchy-Riemanns ekvationer - Nödvändigt villkor

3 ——— " ——— - Tillräckligt villkor

4 Cauchys Integralsats

5 EJ ANMERKAD (Moreras sats)

6 Cauchys Integralformel

2.1. 20 a) $f \in H(\mathbb{C})$, $f = u + iv$, $u = x^2 - y^2$

Vad är v, det harmoniska konjugatet till u?

Lösning

Cauchy-Riemanns Ekvationer:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \Rightarrow v'_y = 2x \\ u'_y = -v'_x \Rightarrow v'_x = 2y \end{cases} \Rightarrow v = 2xy + g(x) \Rightarrow v'_x = 2y + g'(x) = 2y \Rightarrow g'(x) = 0$$

$v(x,y) = 2xy + C$

$$f = u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right) + 2i\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right) = \ldots = z^2$$

d) $u = \cosh y \sin x$, samma fråga

$$\cosh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{cases} v'_y = u'_x = \cosh y \cos x \\ v'_x = -u'_y = -\sinh y \sin x \Rightarrow v = \sinh y \cos x + g(y) \end{cases} \Rightarrow v'_y = \cosh y \cos x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0$$

$v(x,y) = \sinh y \cos x + C$

$u + iv = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x = \sin z$

2.2 3 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{3j}}{2^j} = f(z)$. Konvergensradie?

$1 + \frac{z^3}{2} + \frac{z^6}{4} + \dots$, $\lim \sqrt[j]{|a_j|}$ existerar ej!

Sätt $w = z^3$. $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{2^j}$, $a_j = \frac{1}{2^j}$

$$\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{1}{2^j}\right|^{1/j} = \frac{1}{2}$$

Konvergensradien blir: $|w| < 2$, det vill säga $|z| < 2^{\frac{1}{3}}$

$$g(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{w}{2}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{w}{2}} = \frac{2}{2-w}$$

$$f(z) = \frac{2}{2-z^3}$$

17. Beräkna summan av $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2\pi i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-(z-2\pi i))^n}{n!} =$$

$$= [\text{Inför } w := -(z-2\pi i)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = e^w = e^{-z+2\pi i} = e^{-z}$$

2.3 7 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$, $a > b > 1$

välj $b = 1$ (w.l.o.g.)

Låt $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \xrightarrow{\theta} 2\pi$

Betrakta $\int_\gamma f(e^{i\theta})\dot\gamma\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta$. Formellt $dz = ie^{i\theta} d\theta$, ger:

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \Rightarrow \int f(e^{i\theta}) d\theta = \int f(z) \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

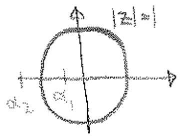
$$\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1} = ?$$

Använd Cauchys Integralformel $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z-w}\,dz = g(w)$

$z^2+2az+1 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)$, där α_1,α_2 rötterna till $z^2+2az+1$

Då $\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z^2+2az+1)} = \int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$.

$\alpha_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$, $\alpha_2 = -a-\sqrt{a^2-1} < -1$

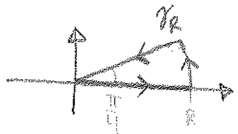


Alltså: $\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}\,dz = \int_{|z|=1}\frac{g(z)dz}{z-\alpha_1} = 2\pi i\, g(\alpha_1)$ för $g(z) = \frac{1}{z-\alpha_2} \in H(\{z:|z|<1\})$

Så $\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1} = 2\pi i\, g(\alpha_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

13. $\int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz$



Parametrisering $\gamma = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

$\gamma_1: z=t,\quad 0 \xrightarrow{t} R$

$\gamma_2: z=Re^{i\theta},\quad 0\xrightarrow{\theta}\frac{\pi}{4}$ $\qquad \alpha = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\gamma_3: z=t\alpha,\quad R\xrightarrow{t} 0$

$$\therefore \int_\gamma e^{iz^2}dz = 0 \implies \int_0^R e^{it^2}dt + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2i\theta}}\, ie^{i\theta}d\theta + \int_R^0 e^{it^2\alpha^2}\alpha\, dt = 0,\quad \alpha^2 = i$$

$$\therefore \int_0^R e^{it^2}dt + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{2i\theta}}\, ie^{i\theta}d\theta = \alpha\int_0^R e^{-t^2}dt$$

Tag nu realdelen: $e^{it^2} = \cos t^2$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos t^2\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Notera att $\int_0^R \cos t^2\,dt = \begin{bmatrix} t^2=x \\ t=\sqrt{x}\end{bmatrix} = \int_0^R \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}dx \to \int_0^\infty \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}dx$

Uppskattning av $\int_{\gamma_2}$:

Gäller att uppskatta e^{iz^2} när $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$z^2 = R^2 e^{2i\theta}$, $|e^{iz^2}| = e^{\operatorname{Re} iz^2} = e^{-R^2 \sin 2\theta}$. $0 \le \sin 2\theta \le 1$

Men $e^{-R^2 \sin 2\theta} \le e^{-R^2 \sin 2\varepsilon}$, för något ε

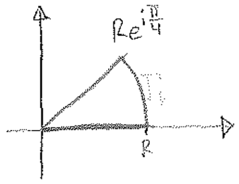
$$\left| \int_{\substack{z = Re^{i\theta} \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4}}} e^{iz^2} dz \right| \le \int_{\frac{\pi}{4} > \theta > \varepsilon} + \int_{0 < \theta < \varepsilon} \le e^{-R^2 \sin 2\varepsilon} \frac{\pi}{4} + \varepsilon \cdot 1$$

funktionens maxvärde

Alltså $\longrightarrow 0$ då $R \to \infty$

13/9 2011

Bakläxa:



Påst. $\int_{T_R} e^{iz^2}dz \longrightarrow 0, \quad R \longrightarrow \infty$

$T_R: z = e^{i\theta}R \quad 0 \xrightarrow{\theta} \frac{\pi}{4}$ $\qquad iz^2 = R^2(-\sin 2\theta + i\cos 2\theta)$

$z^2 = R^2 e^{2i\theta} \quad \operatorname{Re} iz^2 = e^{-R^2\sin 2\theta} \leq 1$

$$\left|\int_{T_R} e^{iz^2}dz\right| = \left|\int_{0\leq\theta\leq\varepsilon} e^{iz^2}dz + \int_{\varepsilon\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}} e^{iz^2}dz\right| \leq \left|\int_0^{\varepsilon}\right| + \left|\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}}\right| \leq 1\cdot\varepsilon R + e^{-R^2\sin 2\varepsilon} R\frac{\pi}{4}$$

Tag $\varepsilon = \frac{1}{R^{3/2}}$. Då:

$$\left|\int_{T_R} e^{iz^2}dz\right| \leq 1\cdot\varepsilon R + e^{-R^2\sin 2\varepsilon} R\frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{\sqrt{R}} + e^{-\frac{R^2}{R^{3/2}}} R\frac{\pi}{4} \to 0 \text{ då } R \longrightarrow \infty$$

Användningar av Cauchys Integralsats

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad f \in H(\Omega)$$

Liouvilles Sats

Antag att $f \in H(\mathbb{C})$ (hel, entire) $\wedge\ \exists c \in \mathbb{C}: |f| \leq c$

Då är $f \in \text{const}_{\mathbb{C}}$

Pf. Låt $g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \in H(\Omega)$

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}$

$|g| \leq \frac{2c}{|z|} \leq \frac{2c}{R}$ om $R \leq |z|$

Cauchys Integralsats medför nu:

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{g(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2C}{R} \frac{1}{R-|z|} 2\pi R \leq \frac{\hat{C}}{R-|z|} \longrightarrow 0, \; R \longrightarrow \infty \qquad (|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z|)$$

$\therefore g(z) = 0 \quad \forall z$

$\because f(z) = f(0) \quad \forall z$

Algebrans Fundamentalsats

Låt $p(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ och grad

Då $\exists z_0 \in \mathbb{C}\,;\ p(z_0)=0$

Bevis. Antag $\nexists z_0 \in \mathbb{C}\,;\ p(z_0)=0$. Sätt $f(z)=\frac{1}{p(z)} \in H(\mathbb{C})$

Påstående: $f \equiv 0$

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0| = |z|^n\Big(|a_n| - \underbrace{\Big|\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\Big|}_{\to 0 \text{ då } |z|\to\infty}\Big) \geq \delta|z|^n \text{ för } |z|>R$$

$$|f(z)| = \Big|\frac{1}{p(z)}\Big| \leq \frac{1}{\delta|z|^n} \quad \text{om } |z|>R$$

Å andra sidan $|f(z)| \leq C \quad |z| \leq R$

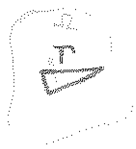
Liouville $\Rightarrow f \equiv C$, $\circledast \Rightarrow C=0 \quad \therefore f \equiv 0$

Vi har nått en motsägelse.

Moreras Sats

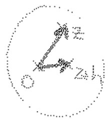
Antag $f \in C(\Omega)$ och $\int_\Gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \Gamma$ triangel i Ω.

Då $f \in H(\Omega)$



Bevis. Kan anta $\Omega = \Delta(a,r)$ är en disk och $a=0$

Sätt $F(z)=\int_0^z f(\omega)d\omega$ (Integral längs rät linje).



Påstående: $F'(z)=f(z)$

Bevis. $F(z+h)-F(z) = \int_z^{z+h} f(\omega)d\omega \leftarrow$ Integral längs rät linje

Hypotesen $\int_\Gamma f dz = 0 \Rightarrow \left(\int_0^{z+h} + \int_{z+h}^{z} + \int_z^0\right) f dz = 0$, det vill säga $F(z+h) + \int_{z+h}^{h} f dz - F(z) = 0$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{\int_z^{z+h} f(\omega)d\omega}{h} \longrightarrow f(z) \quad \text{då } h \to 0$$

$\therefore F'$ existerar, och $F'(z)=f(z)$

Alltså $F \in H(\Omega)$, och även $f \in H(\Omega)$

Repetition, huvudsats

Antag $f \in H(\Omega)$, γ enkel, sluten i Ω.

Antag $z_0 \in \mathrm{int}(\gamma)$ = "innanför γ"

Då: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, med konvergens för $|z-z_0| < r$, om $\{z;\ |z-z_0|<r\} \subset \mathrm{int}(\gamma)$

Dessutom: $$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

Bevis. Tag $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{1 - z/\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

Men: Om $|z - 0| < r$ och $\zeta \in \gamma$ så att $|\zeta| \geq r$

så $\left|\frac{z}{\zeta}\right| \leq \frac{|z|}{r} = s < 1$

$$\therefore \frac{1}{1 - z/\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k, \text{ med likformig konvergens för } \zeta \in \gamma$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^n f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{1 - z/\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

DEF: Ordningen av ett nollställe.

(i) $f \in H(\Omega)$ $f(z_0) = 0$. z_0 är ett nollställe till f.

(ii) $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, $f(z_0) = 0 \iff a_0 = 0$

$f(z) = a_m (z-z_0) + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots$, $a_m \neq 0$

Då har f ett nollställe av ordning m i z_0

Ekvivalent: $f(z) = (z-z_0)^m (a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \ldots) = (z-z_0) g(z)$, där $g \in H(\Omega)$ och $g(z_0) \neq 0$

Ekvivalent: $f^{(k)}(z_0) = 0$ $k < m$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

$\mathrm{ord}(f, z_0) = m$

$\mathrm{ord}(f, z_0) = 0 \iff f(z_0) \neq 0$

Övning 24. 2. $f(z) = (e^z - 1)^2$ har ett nollställe för $z=0$. Vad är ordningen?

$e^z - 1 = z(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots) = z\,g(z)$, $g(z) \neq 0$ $\quad ord(e^z-1, 0) = 1$

$(e^z-1)^2 = z^2 g(z)^2$, $\quad ord(f, 0) = 2$

Svar: Ordningen är två.

Samma argument $\Rightarrow$ Om $ord(f, z_0) = m_1$, $ord(g, z_0) = m_2$

så har fg $ord(fg, z_0) = m_1 + m_2$

$ord(fg, z_0) = ord(f, z_0) + ord(g, z_0)$

15. $f(z) = \sin(\pi z)$

Utveckla kring $z = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \tfrac{1}{2})^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!}$$

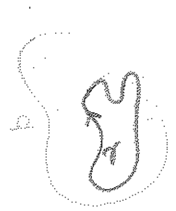
$f' = \pi \cos \pi z$, $f'' = -\pi^2 \sin \pi z$, $f^{(2k)} = \pi^{2k}(-1)^k \sin \pi z$, $f^{(2k+1)}$ = något med $\cos \pi z$

$f^{(2k)}(\frac{1}{2}) = (-1)^k \pi^{2k}$, $f^{(2k+1)}(\frac{1}{2}) = 0$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} (z - \tfrac{1}{2})^{2k}$$

14/9 2011

Prop: Ω enkelt sammanhängande



Vet: $f \in H(\Omega) \Rightarrow \left(\exists F \in H(\Omega);\ F' = f \right)$

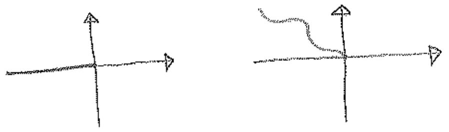
$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

Dessutom: Om $f \neq 0$ överallt i Ω, så: $\exists h \in H(\Omega)$ ("$h = \log f$" $\Leftrightarrow e^h = f$), det vill säga:

"h en logaritm till f"

Ex. $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z;\ -\infty < z \leq 0\}$

$f(z) = z,\ h = \log z$



Bevis: $g = \frac{f'}{f} \in H(\Omega)$

$\therefore \exists h \in H(\Omega);\ h' = g$

Betrakta $(e^{-h} f)' = -h' e^{-h} f + e^{-h} f' = e^{-h}(f' - h'f) = e^{-h}(0) = 0$

$\therefore e^{-h} f = c \in \text{Const}_{\Omega}$

$f = e^h \cdot c = e^h e^a = e^{h+a},\quad a \in \mathbb{C}$

$\therefore h + a$ duger

$(fg)' = f'g + fg'$

$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

$\vdots$

$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ (Leibniz formel)

Prop: Låt $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

Då $fg = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, där $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$

Bevis: $f, g \in H(\text{någonstans}) \Rightarrow fg \in H(\text{någonstans}) \Rightarrow fg = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$

$$c_n = \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(0) g^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} f^{(n-k)}(0)\, g^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Övn. 18: Cauchys uppskattning

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z_0|=r} |f(w)|$$

(Kom ihåg: För $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, så i $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$)

Bevis: $$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| = |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|w-z_0|=r} \frac{|f(w)|}{|w-z_0|^{n+1}} |dw| \le r \frac{\max|f|}{r^{n+1}} = \frac{\max|f|}{r^n}$$

Övn. 19: Använd 18 för att visa Liouvilles sats; $f \in H(\mathbb{C}) \wedge |f| \le C \Rightarrow f \in Const_{\mathbb{C}}$

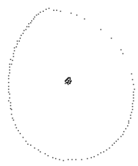
$18 \Rightarrow f'(z_0) \le \frac{1}{r} \max_{|w-z_0|=r} |f(w)| \le \frac{C}{r}$

Låt nu $r \to \infty$: $f'(z_0) = 0$ i alla z_0

ISOLERADE SINGULARITETER

Antag att $f \in H(\Omega)$

$\Omega = \{z; 0 < |z-z_0| < r\} = \{z; |z-z_0| < r\} \setminus \{z_0\}$



Då har f en isolerad singularitet i z_0.

Tre fall:

i) $|f(z)|$ begränsad då $z \to z_0$

ii) $|f(z)| \to \infty$ då $z \to z_0$.

iii) Inget av de ovanstående ($e^{\frac{1}{z}}$)

i) Då är $f \in H(\{z; |z-z_0| < r\})$, det vill säga f kan utvidgas till z_0.

HÄVBAR SINGULARITET. $\left(\exists a \in \mathbb{C}; \hat{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0 \end{cases}, \ \hat{f} \text{ är holomorf}\right)$

Bevis: Tag $z_0 = 0$

Sätt $g(z) = \begin{cases} f(z) z^2, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

g holomorf för $z \neq 0$

$\lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} h f(h) = 0$, ty f begränsad

Alltså g' existerar, och g är holomorf även i $z = 0$

Så $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, men $a_0 = 0$ (ty $g(0) = 0$)

$\frac{g(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^2} z^k = f(z)$ är begränsat. Alltså $a_1 = 0$. Så $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, och f holomorf

överallt.

ii) $|f(z)| \longrightarrow \infty$ då $z \to z_0$ Ex. $\frac{1}{(z-z_0)}, \frac{1}{(z-z_0)^m}, \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ $g(z_0) \neq 0$.

Prop. $\exists m \in \mathbb{N}\ \exists g \in H(|z-z_0|<r) \wedge g(z_0) \neq 0$; $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$. Vi säger $\operatorname{ord}(f, z_0) = -m$

Bevis: Inför $h = \frac{1}{f} \in H(\text{nära } z_0)$, h

(i) $\Rightarrow$ h holomorf även i z_0. Så $h = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

$a_m \neq 0$

$$h = (z-z_0)^m \overbrace{(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots)}^{H}$$

$$f = \frac{1}{h} = \frac{1}{H} \frac{1}{(z-z_0)^m} = \frac{G}{(z-z_0)^m}, \quad G \in H,\ G(z_0) \neq 0$$

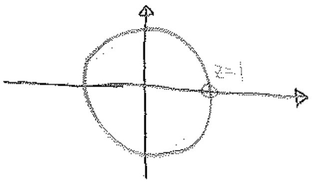
Låt f ha en isolerad singularitet i punkten z_0.

Betrakta $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$, r litet. Detta kallas för residyn.

2.4 övning 12

$f(z) = \frac{z^2}{1-z}$. Utveckla runt origo.

$|z|<1$: $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Rightarrow \frac{z^2}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+2}$



13 $f(z) = \frac{z+2}{z+3}$ runt $z=-1$

$f(z) = 1 - \frac{1}{z+3}$, $g(z) = \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2+(z+1)} = \frac{1}{2-(-(z+1))} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{-(z+1)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-(z+1)]^k}{2^k} =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^n$

$f(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n$

Alternativt:

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

$g(z) = \frac{1}{z+3}$, $g'(z) = \frac{-1}{(z+3)^2}$, $g''(z) = \frac{(-1)^2 2}{(z+3)^3}$, ..., $g^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(z+3)^{n+1}} = \{z = z_0 = -1\}$

$= \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$

$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^n$

Residyer

Antag $f \in H(\Delta(z_0,r)\setminus\{z_0\})$, $\Delta(z_0,r) = \{|z-z_0|<r\}$

$$\text{Res}(f,z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s} f(z)\,dz$$, oberoende av s (bara $0<s<r$)

Beräkning av Residylen:

f har en pol av ordning m i z_0, det vill säga $f(z) = \frac{H(z)}{(z-z_0)^m}$, för något $H \in H(\Delta(z_0,r))$, $H(z_0)\neq 0$

Serieutveckla H: $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_0 \neq 0$

$$f = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0} + a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \ldots$$

$\int_{|z-z_0|=s} f(z)\,dz$ får integreras termvis

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s} f\,dz = \frac{a_0}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s}\frac{dz}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s}\frac{dz}{z-z_0} + a_m\int_{|z-z_0|=s} dz + \ldots$$

Men $\int_{|z-z_0|=s}\frac{dz}{(z-z_0)^k} = \begin{cases} 0, & k\neq 1 \\ 1, & k=1 \end{cases}$, och $a_k\int_{|z-z_0|=s}(z-z_0)^k = 0$ ty holomorf

$\therefore$ $\text{Res}(f,z_0) = a_{m-1} = \frac{H^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

Bästa fallet: $m=1$, $\text{Res}(f,z_0) = H(z_0)$

Exempelvis $f = \frac{h}{g}$, där $h,g \in$ Holo $g(z_0)=0$, ordning 1

Exempel $f(z) = \frac{z+1}{(z^2+4)(z-1)^3} = \frac{z+1}{(z+2i)(z-2i)(z-1)^3} = \frac{H}{(z-2i)}$, där $H = \frac{z+1}{(z+2i)(z-1)^3}$

$f = \frac{h}{g}$, g enkelt nollställe

$$f = \frac{h}{g/(z-z_0)}\,\frac{1}{z-z_0}, \quad H = \frac{h}{g/(z-z_0)}, \quad H(z_0) = \frac{h(z_0)}{\lim_{z\to z_0}\frac{g}{z-z_0}} = \frac{h(z_0)}{\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Allmän formel: $\text{Res}(f,z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$

Så $\text{Res}\left(\frac{z+1}{(z^2+4)(z-1)^3}, z_0\right) = \frac{1+2i}{4i(2i-1)^3}$

Exempel 2 $\quad f(z)=\cot \alpha z, \quad z_0=0. \quad f=\frac{\cos \alpha z}{\sin \alpha z}$

$h=\cos\alpha z, \; g=\sin \alpha z, \; g'=\alpha\cos\alpha z$

Så $\operatorname{Res}(f, z_0)=\frac{1}{\alpha}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s} \cot \alpha z \, dz=\frac{1}{\alpha} \quad (s \text{ litet})$$

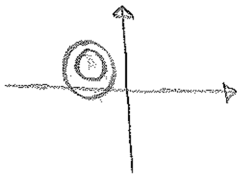
Moralen: $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s}\frac{h(z)}{g(z)}dz=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$, om $h, g \in H$ och g har ett enkelt nollställe i z_0

Notera att för $g(z)=z-z_0$ får vi Cauchys formel.

LAURENTSERIER

Låt $A=\{z, r<|z-z_0|<R\}$

$f\in H(A)$

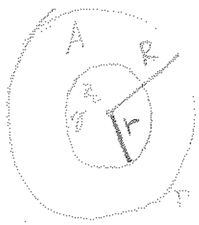


SATS: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k(z-z_0)^k =: f_1+f_2$

f_1 konvergerar för $|z-z_0|<R$, f_2 konvergerar för $|z-z_0|>r$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=s}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad r<s<R \qquad -\infty<n<\infty$$

bevis:



Välj $z_0=0$. $z\in A$, $r<|z|<R$

$\exists\, r_1>r \quad R_1<R$

$r_1<|z|<R_1$

Låt $\Gamma: |w|=R_1$, $\gamma: |w|=r_1$. Cauchys formel ger:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)dw}{w-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)dw}{w-z}=f_1+f_2$$

För att se att detta blir serier (analogt med för potensserier):

$$f_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{1-\frac{z}{w}}\frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^k f(w)\frac{dw}{w}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w^{k+1}}dw\cdot\frac{1}{2\pi i}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

$w\in\Gamma \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right|=s<1$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\int_\gamma \frac{f(w)\,dw}{\frac{w}{z}-1} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\int_\gamma \frac{f(w)dw}{1-\frac{w}{z}} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^k f(w)dw =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} c_k, \quad \text{där}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma w^n f(w)dw$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{z^{n+1}} = \begin{bmatrix} k = -(n+1) \\ n = -k-1 \end{bmatrix} = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k c_{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,dw}{w^{k+1}}, \quad c_{-k-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f\,dw}{w^{k+1}}$$

Def: $f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k$ kallas principaldelen

Ex $f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \in H(A)$, $A = \{z;\ 0 < |z| < \infty\}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{720} - \frac{z^7}{5040} + \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots$$

Ex $f(z) = \cot \alpha z = \frac{\cos \alpha z}{\sin \alpha z}$, $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$\sin \alpha z$ har ett enkelt nollställe i $z_0 = 0$

$\sin \alpha z = z H(z)$, $H(0) \neq 0$

$$\sin \alpha z = \frac{\alpha z}{1!} - \frac{(\alpha z)^3}{3!} + \dots$$

$$f(z) = \frac{\cos \alpha z}{H}\frac{1}{z} = \frac{c_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{(ansätt detta!)}$$

Då: $\underbrace{\left(\frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots\right)}_{f}\underbrace{\left(\frac{\alpha z}{1!} - \frac{(\alpha z)^3}{3!} + \dots\right)}_{\sin \alpha z} = \underbrace{1 - \frac{(\alpha z)^2}{2!} + \dots}_{\cos \alpha z}$

$c_{-1} = \frac{1}{\alpha}$ (ty $\alpha c_{-1} = 1$)

$c_0 = 0$ (ty $\alpha c_0 = 0$)

$\vdots$

16/9 2011

2.4. $f(z) = (e^z - 1)^2$

Sökt. ordning av nollställen

Nollställen i $2k\pi i$

$e^z = 1$, $z = x+iy \Rightarrow e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi \end{cases}$

$f(z) = e^z - 1 = 0$

$f'(z) = e^z \neq 0 \qquad (\text{ty } e^z e^{-z} = 1)$

Så $\text{ord}(e^z - 1, 2k\pi i) = 1$,

$\therefore$ $e^z - 1 = (z - 2k\pi i)H(z)$, där $H \in H(\mathbb{C})$ och $H(z - 2k\pi i) \neq 0$

$\therefore$ $\text{ord}((e^z-1)^2, 2k\pi i) = 2$, ty $(e^z-1)^2 = (z-2k\pi i)^2 H(z)^2$, $H(z-2k\pi i) \neq 0$

6. $f(z) = \text{Log}(1-z)$, $\quad |z| < 1$

$e^{f(z)} = 1 - z$, $f(z_0) = 0 \Rightarrow e^0 = 1 - z_0 \Rightarrow z_0 = 0$

En logaritm uppfyller $\text{Log}\,1 = 0$. $\text{Log}(1-z) = 0$ betyder att:

$-\pi < \text{Im Log}(1-z) < \pi$

$z_0 = 0$ uppfyller detta, och är det <u>enda</u> nollstället.

$\text{ord}(\text{Log}(1-z), 0) = ?$

<u>Metod 1</u>: $f'(0) = \left.\dfrac{-1}{1-z}\right|_{z=0} = -1 \neq 0.$

$\therefore$ $\text{ord}(\text{Log}(1-z), 0) = 1$

<u>Metod 2</u>: Serieutveckling, $\text{Log}(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-z)^n}{n}$

$\therefore$ $\text{ord}(\text{Log}(1-z, 0)) = 1$

5. $f = z^2(1 - \cos z)$

$f(z) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee \cos z = 1$

$\cos z = 1 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} - 2 = 0 \Rightarrow e^{2iz} - 2e^{iz} + 1 = 0,$

Sätt $w = e^{iz}$,

$w^2 - 2w + 1 = (w-1)^2 = 0 \Rightarrow |w - 1| = 0 \Rightarrow w = 1$, $e^{iz} = 1$

$\Rightarrow z = 2k\pi$

Alla nollställen till $f(z) = z^2(1-\cos z)$ ges av $z = 2k\pi$

ord$(f, 0)$

$1-\cos z$ har ordning 2 i 0, ty $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots$

$z^2(1-\cos z)$ har alltså ordning 4

ord$(f, 2k\pi)$

z^2 bidrar ej

$f' = \sin z = 0$ i $2k\pi$

$f'' = \cos z \neq 0$ i $2k\pi$

$\therefore$ ord$(f, 2k\pi) = 2$ för $k \neq 0$

Antag att $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge f \in H(\Omega)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \equiv 0$$

Konsekvens: Antag f hel $(f \in H(\mathbb{C})) \wedge f(z) = 0$ för $\forall z \in \mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f \equiv 0$

Betrakta nu $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Inför $f(z) = \sin 2z - 2\sin z \cos z$

$f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$

$\therefore f(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2.5 4 $f(z) = \pi \cot \pi z$

6 $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{e^{2z} - 1}$

Finn singulariteter. Vilken typ?

4 $\cot \pi z = \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$

$\sin \pi z = 0, \quad z \in \mathbb{Z}$

$z = k$ enkelt nollställe till $\sin \pi z$

Alltså har polen ordning 1. (Ty:

$\sin \pi z = h(z)(z-k)$, $\cot \pi z = \dfrac{H(z)}{z-k}$, $H(z) = \dfrac{\cos \pi z}{h(z)}$, $H(k) \neq 0$)

Allmänt:

Om $f = \dfrac{h}{g}$, $h(a) \neq 0$, $\operatorname{ord}(g, a) = m$ så $\operatorname{ord}(f, a) = -m$

6 $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{e^{2z} - 1} = \dfrac{e^z - 1}{(e^z + 1)(e^z - 1)} = \dfrac{1}{e^z + 1} =: \dfrac{h(z)}{g(z)}$

$e^z + 1 = 0$ då $z = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{ord}(g(z), (2k+1)\pi) = 1$

$\therefore \operatorname{ord}(f, (2k+1)\pi) = -1$

2.4.20 Antag $f \in H(\mathbb{C}) \wedge \operatorname{Re} f(z) \geq 0 \ \forall z$. Visa att $f \in \text{Const}_{\mathbb{C}}$

Lösning. Sätt $F(z) = e^{-f} \in H(\mathbb{C})$

$|F| = e^{-\operatorname{Re} f} \leq 1$

Liouville $\Rightarrow F \in \text{Const}_{\mathbb{C}} \Rightarrow f \in \text{Const}_{\mathbb{C}}$

Ex $|f(z)| \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow f \in \text{Const}_{\mathbb{C}}$

$\left|\frac{1}{f}\right| \leq \varepsilon \leq c \Rightarrow \frac{1}{f}$ konstant, f konstant

21 Antag $|f(z)| \leq |z|^N + B \wedge f \in H(\mathbb{C})$

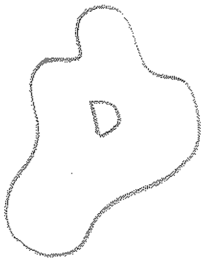
$\Rightarrow f = a_0 + a_1 z + \ldots + a_N z^N$

Bevis Cauchys uppskattning: $|f^{(n)}(z_0)| \leq \dfrac{n!}{r^n} \max\limits_{|z - z_0| = r} |f(z)|$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Tag $z_0 = 0$.

$|f^{(n)}(0)| \leq \dfrac{n!}{r^n} \max\limits_{|z|=r} |f| \leq \dfrac{n!}{r^n}(A r^N \; B) \longrightarrow 0$ då $r \longrightarrow \infty$ och $n > N$

Så $f = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$



D område (öppen och sammanhängande)

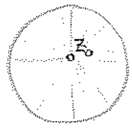
f analytisk i D utom i ett antal isolerade punkter.
Dessa kallas isolerade singulariteter.

Laurentutveckling: Serieutveckling med både positiva och negativa potenser.

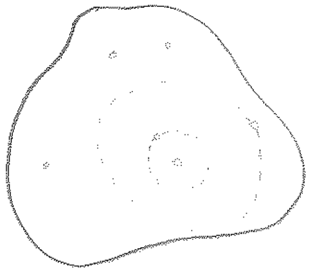
Konvergensmängd: Cirkelring (annulus)

Om z_0 isolerad singularitet:

Laurentutveckling: $r < |z - z_0| < R$, $r \geq 0$ $R \leq \infty$



$r = 0$: $0 < |z - z_0| < R$, punkterad cirkelskiva.



Normalt finns flera Laurentutvecklingar kring singulariteten z_0 (isolerad).

I fortsättningen (idag) gäller att Laurentutvecklingar är i den punkterade omgivningen till z_0.

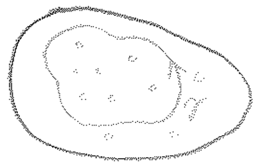
$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \operatorname*{Res}_{z_0} f$$

Residysatsen

f analytisk i D, utom i ändligt många singulära punkter $z_1, \dots, z_k$.
γ enkel, sluten, ett varv moturs, ligger i D med sitt inre, går runt $z_1, \dots, z_k$.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{m=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z_k} f$$



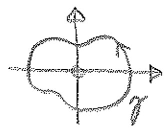
Entydighet för Laurentutvecklingen:

Om $f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$
i en cirkelring runt z_0, så är det just Laurentutvecklingen, och:

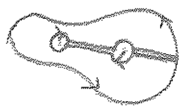
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

Ex. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots$, $|z| > 0$

$$\int_\gamma e^{\frac{1}{z}}\,dz = 2\pi i$$

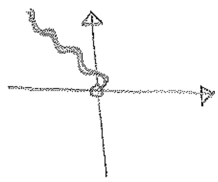


Residysatsen följer av residyns definition och av deformation av konturen.



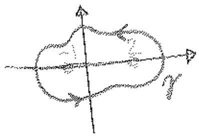
Icke-Isolerade singulariteter

① Förgreningspunkt $\log z$



② $\begin{cases} \sin\frac{1}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ (ungefär så)

2.5.23 a) $f(z) = \frac{z+2}{z^2-z-2} = \frac{z+2}{(z-2)(z+1)}$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{-1} f + \operatorname*{Res}_{-2} f\right) = 2\pi i\left(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{3}\right) = 2\pi i$$

$$\frac{z+2}{(z-2)(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1}, \quad A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{4}{3}$$

Att bestämma residyn för olika typer av singulariteter

1) Hävbar singularitet: $\operatorname{Res} f = 0$

Ex. $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots$

3) Väsentlig singularitet: ?

$$\left.\begin{array}{l} e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{\boxed{1}}{z} + \dots \\ \sin\frac{1}{z} = \frac{\boxed{1}}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \end{array}\right\} \text{Fungerar ibland.}$$

$$e^z e^{1/z} = \left(1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots\right)$$

$$\operatorname{Res} f = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!3!} + \dots + \frac{1}{n!(n+1)!} + \dots$$

2) Poler; $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \dots$$

$$\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} = a_{-1}(m-1)! + a_0 (z-z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}$$

Om f, z_0 enkelpol till f, $f = \frac{g}{h}$, g, h analytiska, $g(z_0) \neq 0$, $\operatorname{ord}(h, z_0) = 1$

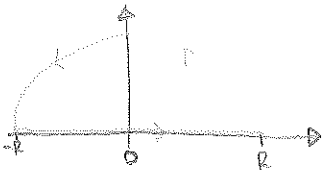
$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Ex. $\frac{z+2}{z^2-z-2}$

$$\operatorname*{Res}_{-1} f = \left.\frac{z+2}{2z-1}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{3}$$

INTEGRALER SOM BERÄKNAS MED HJÄLP AV RESIDYLKALKYL

① $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$; Q har inga reella nollställen, $\underbrace{\deg Q \geq \deg P + 2}_{\text{konvergensvillkor}}$.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Kontur: $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ (enkel, sluten, styckvis C^1, moturs)

$C_R : z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$

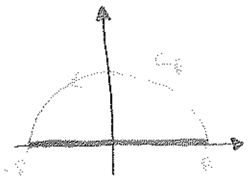
Välj R så stort att alla nollställen till Q i övre halvplanet ligger innanför Γ_R.

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{övre halv-}\\ \text{planet}}} \operatorname{Res} f$$

$$\int_{C_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad \int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R} = \text{tal}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{\text{övre halv-}\\ \text{planet}}} \operatorname{Res} f$$

① $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ $\quad Q \neq 0$ i $\mathbb{R}$; $\deg Q \geq \deg P + 2$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

C_R: $z = Re^{i\theta}$, $0 \xrightarrow{\theta} \pi$

Ex. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ $\quad Q = 0 \Rightarrow z = \pm i$, bara $z_1 = i$ i övre halvplanet

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \sum_{\substack{\text{övre halv-}\\ \text{planet}}} \operatorname{Res} f = 2\pi i \operatorname*{Res}_{i} f = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi$$

$$\int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R} = \pi$$

$$0 \leq \left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}\,d\theta}{R^2 e^{2i\theta}+1} \right| = R \cdot 1 \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta}+1}\,d\theta \right| \leq R \int_0^{\pi} \frac{|e^{i\theta}|}{|R^2 e^{2i\theta}+1|}\,d\theta$$

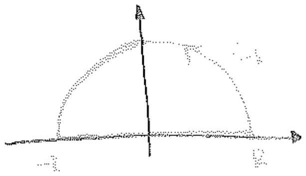
Triangelolikheten: $\boxed{\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|} \leq |z_1| + |z_2|$

$$0 \leq R \int_0^{\pi} \frac{|e^{i\theta}|}{|R^2 e^{2i\theta}+1|}\,d\theta \leq R \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2-1}\,d\theta = \frac{R\pi}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Så $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)e^{iax}}{Q(x)}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$, $\deg Q \geq \deg P + 1$

(a) $\deg Q \geq \deg P + 2$



Γ_R som ovan

För vilka a fungerar det?

$$f(z) = \frac{e^{iaz}P(z)}{Q(z)}, \quad \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{övre halv-}\\ \text{planet}}} \operatorname{Res} f$$

$$\int_{C_R} f \longrightarrow 0 \;???$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f = 2\pi i \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}$$

$$0 \leq \left| \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{iaRe^{i\theta}} \cdot Rie^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,d\theta \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{\overbrace{e^{iaR\cos\theta}}^{|\cdot|=1}\, e^{-aR\sin\theta}\, \overbrace{Rie^{i\theta}}^{|\cdot|=R}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,d\theta \right| \leq$$

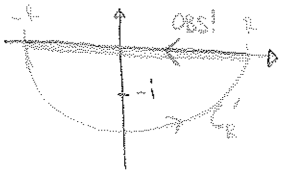
$$R\int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|}\,d\theta \leq \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \frac{e^{-aR\sin\theta}}{R^2-1}\,d\theta = \frac{R}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta$$

$\sin\theta \geq 0$; $[0,\pi]$, $R>0$

for $a<0$: $e^{-aR\sin\theta} \longrightarrow \infty$, $R \to \infty$

$$a>0 \Rightarrow 0 \leq \left|\int_{C_R} \cdots\right| \leq \frac{R\pi}{R^2-1} \longrightarrow 0,\; R \to \infty$$

$a<0$



$\Gamma_R' = [-R,R] \cup C_R'$

$$\int_{\Gamma_R'} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,-i) = 2\pi i \frac{e^{ia(-i)}}{-2i} = -\pi e^{a} = -\pi e^{-|a|}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta \leq \pi \Longrightarrow \int_{\Gamma_R'} = \int_R^{-R} + \underbrace{\int_{C_R'}}_{\to 0} = -\pi e^{-|a|}$$

$-a>0$
$R>0$
$\sin\theta<0$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos |a|x}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-|a|}$$

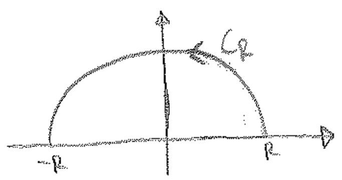
(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{Bmatrix} \cos ax \\ \sin ax \end{Bmatrix} dx$ $\qquad \deg Q \geq \deg P + 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax}\,dx$$

Kan man ta $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \cos az$? Nej!!!

Ty $\cos az = \dfrac{e^{iaz} + e^{-iaz}}{2}$, en av e^{iaz} och e^{-iaz} $\to \infty$ i varje halvplan

2.6.4 $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos ax}{(x^2+1)(x^2+4)}}_{\text{jämn}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$, $\quad \cos ax = \cos(|a|x)$, $|a| \geq 0$



$T_R = [-R, R] \cup C_R$

$$f(z) = \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

$$\operatorname{Res}_{i} f = \left((z-i)\frac{e^{i|a|z}}{(z-i)(z+i)(z^2+4)}\right)^{(0)}\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-|a|}}{2i\cdot 3}$$

$$\operatorname{Res}_{2i} f = \left((z-2i)\frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)(z+2i)(z-2i)}\right)^{(0)}\Bigg|_{z=2i} = \frac{e^{-2|a|}}{(-3)4i}$$

$$\int_{T_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,2i)\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{-|a|}}{6i} - \frac{e^{-2|a|}}{12i}\right) = \pi\left(\frac{e^{-|a|}}{3} - \frac{e^{-2|a|}}{6}\right)$$

$$0 \le \left| \int_{C_R} \frac{e^{i|a|z}}{(z^2+1)(z^2+4)} dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{i|a|R(\cos\theta + i\sin\theta)} Rie^{i\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+1)(R^2e^{2i\theta}+4)} d\theta \right| \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{|e^{i|a|R\cos\theta}||e^{-|a|R\sin\theta}| \cdot R}{(R^2-1)(R^2-4)} d\theta \le \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad , \text{ ty}$$

$$|e^{i\cdots}| = 1, \quad |e^{-|a|R\sin\theta}| \le 1, \quad \text{ty} \quad \begin{matrix} |a| \ge 0 \\ R > 0 \\ \sin\theta > 0 \end{matrix}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}\left(2e^{-|a|} - e^{-2|a|}\right)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{12}\left(2e^{-|a|} - e^{-|a|}\right)$$

Sats: Följande tre påståenden är ekvivalenta:

(i) f: Laurentutveckling kring z_0 (punkterad omgivning!) innehåller inga negativa potenser.

(ii) $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)$

(iii) f begränsad i en punkterad omgivning till z

} Hävbar singularitet

Sats: Följande två påståenden är ekvivalenta:

(i) f:s Laurentutveckling innehåller ändligt många negativa poler

(ii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

} Pol

Sats:

(i) f: Laurentutveckling innehåller oändligt många negativa poler

(ii) $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$, vare sig ändligt eller oändligt

} Väsentlig singularitet

Caserati - Weierstrass sats

f har väsentlig singularitet i z_0.
$A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \exists \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$; $z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} z_0$ så att

$f(z_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} A$

Bevis för $A \in \mathbb{C}$ ($A = \infty$ lättare)

Antag motsatsen

$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \exists \delta_0 > 0 ; \ \forall z \ \ |z - z_0| < \delta_0 \ \ |f(z) - A| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow \forall z : \ 0 < |z - z_0| < \delta_0 \quad f(z) - A \neq 0$

$\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$ analytisk funktion ; $0 < |z - z_0| < \delta_0$

$|\varphi(z)| = \dfrac{1}{|f(z) - A|} \leq \dfrac{1}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow |\varphi(z)| \begin{cases} \text{analytisk i } 0 < |z - z_0| < \delta_0 \\ \text{begränsad i} \ \text{—''—} \end{cases}$

$\Rightarrow \exists \lim_{z \to z_0} \varphi = l \Rightarrow \varphi(z) - l \xrightarrow[z\to z_0]{} 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(z) - A} - l \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$

① $l \neq 0$
$\Rightarrow \ f(z) - A \xrightarrow[z\to z_0]{} \dfrac{1}{l} \Rightarrow f(z) \longrightarrow A + \dfrac{1}{l} \Rightarrow z_0$ hävbar singularitet!

② $l = 0$
$\dfrac{1}{f(z) - A} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0 \Rightarrow f(z) - A \xrightarrow[z\to z_0]{} \infty \Rightarrow f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \infty \Rightarrow z_0$ är pol!

Motsägelse!

Alltså är satsen sann.

Argumentprincipen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

f holomorf i D, utom i ett ändligt antal poler

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P,$$ där N är antalet nollställen innanför γ, och P är antalet poler innanför γ. (Alla räknade med multiplicitet.)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_k \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

γ_k omringar en pol eller ett nollställe till f och inget mer.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_k\right)$$

(1) z_k är nollställe till f med multiplicitet n_k.

$n \geq 1$
$$f(z) = a_n(z-z_k)^n + a_{n+1}(z-z_k)^{n+1} + \dots$$
$$f'(z) = na_n(z-z_k)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(z-z_k)^n + \dots$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{na_n(z-z_k)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(z-z_k)^n + \dots}{a_n(z-z_k)^n + a_{n+1}(z-z_k)^{n+1} + \dots} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{z-z_k}\,\underbrace{\frac{na_n + (n+1)a_{n+1}(z-z_k) + \dots}{a_n + a_{n+1}(z-z_k) + \dots}}_{=\circledast}} \Rightarrow z_k \text{ enkelpol till } \frac{f'}{f}$$

$\circledast$: $\exists \lim_{z\to z_k} \circledast = n < \infty \Rightarrow \circledast$ analytisk funktion i z_k

$\circledast = b_0 + b_1(z-z_k) + \dots$, $\quad b_0 = n$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_k}\left(n + b_1(z-z_k) + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_k\right) = n = n_k = \text{nollställets multiplicitet}$$

(2) z_m är pol till f med ordning p_m

$p_m \geq 1$ $\quad f(z) = \dfrac{a_{-p}}{(z-z_m)^p} + \dfrac{a_{-p+1}}{(z-z_m)^{p-1}} + \ldots + a_0 + a_1(z-z_m) + \ldots$

$$f'(z) = \frac{-p a_{-p}}{(z-z_m)^{p+1}} + \frac{(-p+1)a_{-p+1}}{(z-z_m)^p} + \ldots$$

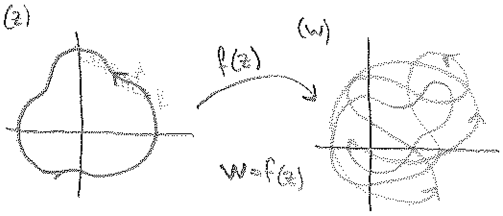
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\dfrac{-p a_{-p}}{(z-z_m)^{p+1}} + \dfrac{(-p+1)a_{-p+1}}{(z-z_m)^p} + \ldots}{\dfrac{a_{-p}}{(z-z_m)^p} + \dfrac{a_{-p+1}}{(z-z_m)^{p+1}} + \ldots} = \frac{1}{(z-z_m)} \, \frac{-p a_{-p} + (z-z_m)(\ldots)}{a_{-p} + (z-z_m)(\ldots)}$$

$\Rightarrow z_m$ enkelpol till $\frac{f'}{f}$, och $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_m\right) = -p_m$

$\gamma \not\ni$ nollställen, poler till f

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{\substack{\text{nollställen} \\ \text{till } f}} n_k - \sum_{\text{poler till } f} p_m = N - P$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left(\log f(z)\right)'$$



A och B: samma punkt geometriskt, från olika håll

$$\int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \log_{**} f(z)\Big|_B - \log_* f(z)\Big|_A = s 2\pi,$$ s = antalet varv som $f(\gamma)$ går runt 0.

$\log_{**} B = \ln|B| + i(\varphi_0 + s2\pi)$, $\quad \log_* A = \ln|A| + i\varphi_0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P = \text{ antalet varv som } f(\gamma) \text{ går runt } 0 \text{ i } w\text{-planet.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^8}\,dx$$

$z^8 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

$z^8 = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)$

$z_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{8} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{8}$, bara olika för $k = 0, 1, \ldots, 7$

$z_k = \exp\left(i\frac{2k+1}{8}\pi\right)$

$\mathrm{Res}(f, z_k) = \left.\frac{z^4}{8z_k^7}\right|_{z=z_k}$

$\frac{1}{z_k^7} = -z_k$, ty $z_k^8 = -1$

Rouchés sats

$f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$

$f, g \in H(D)$

γ enkel, sluten, ligger i D med sitt inre

$|f| > |g|$ på γ

$\Rightarrow f$ och $f+g$ har lika många nollställen innanför γ

Bevis. Bilda $F_t(z) = f(z) + tg(z)$, $0 \xrightarrow{t} 1$ (Homotopiprincipen)

$F_t \neq 0$ på γ $\forall t \in [0,1]$, ty:

Antag $\exists z_0 \in \gamma$, $t_0 \in [0,1]$; $F_{t_0}(z_0) = 0$. $\Rightarrow f(z_0) + t_0 g(z_0) = 0$

$\Rightarrow f(z_0) = -t_0 g(z_0) \Rightarrow |f(z_0)| = t_0|g(z_0)| < |f(z_0)|$, motsägelse!

$\because F_t \neq 0$ på γ $\forall t \in [0,1]$

$F_t \in H$ $\forall t \in [0,1]$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F_t'(z)}{F_t(z)}\,dz = N_t - P_t = N_t \quad (P_t = 0, \text{ ty } F \in H)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}\,dz}_{\text{kontinuerlig funktion av } t \text{ (utan bevis)}} = N_t \quad \text{(heltalsvärden)}$$

$\Rightarrow$ konstan $\Rightarrow$ $N_0 = N_1$ (Påståendet i satsen).

Ex. $P(z) = z^7 + z + 1$. Hur många nollställen har P i $\{z; |z|<2\}$

$f(z) = z^7$, $|f|$ på γ $= 2^7$

$g(z) = z+1$, $|g| = |z+1| \leq |z|+1 = 3 < 2^7$

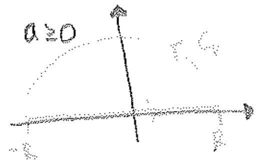
f har 7 nollställen $\Rightarrow$ $P = f+g$ har också 7 nollställen

23/9 2011

2.6.5' $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+1}\,dx$

Typintegralen är $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax}\,dx$. (Tidigare kallad ⓑ)

(b) $\deg Q = 1 + \deg P$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ (R stort)

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} = \frac{z e^{iaz}}{z^2+1}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{övre halv-}\\ \text{planet}}} \operatorname{Res} f$$

$z^2+1 = 0$, $z_{1,2} = \pm i$

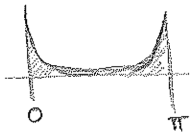
$\boxed{z_1 = i}$ $\in$ övre halvplanet

$$\operatorname{Res}(f, i) = \left.\frac{z e^{iz}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2} \Rightarrow \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \pi i e^{-a}$$

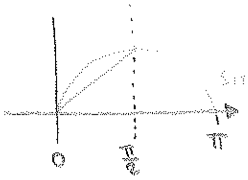
$$0 \le \left| \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2+1}\,dz \right| \overset{⊛}{=} \left| \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta} \cdot Re^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot Rie^{i\theta}}{R^2 e^{2i\theta}}\,d\theta \right| \le \int_0^{\pi} \frac{R \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{-aR\sin\theta} \cdot R \cdot 1 \cdot 1}{R^2 - 1}\,d\theta \quad (*)$$

⊛ $z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i \sin\theta)$

$$(*) \quad \left| \int_{C_R} \frac{z e^{iaz}}{z^2+1}\,dz \right| \le \frac{R^2}{R^2-1} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta$$



$\sin\theta \le \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, men ej användbart. Låt oss inspireras av detta



$\Rightarrow \sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi}$

$-aR\sin\theta \le -aR\frac{2\theta}{\pi}$

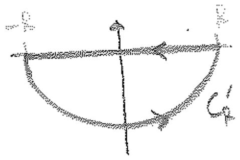
På grund av sinusfunktionens symmetri kring $\frac{\pi}{2}$ får vi:

$$\frac{R^2}{R^2-1}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta = \frac{2R^2}{R^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta \le \frac{2R^2}{R^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2\theta}{\pi}}\,d\theta \overset{a>1}{=} \frac{2R^2}{R^2-1}\left[\frac{e^{-aR\frac{2\theta}{\pi}}}{-\frac{aR2}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{R\pi}{R^2-1}\,\frac{1}{a}\left(1-e^{-aR}\right) < \frac{R\pi}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\underline{a=0}$: $\sin ax \equiv 0$, titta på ursprungsintegralen

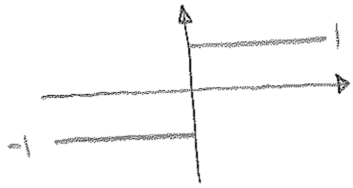
$\underline{a<0}$:



$\cos ax = \cos(|a|x)$, $|a| \ge 0$

$\left.\begin{array}{l}\sin ax \\ a<0\end{array}\right\}$ $\sin ax = -\sin(|a|x)$

$\operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{2}e^{-|a|}$



$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & a>0 \\ -1, & a<0 \end{cases}$ (sgn 0 kan antingen tas som 0 eller som odefinierad.)

Rouchés Sats

$f, g: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $f, g \in H(D)$

γ enkel, sluten, styckvis C^1, ett varv moturs, ligger i D med sitt inre

$|f+g| < |f|$ på γ

$\Rightarrow$ f och g har lika många nollställen innanför γ

__Bevis__ Varken f eller g har nollställen på γ, ty:

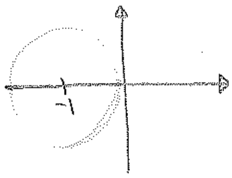
$f(z_0)=0 \Rightarrow \underbrace{|f(z_0)|}_{=0} \not< |\ldots|$, för alla innehåll i andra beloppet

$g(z_0)=0 \Rightarrow |f(z_0)+0| \not< |f(z_0)| \Rightarrow$ ur olikheten på γ följer att $f, g \neq 0$ på γ

På γ: $|f+g| < |f| \Rightarrow \left|1+\frac{g}{f}\right| < 1$ (Okej, ty $f \neq 0$ på γ)

$\left|\frac{g}{f} - (-1)\right| < 1$ på γ

$\frac{g}{f} \in \{w;\ |w-(-1)|<1\} \Rightarrow \frac{g}{f}(\gamma) \subset \{w;\ |w-(-1)|<1\}$



$\Rightarrow$ Den går inga varv runt 0

$\Rightarrow N_{\frac{g}{f}} - P_{\frac{g}{f}} = 0 \Rightarrow N_{\frac{g}{f}} = P_{\frac{g}{f}}$ (Argumentprincipen)

Men $N_{\frac{g}{f}} = N_g$ och $P_{\frac{g}{f}} = N_f$.

$\therefore N_g = N_f$

ARGUMENTPRINCIPEN

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$

f analytisk i D, utom i ändligt många poler.

γ styckvis C^1, enkel, sluten, ett varv moturs, $\gamma \subset D$, tillsammans med sitt inre

γ går ej genom något nollställe eller någon pol till f.

$\Rightarrow$ $N - P$ = Antalet varv som $f(\gamma)$ går runt 0 (i w-planet)

$= \frac{1}{2\pi} \cdot$ ändringen av $f(z)$:s argument när z genomlöper γ

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

$\left.\begin{array}{l} N \text{ antalet nollställen till } f \\ P \text{ antalet poler till } f \end{array}\right\}$ Innanför γ

V.S.V

Algebrans fundamentalsats

Låt $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathrm{Const}_{\mathbb{C}}$, $p(z) \in \mathbb{C}[z]$.

$\deg p = n \geq 1$ (alltså $a_n \neq 0$)

$\Rightarrow \exists$ exakt n nollställen till p i $\mathbb{C}$

Bevis $p(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} \infty$

$\Rightarrow$ Alla (eventuella) nollställen till p ligger i en tillräckligt stor cirkelskiva runt origo.

Det vill säga: $\exists R_0$: $p(z) \neq 0$ $\forall z$; $|z| \geq R_0$

Sätt $f(z) = a_n z^n$ (Den dominerande termen)

Sätt $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ (En "störning")

På $\{z;\ |z| = R_0\}$: $|a_n z^n| = |a_n| R_0^n$

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{a_n z^n} \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow \exists R_1$; $\forall z$; $|z| \geq R_1$ $\left|\frac{g}{f}\right| \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall z$; $|z| \geq R_1$ $|g| \leq \frac{1}{2}|f| < |f|$

Vi kan nu välja vårt ursprungliga R_0 enligt $R_0 > R_1$

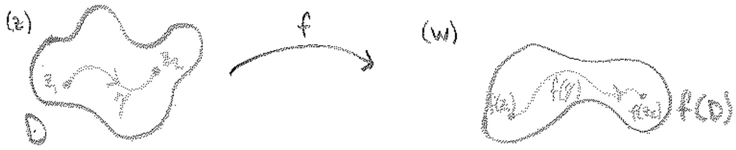
$\Rightarrow |g| < |f|$

$\Rightarrow$ Enligt Rouchés sats har $f(z) = a_n z^n$ och $f(z) + g(z)$ lika många nollställen innanför $\{z;\ |z| = R_0\}$, det vill säga n stycken, ty f har nollställe med multiplicitet n i origo.

V.S.V

Sats: D område i $\mathbb{C}$, $f \in H(D)$, $f \notin \text{Const}_D \Rightarrow f(D)$ område

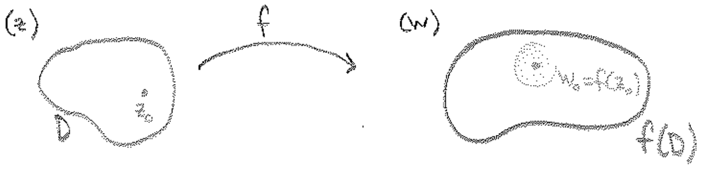
Bevis ① Är $f(D)$ sammanhängande (bågvis)



γ kurva $\Rightarrow$ $\gamma \in C^0(D)$, varav $f \in C^0$, $\gamma \in C^0 \Rightarrow f \circ \gamma \in C^0$

Alltså är $f(D)$ bågvis sammanhängande.

② Är $f(D)$ öppen?



Existerar det $\delta > 0$; $\{w;\ |w-w_0| < \delta\} \subset f(D)$?

Omformulering i termer av nollställen:

$w_0 = f(z_0)$

$\Rightarrow f(z_0) - w_0$ har nollställe i D

$w: |w-w_0| < \delta$? $\quad w \in f(D) \overset{?}{\Leftrightarrow} f(z) - w$ har nollställe i D

Vi vill få $\big|\underbrace{(f(z)-w_0) - (f(z)-w)}_{w-w_0}\big| < |f(z) - w_0|$

? $|w-w_0| < |f(z) - w_0|$ när $|w-w_0| < \delta$ för något $\delta > 0$

Räcker att visa att $\exists \delta > 0$; $|f(z) - w_0| \geq \delta$ (nära z_0)

Vi har $f(z_0) - w_0 = 0$, alltså z_0 nollställe till $f(z) - w_0$

Nollställen till analytiska funktioner är isolerade:

$\Rightarrow \exists r > 0$; $f(z) - w_0 \neq 0$; $\quad 0 < |z - z_0| \leq r$

$\exists \min\limits_{|z|=r} |f(z) - w_0| = \delta > 0$

Betrakta $\gamma_r = \{|z| = r\}$. På γ_r: $|f(z) - w_0| \geq \delta > |w-w_0| = |(f(z)-w_0) - (f(z)-w)|$

$\Rightarrow$ enligt Rouchés sats har $f(z) - w_0$ och $f(z) - w$ lika många nollställen i $\{z;\ |z| < r\}$, alltså minst ett $\Rightarrow \{|w-w_0| < \delta\} \subset f(D)$

$\Rightarrow w_0$ inre punkt $\Rightarrow f(D)$ öppen $\Rightarrow f(D)$ område.

23/9 2011 e.m.

2.41 5. Bestäm multipliciteten hos alla nollställen till $f(z) = z^2(1-\cos z)$

$z_0 = 0$: $z^2\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{z^2}{2} + \dots\right)\right) = \frac{1}{2}z^4 + \dots$ Alltså:

$\text{ord}(f, z_0) = 4$

z_0 nollställe med multiplicitet n om

$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0 \ \wedge \ f^{(n)}(z_0) \neq 0$

$z \neq 0 \Rightarrow z^2 \neq 0$

Sätt $g(z) = 1 - \cos z$

$z_k = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$f(2k\pi) = 0$

$f'(2k\pi) = \sin 2k\pi = 0$

$f''(2k\pi) = \cos 2k\pi \neq 0$

Så $\text{ord}(f, 2k\pi) = 2$ för $k \neq 0$

10. Taylorutveckla e^z kring $z = \pi i$

1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$

$\left[e^z\right]^{(n)}\Big|_{\pi i} = e^z\Big|_{\pi i} = e^{\pi i} = -1$, så:

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n!}(z - \pi i)^n$, konvergerar i hela $\mathbb{C}$

2) $e^{z-\pi i} e^{\pi i} = e^z = e^{\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z - \pi i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n!}(z - \pi i)^n$

13. Taylorutveckla $\frac{z+2}{z+3}$, $z_0 = -1$

Geometriska serien. Utveckla kring $z_0 = -1$ $\Leftrightarrow$ utveckla i potenser av $(z+1)$

$$\frac{z+2}{z+3} = \frac{1+(z+1)}{2+(z+1)} = \frac{1}{2}\left(1+(z+1)\right)\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}} = \left\{\begin{array}{l}\text{Geometrisk serie med} \\ \text{kvot } q = -\frac{z+1}{2}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+(z+1)\right)\left(1 - \frac{z+1}{2} + \frac{(z+1)^2}{2^2} - \dots + \frac{(-1)^n (z+1)^n}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)(z+1)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} - 1\right)(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z+1)^n,$$ konvergerar för $\frac{|z+1|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z+1| < 2$

17. $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisk

z_0 nollställe med multiplicitet m till f. Vad är f', f^2 ?

Givet: $f(z) = a_m (z-z_0)^m + \dots$

$f'(z) = m a_m (z-z_0)^{m-1} + \dots$

$\Rightarrow z_0$ nollställe till f' med multiplicitet $m-1$.

$f^2(z) = a_m^2 (z-z_0)^{2m} + \dots$

$\Rightarrow z_0$ nollställe till f^2 med multiplicitet $2m$

18. Cauchys uppskattningar för derivatorna:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f|, \quad n = 0,1,2,\dots$$

f analytisk i $D \supset \{z; |z-z_0| \leq r\}$, $\gamma_r : |z-z_0| = r$

Taylorutveckling: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n (z-z_0)^n + \dots \Big| \frac{d^n}{dz^n}$$

$$f^{(n)}(z)\Big|_{z=z_0} = n! a_n + (n+1)! a_{n+1}(z-z_0) + \dots \Big|_{z=z_0} = a_n n! = f^{(n)}(z_0)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \max_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^{n+1}|} 2\pi r = n! \max_{|z-z_0|=r} \frac{|f|}{r^{n+1}} \cdot r = \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f|$$

21 f hel funktion, $\exists A, m > 0$;

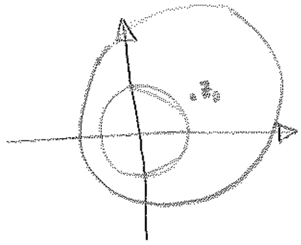
$|f(z)| \le A|z|^m$ för $|z| \ge R_0$

Visa att f är ett polynom av grad högst m.

$\Leftrightarrow f^{(n)} \equiv 0 \quad \forall n > m$

Tag $n > m$, $z_0 \in \mathbb{C}$, godtyckligt

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{R^n} \max_{|z-z_0|=R} |f|$$



Tag R så stort att: $\{|z| \le R_0\} \subset \{|z - z_0| < R\}$

Då gäller $|z - z_0| = R \Rightarrow |z| > R_0 \Rightarrow |f(z)| \le A|z|^m \Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{R^n} \max_{|z-z_0|=R} A|z|^n =$

$$= \frac{An!}{R^n} \max_{|z-z_0|=R} |z|^m \quad (*)$$

$$|z| = |(z - z_0) + z_0| \le |z - z_0| + |z_0|$$

$$(*) \le \frac{An!}{R^n} (R + |z_0|)^m \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$n > m \Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| = 0$

($f^{(n)}(z_0)$ oberoende av R, och går mot 0 då $R \to \infty$! Alltså $f^{(n)}(z_0) = 0$. Notera att $R \to \infty$ kräver f hel.)

20. f hel funktion, $\exists c \in \mathrm{Const}_{\mathbb{C}}$; $\operatorname{Re} f \le c \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Visa att $f \in \mathrm{Const}_{\mathbb{C}}$. (Notera att $\begin{matrix} \operatorname{Re} f \ge c \\ \operatorname{Im} f \le c \end{matrix}$ $\begin{matrix} \operatorname{Re}(-f) \le -c \\ \operatorname{Im}(if) \ge c \end{matrix}$)

$|e^w| = e^{\operatorname{Re} w}$. Övergång mellan $|\ldots|$ och $\operatorname{Re} \ldots$

$F(z) = e^{f(z)}$ hel

$|F(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \le e^c$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} F \text{ hel} \\ F \text{ begränsad} \end{matrix}\right\} \Rightarrow F \in \mathrm{Const}_{\mathbb{C}}$

$e^{f(z)} \in \mathrm{Const}_{\mathbb{C}}$ (Logaritmera ej - knepigt)

$0 \equiv F'(z) = e^{f(z)} f'(z) \Rightarrow \begin{matrix} f' \equiv 0 \\ f \in \mathrm{Const}_{\mathbb{C}} \end{matrix}$

2.5| 2. $\frac{z^2}{\sin z} = \frac{z}{z-\frac{z^3}{3!}+\dots}$

Poler: $z_k = k\pi,\ k \neq 0$
$z_0 = 0$ hävbar

$\sin z\Big|_{k\pi} = 0 \quad (\sin z)'\Big|_{k\pi} = \cos z\Big|_{k\pi} = (-1)^k \neq 0$

$\Rightarrow$ enkelpoler i $z_k = k\pi,\ k\neq 0$

$$\frac{z^2}{b_1(z-k\pi)+\dots} = \frac{1}{z-k\pi}\underbrace{\frac{z^2}{b_1+b_2(z-k\pi)+\dots}}_{\text{Analytisk i } k\pi}$$

7. $\frac{e^z-1}{z^2},\ z_0 = 0$

$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots$

$\frac{e^z-1}{z^2} = \frac{z+\frac{z^2}{2!}+\dots}{z^2} = \frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\dots$

Enkelpol i $z_0=0$, $\operatorname{Res}\left(\frac{e^z-1}{z^2}, z_0\right) = 1$

9. $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2} = \frac{b_1(z-\pi)+\dots}{(z-\pi)^2}$, enkelpol i $z=\pi$

$\sin z = \sin(\pi - z) = -\sin(z-\pi) = -(z-\pi)+\frac{(z-\pi)^3}{3!}-\frac{(z-\pi)^5}{5!}+\dots$

$f(z) = -\frac{1}{z+\pi}+\frac{z-\pi}{6}-\frac{(z-\pi)^3}{120}+\dots$

$\operatorname{Res}(f,\pi) = -1$

12. $\frac{1}{e^z-1} = \quad$ $z_0=0$ enkelpol $\quad$ (ge fyra termer i Laurentutvecklingen)

$\frac{1}{e^z-1} = \frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$

$\Rightarrow 1 = \left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)\left(\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\dots\right)$

z^0: $1 = a_{-1}$

z^1: $0 = a_0+\frac{a_{-1}}{2!},\ a_0 = -\frac{1}{2}$

z^2: $0 = a_1+\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{6}a_{-1}$

27/9 2011

Repetition

Residysatsen och tillämpning av denna på reella integraler

Rouchés sats:

Antag $f \in H(\bar{\Omega})$, $h \in H(\bar{\Omega})$ och $|h| < |f|$ på $\partial\Omega$. $\quad (\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$

Då har f och $f-h$ lika många nollställen i Ω

Alternativt sätt $h = f - g$. $|f-g| < |f|$ på $\partial\Omega$.

Då har f och g lika många nollställen i Ω.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial} \frac{f'}{f}\,dz = N(f, \Omega).$$

$f(z_0) = 0 \Rightarrow f(z) = (z-z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$

f pol i $z_0 \Rightarrow f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z)$

$N(f, \Omega) = \#$ nollställen $- \#$ poler

Konsekvens: $f \in H(\Omega)$, f ej konstant, $u \subseteq \Omega$ öppen.

Då $f(u)$ öppen

Sats Maximumprincipen

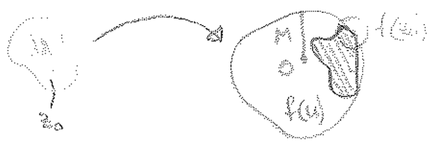
Låt $f \in H(\bar{u})$

Då $\max_{\bar{u}} |f|$ antas på randen av u, ∂u. ($\max_{\bar{u}} |f|$ existerar, ty f kontinuerlig)

Om $\exists z_0 \in u$; $|f(z_0)| = \max_{\bar{u}} |f|$ så är f konstant.

Bevis Vet att f kontinuerlig, att $\exists z_0 \in \bar{u}$ där $|f(z_0)| = \max_{\bar{u}} |f|$

Antag $z_0 \in u$. Betrakta $f(u)$:



$|f(z)| \leq M$

$\because$ $f(u)$ ej öppen

$\therefore$ f konstant

Sats Säg $f \in H(\bar{\Delta})$

$\Delta = \{z;\ |z-z_0| < r\}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta$$

Bevis Vet $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

Parametrisera $\partial\Delta$: $z = z_0 + re^{i\theta}$ $\quad 0 \xrightarrow{\theta} 2\pi$

Då $HL = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$

Konsekvens: $|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{i\theta})|\,d\theta \leq \max |f(z_0+re^{i\theta})| = \max_{\partial\Delta} |f|$

Möbiusavbildningar

En funktion av typen $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ är en Möbiusavbildning.

$T \in M$.

Konventioner för Möbiusavbildningar: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

Egenskaper:

1) $T, S \in M \Rightarrow S \circ T \in M$ $\qquad (S \circ T(z) = S(T(z)))$

Bevis: $T = \frac{az+b}{cz+d}$, $S = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$

$$S \circ T(z) = \frac{\alpha \frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma \frac{az+b}{cz+d} + \delta} = \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)} =$$

$$= \frac{Az+B}{Cz+D} \in M$$

$$S \circ T(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

Till varje $T \in M$, $T = \frac{az+b}{cz+d}$, associerar vi matrisen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = M_T$

Då $M_{S \circ T} = M_S M_T$. Koll:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{bmatrix}$$

<u>Konsekvens</u>: Om $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ så är möbiusavbildningen inverterbar, och inversen också en möbiusavbildning.

Koll: $\frac{az+b}{cz+d} = T(z) = w$

$$az + b = w(cz+d)$$
$$(a - wc)z = wd - b$$
$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

(Men varför kom inte $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ in?)

Om $ad - bc = 0$ så $(a, b) = \lambda(c, d)$

$\because$ $T(z) = \lambda$ = konstant. Kallas <u>oäkta Möbiusavbildningar</u>

2) Fixpunkten: z_0 är en fixpunkt till T om $T(z_0) = z_0$, det vill säga:

$$\frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0 \Rightarrow cz_0^2 + dz_0 = az_0 + b.$$

Alltså finns högst två lösningar (Om inte ekvationen är trivial, $c=b=0$, $d=a$. $T(z)=z$)

Alla $T \in M \setminus \{T(z) = z\}$ har högst två fixpunkter. Ekvivalent kan vi säga:

Om T har tre fixpunkter så $T(z) = z$

<u>Prop.</u> Antag att $z_0 \neq z_1 \neq z_2$ och $T(z_j) = S(z_j)$, $j = 0, 1, 2$

Då $T(z) \equiv S(z)$

<u>Bevis</u>. Betrakta $S^{-1} \circ T = R$. Då har vi $R(z_j) = z_j$, $j = 0, 1, 2$

$\because$ $R(z) = z$ $\therefore$ $T(z) = S(z)$

SATS: Låt z_0, z_1, z_2 skilda, och w_0, w_1, w_2 också skilda. Då:

$\exists!\, T \in M;\ T(z_j) = w_j$

Bevis Vet att det existerar högst en.

Existens: Antag $w_0 = 0,\ w_1 = 1,\ w_2 = \infty$

Tag $T(z) = \frac{z - z_0}{z - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_0}$

Då $T(z_0) = 0,\quad T(z_1) = 1,\quad T(z_2) = \infty$

För allmänna fallet, tag $S \in M$

$S(w_0) = 0,\quad S(w_1) = 1,\quad S(w_2) = \infty$

Punchline: Tag $R = S^{-1} \circ T$

$S^{-1}(0) = w_0,\ S^{-1}(1) = w_1,\ S^{-1}(\infty) = w_2$

Så $R(z_0) = w_0,\quad R(z_1) = w_1,\quad R(z_2) = w_2$

SATS: Låt L vara en rät linje i $\mathbb{C}$. Då är bilden av L under $T \in M$ antingen en linje eller en cirkel.

Låt $C \in \mathbb{C}$ vara en cirkel. Då är bilden av C under $T \in M$ en cirkel eller en rät linje.

Ex. $T(z) = \frac{1}{z},\quad C = \{z;\ |z - z_0| = r\}$

$T(C) = \{w;\ w = T(z),\ \text{där } |z - z_0| = r\} = \{w;\ |T^{-1}(w) - z_0| = r\} = \{w;\ |\frac{1}{w} - z_0| = r\}$

$|\frac{1}{w} - z_0| = r \iff |1 - wz_0| = r|w| \iff 1 - 2\operatorname{Re} w\bar{z}_0 + |w|^2|z_0|^2 = r^2|w|^2$

$(|z_0|^2 - r^2)|w|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{z}_0 w + 1 = 0$

Två fall:

$|z_0|^2 - r^2 = 0 \Rightarrow 1 - 2\operatorname{Re} \bar{z}_0 w = 0.$ Rät linje

$|z_0|^2 - r^2 \neq 0 \Rightarrow |w^2| - 2\operatorname{Re} Aw + B = 0.$ Cirkel

Möbiusavbildningar

$T \in M = \{\text{Möbiusavbildningar}\}$

om $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Och $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

$T(\infty) = \lim_{z \to \infty} T(z) = \dfrac{a}{c}$

Fakta:

(i) Varje T motsvarar en matris: $T \sim M_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Sammansättning av Möbiusavbildningar motsvarar multiplikation av matriser:

$S \circ T \sim M_{S \circ T} = M_S M_T$

Explicit: $T = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $S = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

$$M_{S\circ T} = M_S M_T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{bmatrix}$$

$$\therefore S \circ T = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}$$

(ii) Varje $T \in M$ har en invers om $ad - bc \neq 0$.

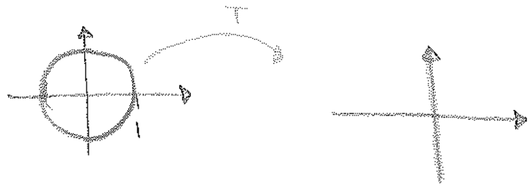
$M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1}$

(iii) Avbildningsegenskaper

SATS: $\left.\begin{array}{l} z_0, z_1, z_2 \text{ skilda} \\ w_0, w_1, w_2 \text{ skilda} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, T \in M;\ T(z_0) = w_0 \wedge T(z_1) = w_1 \wedge T(z_2) = w_2$

(iv) Bilden av en cirkel eller en rät linje under en $T \in M$ är en cirkel eller en linje (en cirkel kan bli en linje, och omvänt).

Ex. Hitta en TEM som avbildar enhetscirkeln på imaginäraxeln.



Lösning

Välj $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ $\in \{z;\ |z| = 1\}$

Välj $w_0 = 0$, $w_1 = i$, $w_2 = \infty$ $\in$ Imaginäraxeln

Hitta $T(1) = 0$, $T(i) = i$, $T(-1) = \infty$

$$T = \frac{z-1}{z+1} \frac{i+1}{i-1} i = \frac{z-1}{z+1}$$

Bevis av (iv)

a) Stämmer om $T = az + b$

b) Stämmer om $T(z) = \frac{1}{z}$

Låt L vara en rät linje: $\operatorname{Re} \bar{A} z + B = 0$

$T(L)$: $\operatorname{Re} \bar{A} \frac{1}{w} + B = 0$ (Varför?)

$\Leftrightarrow$ $\bar{A}\frac{1}{w} + A\frac{1}{\bar{w}} + 2B = 0$, $\bar{A}\bar{w} + Aw + 2B|w|^2 = 0$, vilket är en cirkel eller en rät linje (linje om $B = 0$).

c) Därför gäller det alltid, ty:

d) Varje $T = \dfrac{az+b}{cz+d}$ kan skrivas $T = S \circ R \circ V$, där S, V affina (polynom av grad ett), och $R(z) = \frac{1}{z}$

Bevis: Utför divisionen

$az + b = q(cz+d) + r$, $r, q \in \mathbb{C}$

$T = q + \dfrac{r}{cz+d} = S \circ R \circ V$, där $S = q + rz$, $V = cz + d$.

(Detta har konsekvensen att varje $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ kan skrivas: $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

7c) Hitta en $\tilde{T} \in M$;

$\tilde{T}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\tilde{T}: \mathbb{R} \longrightarrow \{z;\ |z - \frac{5}{4}| = \frac{3}{4}\}$

Lösning: Hitta först $S: \mathbb{R} \longrightarrow \{z;\ |z| = 1\}$

Tag $T(z) = \frac{1-z}{1+z}$ (Avbildar enhetscirkeln på imaginäraxeln!)

$S(z) = w \iff z = T(w) = \frac{1-w}{1+w}$

$z + zw = 1 - w$

$zw + w = 1 - z$

$w = \frac{1-z}{1+z}$ $(= T\ !)$

Sätt nu:

$\tilde{T} = \frac{3}{4}\frac{1-z}{1+z} + \frac{5}{4}$

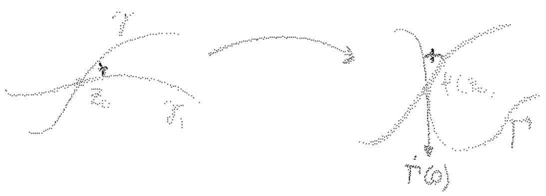
Konforma avbildningar

Låt $z \longrightarrow f(z)$ vara holomorf

Låt $\gamma(t)$ kurva $\gamma(0) = z_0$

$\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ kurva, $\Gamma(0) = f(z_0)$

$\dot{\Gamma}(0) = f'(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = f'(z_0)\dot{\gamma}(0)$



Antag $f'(z_0) \neq 0$, $\dot{\gamma}(0) \neq 0$

Då $\arg \dot{\Gamma}(0) = \arg \dot{\gamma}(0) + \theta_0$, $(\theta_0 = \arg f'(z_0))$

och $\arg(\dot{\Gamma}_1(0)) = \arg \dot{\gamma}_1(0) + \theta_0$

Viktig slutsats: Vinkeln mellan $\dot{\gamma}(0)$ och $\dot{\gamma}_1(0)$ = Vinkeln mellan $\dot{\Gamma}(0)$ och $\dot{\Gamma}_1(0)$

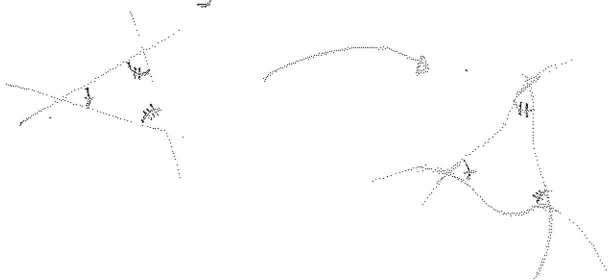
$\text{Vinkeln}(\gamma, \gamma_1) = \arg\dot{\gamma} - \arg\dot{\gamma}_1 = \arg\dot{\Gamma} - \arg\dot{\Gamma}_1 = \text{vinkeln}(\Gamma, \Gamma_1)$

Def: En avbildning f är konform om den bevarar vinklar mellan kurvor.

Sats: En holomorf funktion f med $f' = 0$ definierar en konform avbildning.

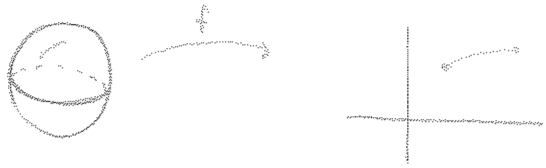
Spec: Möbiusavbildningar definierar konforma avbildningar.

Konform avbildning:

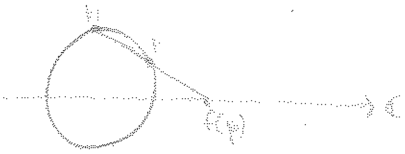


Tillämpningsområde: kartor

Det finns ingen f: Sfär $\to$ plan som bevarar avstånd

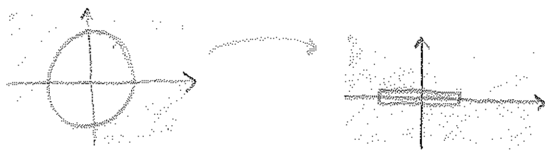


Men det finns ett f: Sfär $\to$ plan som är konform!



(Stereografisk projektion)

Ex. $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ är en konform avbildning från $\{z;\ |z|>1\}$ till $\Omega = [-1,1]^c =$
$= \{z \in \mathbb{C};\ z \neq x,\ x \in [-1,1]\}$



① f är entydig om $|z|>1$:

Säg $f(z_0) = f(z_1)$ $\quad \left(f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$

$\frac{1}{z_0} + z_0 = \frac{1}{z_1} + z_1 = w$

$z_0^2 + 1 - w z_0 = 0$

Finn lösningar z_0 och z_1. Men $z_0 = \frac{1}{z_1} \Rightarrow$ Högst en av z_0 och z_1 uppfyller $|z|>1$. $\therefore f$ entydig från $\{z;\ |z|>1\}$

$|z|=1 \Rightarrow z=e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

$f(z) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos\theta \in [-1,1]$

$\therefore f: \{z; |z|=1\} \longrightarrow [-1,1]$

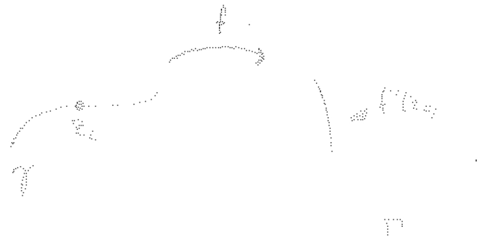
$f: \{z; |z|>1\} \longrightarrow [-1,1]^c$

Ty $f(z)=w$ har två lösningar z_0 och $\frac{1}{z_0}$. Om $|z_0|=1$ så $w\in[-1,1]$, och om $w\in[-1,1]^c$, så $|z_0|>1$ (eller $|z_0|<1$).

(Om $w\in[-1,1]$, $w=\cos\theta$ för något θ, och $w=f(z)$, där $|z|=1$)

30/9 2011

Konform avbildning



Låt f holomorf,

$t \longrightarrow \gamma(t)$ en kurva med $\gamma(0) = z_0$

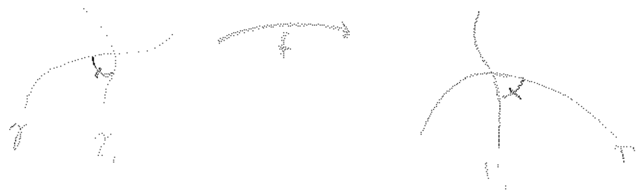
$\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ $\quad \Gamma(0) = f(z_0)$

$\dot{\Gamma}(0) = \dot{\gamma}(0) f'(z_0)$. Antag $f'(z_0) \neq 0$. $\quad f'(z_0) = re^{i\theta}$

$\therefore \arg \dot{\Gamma}(0) = \arg \dot{\gamma}(0) + \theta \leftarrow \arg f'$

$\quad |\dot{\Gamma}(0)| = |\dot{\gamma}(0)| r$

Speciellt: f bevarar vinklar mellan kurvor:



$\arg \dot{\gamma}(0) - \arg \dot{\gamma}_1(0) = \arg \dot{\Gamma}(0) - \arg \dot{\Gamma}_1(0)$

Multiplikation med f' approximerar $f(z) - f(z_0)$ mycket bra då $z \approx z_0$,

$f(z) - f(z_0) \approx f'(z_0)(z - z_0)$

$\therefore f(z) - f(z_0) \approx$ vridning med vinkeln θ och skalförändring med $r = |f'(z)|$

Former bevaras:

Def/Prop: En holomorf f med $f' \neq 0$ definierar en konform avbildning.

Exempel på konforma avbildningar:

(i) Möbiusavbildningar

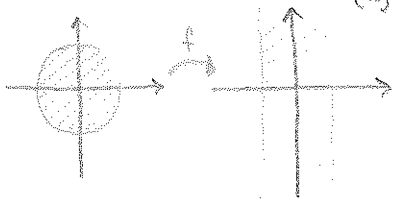
(ii) $f(z) = z^2$, $\quad z \neq 0$ $\quad$ (z^α fungerar också)

(iii) $f(z) = \log z$

Den senare avbildningen kan illustreras, till exempel från högra halvplanet.

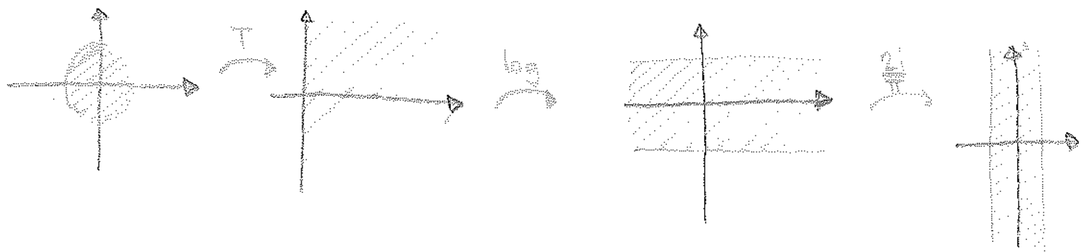
$\log z = \log|z| + i\arg z$

Ex. Avbilda konformt $\{z;\ |z|<1\}$ på $\{w;\ |\mathrm{Re}\, w|<1\}$



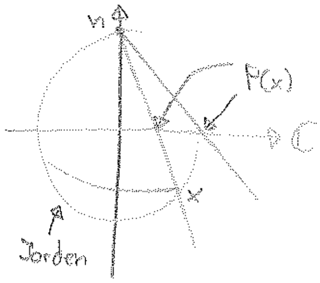
Lösning $z \longrightarrow T(z) = \frac{1-z}{1+z}$ avbildar $\Delta = \{z;\ |z|<1\}$ på högra halvplanet,

ty $T(1) = 0$, $T(-1) = \infty$, $T(1) = -2i$

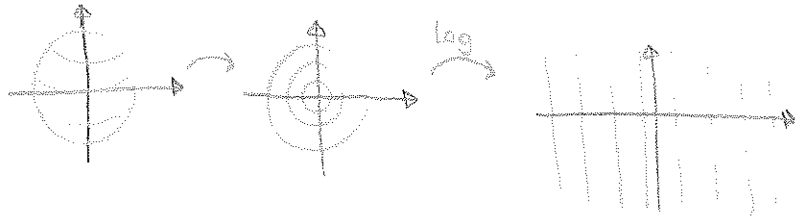


$\therefore\ f = \frac{2i}{\pi} \log \frac{1-z}{1+z}$

Mercators projektion



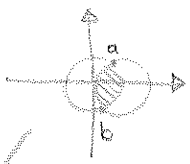
Stereografisk projektion, P är konform (acceptera!)



Latituder $\longrightarrow$ Cirklar med centrum i origo $\xrightarrow{\log}$ linjen $\mathrm{Re}\, w =$ konstant
$(\mathrm{Re} \log z = \log |z|)$

Längdskalan beror bara på Re.

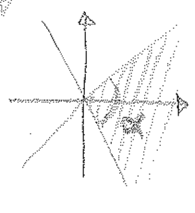
Övning Betrakta cirklarna $|z|<1$ och $|z-1|<1$.

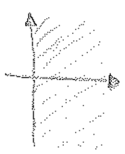


Avbilda det skuggade området på högra halvplanet.

$a \longrightarrow \infty, \quad b \longrightarrow \infty$

$T(z) = \dfrac{z-b}{z-a} = w$ följt av $w \longrightarrow w^{\pi/\alpha}$





, Det vill säga $f(z) = \left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$

Vad är då vinkeln α? Vad är a och b?

a och b

$|a|=1, \; |a-1|=1$

$|a|^2+1-2\text{Re}\, a=1,$

$\text{Re}\, a=\frac{1}{2}, \; \text{Im}\, a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \; b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

α

α är vinkeln mellan cirklarna (ty avbildningen konform), vilket är vinkeln mellan normalerna, $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$f(z)=c\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^3$, där c ordnar så att vi får rätt halvplan

Harmoniska funktioner

Def: u är harmonisk om $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

① f holomorf $\Rightarrow$ $u=\text{Re} f$ harmonisk $(f=u+iv)$

ty $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$; så $\Delta u=0$

② I ett enkelt sammanhängande område är varje harmonisk funktion $u=\text{Re} f$, för någon holomorf f.

Ex. $u=x^2-y^2$

Hitta f $\Leftrightarrow$ Hitta $v=\text{Im} f$,

$v'_y=u'_x=2x, \; v'_x=-u'_y=2y$

$\therefore v=2xy+c(x), \quad v=2xy+d(y)$

$\therefore v=2xy+C$

$f=x^2+y^2+2ixy+iC$

③ Medelvärdessatsen

u harmonisk $\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta = u(z_0)$

Bevis. $u = \mathrm{Re}\, f$, f holomorf

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

Tag nu Realdelen!

④ u harmonisk och ϕ holomorf

$\Rightarrow u(\phi(z))$ harmonisk

Bevis. $u = \mathrm{Re}\, f$, f holomorf, $f\circ\phi$ holomorf

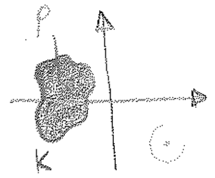
$u(\phi(z)) = \mathrm{Re}\, f(\phi(z))$ harmonisk

Ex. $u(z) = \log|z-z_0|$ harmonisk (ty $\log|z-z_0| = \mathrm{Re}(\log(z-z_0))$)

Fysikalisk tolkning: $u(z)$ är den potentiella energin hos en enhets-massa i z, med avseende på en enhetsmassa i z_0.

Allmänt: Den potentiella energin i punkten z med avseende på en kontinuerlig massfördelning $\rho(w)\,du\,dv$ $(w = u+iv)$ är:

$$u(z) = \int_K \log|z-w|\,\rho(w)\,du\,dv$$



u är harmonisk utanför K.

Övn. Antag f holomorf i $\Delta = \{z;\ |z|\le 1\}$, och antag att $\mathrm{Re}\, f = 0$, då $|z|=1$. Visa att f är konstant.

Lösning. $u = \mathrm{Re}\, f$, f harmonisk. $u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\,d\theta = 0$

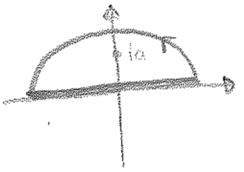
Betrakta funktionen $e^f = F$. $|F(0)| = e^{\mathrm{Re}\, f(0)} = 1$, $|F(e^{i\theta})| = e^{\mathrm{Re}\, f(e^{i\theta})} = 1$

Så $|F(0)| = \max_{|z|=1}|F(z)|$. Så enligt maximumprincipen är F konstant, och alltså är även f konstant.

CV 2.6]

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \left\{ \begin{matrix} x = ta \\ dx = dt \cdot a \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\,dt}{(t^2+1)a^2} = \frac{1}{a}\Big[\arctan t\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}$

Alternativt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(ia) = \frac{2i\pi}{2ia} = \frac{\pi}{a}$



$$\int_{\substack{|z|=R \\ 0\le\theta\le\pi}} \frac{dz}{z^2+a^2} = \left\{ z = Re^{i\theta} \right\} \le \int_0^{\pi} \frac{R\,d\theta}{(Re^{i\theta})^2+a^2} \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{R\,d\theta}{R^2-a^2} \le \frac{C}{R} \longrightarrow 0 \text{ då } R \to \infty$$

Uppgiften i boken var $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\int\left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$

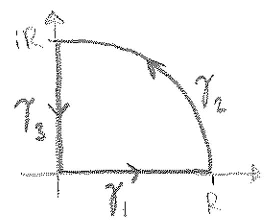
30/9 2011

CV 3.1

2) $f(z)=z^4-3z^2+3$

Sökt. Antalet lösningar till $f(z)=0$ i första kvadranten

Lösning Använd argumentprincipen



$\gamma_R=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$

$\text{argvar}(\gamma_1,f)=0$

$\text{argvar}(\gamma_2,f)\approx\text{argvar}(\gamma_2,z^4)=4\,\text{argvar}(\gamma_2,z)=4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$ (För stora R)

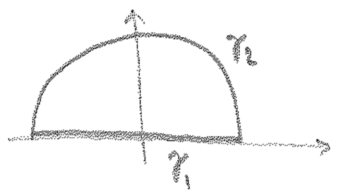
$\text{argvar}(\gamma_3,f)=\{f(iy)=y^4+3y^2+3\}=0$

$\text{argvar}(\gamma_R,f)\approx 2\pi$, För stora R så $\text{argvar}(\gamma_R,f)=2\pi$

Så antalet lösningar är $\frac{2\pi}{2\pi}=1$

8) $f(z)=2z^4-2iz^3+z^2+2iz-1$

Sökt. Antalet lösningar till $f=0$ i övre halvplanet



$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$

$\text{argvar}(\gamma_2,f)\approx\text{argvar}(\gamma_2,z^4)=4\pi$

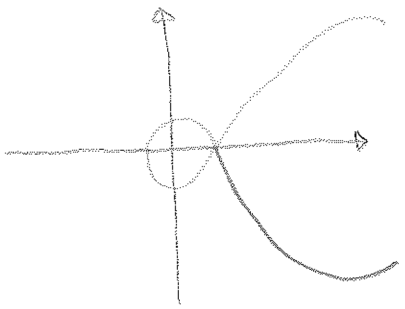
Men vad är $\text{argvar}(\gamma_1,f)$?

På γ_1: $f=f(x)=2x^4-2ix^3+x^2+2ix-1=2x^4+x^2-1+2i(x-x^3)$

Plotta kurvan $t\longrightarrow(2t^4+t^2-1,\ 2i(t-t^3))$, $-\infty\xrightarrow{t}\infty$

$x=2t^4+t^2-1$

$y=2i(t-t^3)$



$$\begin{cases} x = 2t^4 + t^2 - 1 \\ y = 2t(1-t^2) \end{cases}$$

$1 < t < \infty$

$0 \leq t \leq 1$ $\quad x(t)$ löper från $2 \longrightarrow -1$

$\quad y(t)$ —— " —— $0 \longrightarrow 0$ positivt

$t < 0$ spegelbilden

$\therefore$ $\arg\mathrm{var}(\gamma_1, f) = -2\pi$ (Tänk på kurvans riktning! $-\infty \xrightarrow{t} \infty$)

$\therefore$ $\arg\mathrm{var}(\gamma, f) = 4\pi - 2\pi = 2\pi$

$\therefore$ Antalet nollställen i övre halvplanet: $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

12) Antalet lösningar till $z^3 - 3z + 1 = 0$ i $1 < |z| < 2$ (Ω)

(i) Antalet nollställen i $|z| < 2$

Rouché: $|h| < |f|$ på $\partial\Omega$ $\Rightarrow$ f och $f-h$ har lika många nollställen

Tag $h = 3z - 1$, $\quad |z| = 2 \Rightarrow |h| = |3z - 1| < |3z| + |-1| = 7$

$\quad f = z^3$, $\quad |z| = 2 \Rightarrow |f| = 8$

$\therefore$ $|f| > |h|$ på $\partial\Omega$

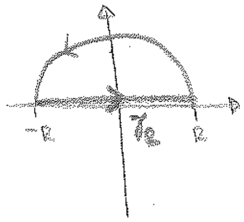
$\therefore$ z^3 och $z^3 - 3z + 1$ har lika många nollställen för $|z| < 2$, det vill säga 3 stycken.

(ii) $|z| < 1$

Rouché: $-3z$ och $z^3 - 3z + 1$ har lika många nollställen för $|z| < 1$, det vill säga 1.

$\therefore$ Antalet nollställen i $1 < |z| < 2$

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\gamma x}\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$



Tag $\gamma>0,\ a>0,\ b>0$

$|e^{i\gamma z}| = e^{-\gamma \operatorname{Im} z}$, begränsad om $\operatorname{Im} z \geq 0$

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{i\gamma z}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{övre}\\ \text{halvplanet}}} \operatorname{Res}$$

Poler: $z = ia,\ z = ib$

Enkla! (Om $a \neq b$)

$\operatorname{Res}(ia) = \dfrac{H(ia)}{2ia}$, för $H(z) = \dfrac{e^{i\gamma z}}{z^2+b^2}$

$$\operatorname{Res}(ia) = \frac{e^{-\gamma a}}{b^2-a^2} \cdot \frac{1}{2ia}$$

$$\operatorname{Res}(ib) = \frac{e^{-\gamma b}}{a^2-b^2} \cdot \frac{1}{2ib}$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{i\gamma z}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2ia}\cdot\frac{e^{-\gamma a}}{b^2-a^2} + \frac{1}{2ib}\cdot\frac{e^{-\gamma b}}{a^2-b^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-\gamma a}}{a} - \frac{e^{-\gamma b}}{b}\right)$$

$\displaystyle\int_{\gamma_R} = \int_{-R}^{R} + \int_{\gamma_R\setminus[-R,R]}$, där $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\gamma x}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\gamma x}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$

$$\left|\int_{\substack{|z|=R\\ 0\leq\theta\leq\pi}} \cdots\right| \leq \int_{\substack{|z|=R\\ 0\leq\theta\leq\pi}} |\cdots| = \int_{\substack{|z|=R\\ 0\leq\theta\leq\pi}} \frac{|e^{i\gamma z}|}{|z^2+a^2||z^2+b^2|}\,|dz| \leq \int_0^{\pi} \frac{1\cdot R\,d\theta}{(|z|^2-a^2)(|z|^2-b^2)} =$$

$$= \frac{\pi R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)} \longrightarrow 0, \text{ då } R \longrightarrow \infty$$

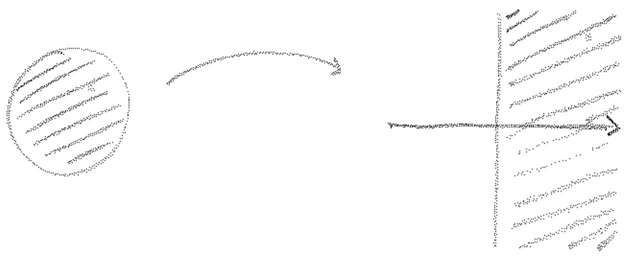
Så alltså har vi:

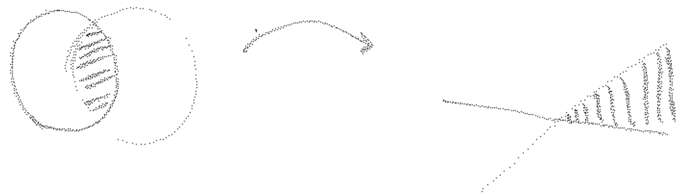
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\gamma x}\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-\gamma|a|}}{|a|} - \frac{e^{-\gamma|b|}}{|b|}\right)$$

Angående konforma avbildningar

Avbilda $\{z;\,|z|<1\}$ på $\{w;\,\mathrm{Re}\,w>0\}$

Lösning Avbilda $\{z;\,|z|=1\}$ på $\{w;\,\mathrm{Re}\,w=0\}$





Sats: $z_k \longrightarrow z_0$ $z_k \neq z_0$

..... z_0 och $f(z_k)=0$, f holomorf

Då $f \equiv 0$

Bevis: Antag $f \not\equiv 0$. Då har f ett isolerat nollställe i z_0, det vill säga

$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$

Men då $f(z_k) \neq 0$ om k stort. $(g(z_k) \neq 0)$

Ex. $e^{z+w} = e^z e^w$

Bevis Sant om z,w reella. Tag w reellt, betrakta $f(z) = e^{z+w} - e^z e^w$

$f(z)=0$ om z reellt.

$\therefore f(z) \equiv 0$

$\therefore e^{z+w} = e^z e^w$ om w reellt

Upprepa argumentet!

Sida 148

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad P, Q \text{ polynom}$$

$\deg P < \deg Q$

Laurentserieutveckla f i lämpliga ringområden, under antagandet att Q har enkla nollställen.

Lösning: Partialbråksuppdela:

$Q(z) = (z - z_1) \dots (z - z_N)$

$$f = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \dots + \frac{A_N}{z - z_N}$$

Räcker att serieutveckla varje $\frac{A_j}{z - z_j}$

(1) Bestäm A_j. Naturlig metod: Handpåläggning

Bokens metod: $A_j = \text{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$ (Onödigt svårt?)

(2) Skriv $\frac{1}{z - z_j} = \frac{1}{\frac{z}{z_j} - 1} \frac{1}{z_j}$, eller $\frac{1}{1 - \frac{z_j}{z}} \frac{1}{z}$, för $|z| < |z_j|$ eller $|z_j| < |z|$ respektive.

2.6, 12

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2k} \theta \, d\theta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad z = e^{i\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2k}\theta \, d\theta = \frac{1}{(2i)^{2k}} \int_{|z|=1} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{2k} \frac{dz}{iz} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vi vet att} \\ \int_{|z|=1} z^m \frac{1}{z} dz = 0 \\ \text{om } m \neq a \end{array} \right\} = \frac{1}{i(2i)^{2k}} \int_{|z|=1} \binom{2k}{k} (-1)^k \frac{dz}{z} =$$

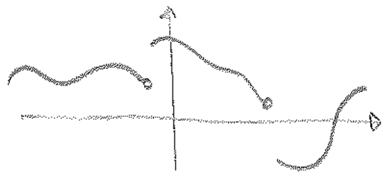
$$= \frac{2\pi i}{i(2i)^{2k}} (-1)^k \binom{2k}{k} = \frac{2\pi}{2^{2k}} \binom{2k}{k}$$

Fouriertransform

Låt $u(t)$ vara en funktion på $\mathbb{R}$, med $u(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Def. En funktion $f \in L^k \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^k dt$ existerar.

$u \in L^1$ kommer att innebära att u är styckvis glatt



Def. $\hat{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} u(t)\,dt$ kallas för u:s Fouriertransform. Notera att integralen är ändlig, till och med absolutkonvergent (ty $u \in L^1$).

I flera variabler definieras Fouriertransformen som $\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\cdot x} u(t)\,dt$

Ex. För $u_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \sigma \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ är fouriertransformen:

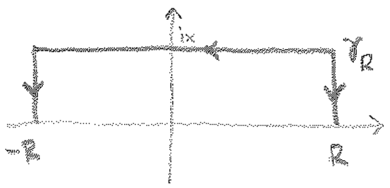
$$\hat{u}_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} u(t)\,dt = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-itx}\,dx = \left[\frac{e^{-itx}}{-ix}\right]_{-\sigma}^{\sigma} = \frac{2}{x}\sin(\sigma x)$$

Hemligheten: u är bestämd av $\hat{u}$!

Sats: Om $\hat{u} \in L^1$ så $u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\hat{u}(x)\,dx$.

Ex. $u(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\quad \hat{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+ix)^2/2}\,dt\; e^{-x^2/2}$

Men $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+ix)^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$:



$$0 = \int_{\gamma_R} f(\omega)\,d\omega = \int_{-R}^{R} e^{-t^2/2}\,dt - \int_{-R}^{R} e^{-(t+ix)^2/2}\,dt + \text{kladd}(R)$$

Det räcker nu att visa att $\lim_{R\to\infty} \text{kladd}(R) = 0$.

$$\text{kladd}(R) = \int_{\substack{w=R+is \\ 0\le s\le x}} e^{-w^2/2}\,dw + \text{liknande}$$

$$\left|e^{-\frac{z^2}{2}}\right| = e^{-\operatorname{Re}\frac{z^2}{2}} = e^{\frac{-R^2+s^2}{2}} \le e^{-R^2/2}\, e^{|x|^2/2}, \text{ så:}$$

$$|\text{kladd}(R)| \le |x| e^{|x|^2/2} e^{-R^2/2} \longrightarrow 0 \text{ då } R \longrightarrow \infty$$

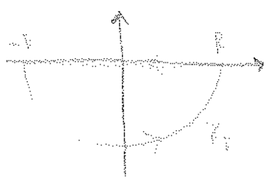
Formellt har vi gjort variabelsubstitutionen i $\int f(t)\,dt = \{t \longmapsto t+ix\} = \int f(t+ix)\,dt$

Slutligen har vi nu att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+ix)^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$, och:

$\hat{u}(x) = \sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2}$

Ex. $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\hat{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{dt}{1+t^2}$$



$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{-izx}}{1+z^2}\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(-i) = -2\pi i \frac{e^{-x}}{-2i} = \pi e^{-x} \quad (\text{för } x \ge 0)$$

Men notera att u reellvärd $\Rightarrow$ $\hat{u}(-x) = \int e^{itx} u(t)\,dt = \overline{\int e^{-itx} u(t)\,dt} = \overline{\hat{u}(x)}$

Om även $\hat{u}$ reell, så u jämn.

Alltså $\hat{u}(x) = \pi e^{-|x|}$

Ex. $v(t) = e^{-|t|}$

$$\hat{v}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-|t|}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-itx-t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-itx+t}dt = \frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} = \frac{2}{1+x^2}$$

Men $\widehat{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} = \pi e^{-|x|}$ ($\widehat{\ }$ är Fouriertransform)

Så $\hat{\hat{v}}(t) = \frac{2}{1+t^2}$

FOURIERS INVERSIONSFORMEL

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)e^{itx}dx$$ (och analogt i $\mathbb{R}^n$)

Alltså: $\hat{\hat{u}}(-t) = 2\pi u(t)$

Ex. $u = \frac{1}{1+t^2}$, $\hat{u} = \pi e^{-|x|}$

$v = e^{-|t|}$, $\hat{v} = \frac{2}{1+x^2}$

Koll: $\hat{\hat{u}}(-x) = 2\pi u(x)$

EGENSKAPER HOS FOURIERTRANSFORMEN

$$\hat{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-itx}\, dt$$

I) $\widehat{au} = a\hat{u}$, $\widehat{u+v} = \hat{u} + \hat{v}$ (Linjär)

II) $v(t) = u(t+a)$, $a \in \text{Const}_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \hat{v}(x) = e^{iax}\hat{u}(x)$

$\left(\hat{v}(x) = \int e^{-itx} u(t+a)\, dt = \{t = a+s\} = \int u(s) e^{-i(s-a)x}\, ds = e^{iax}\hat{u}(x) \right)$

III) $\widehat{u'(x)} = ix\hat{u}(x)$

$\left(\text{"Bevis"}: \widehat{u'(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} u'(t) e^{-itx}\, dt = \left[u(t) e^{-itx} \right]_{-\infty}^{\infty} + ix \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-itx}\, dt = ix\hat{u}(x) \right.$

$\left. u \in L^1 \rightsquigarrow \lim_{t \to \pm\infty} u(t) = 0 \right)$

Anmärkning: Denna egenskap transformerar differentialekvationer till algebraiska ekvationer.

$u + u'' = f \Rightarrow (ix)^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f}$, $\hat{u} = \dfrac{\hat{f}}{(ix)^2 + 1}$

IV) $\widehat{tu} = i \dfrac{d\hat{u}}{dx}$

V) $v(t) = u(bt)$, $b \in \text{Const}_{\mathbb{R}}$

$\hat{v}(x) = \dfrac{1}{|b|} \hat{u}\left(\dfrac{x}{b}\right)$

Bevis: $\hat{v}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(bt) e^{-itx}\, dt = \dfrac{\text{sgn}(b)}{b} \int_{-\infty}^{\infty} u(s) e^{-is\frac{x}{b}}\, ds = \dfrac{1}{|b|} \hat{u}\left(\dfrac{x}{b}\right)$

sgn(b) uppkommer eftersom integrationsriktningen vänds för $b < 0$.

Ex $u(t) = e^{-t^2}$

$v(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = u\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$\hat{v}(x) = \sqrt{2}\,\hat{u}(x\sqrt{2})$

$\hat{u}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-x^2/4}$

FALTNING

$u, v \in L^1$

$$(u*v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)v(t-s)\,ds = \begin{Bmatrix} r = t-s \\ s = t-r \end{Bmatrix} = \int_{\infty}^{-\infty} u(t-r)v(r)(-dr) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\,dr = (v*u)(t)$$

Om u och v är sannolikhetsfördelningar $\left(u, v \geq 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} u = \int_{-\infty}^{\infty} v = 1\right)$

$\Rightarrow u*v$ fördelningen för summan

SATS: $\widehat{u*v} = \hat{u}\cdot\hat{v}$

Bevis: $$\widehat{u*v} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \int_{-\infty}^{\infty} u(s)v(t-s)\,ds\,dt = \iint e^{-itx} u(s)v(t-s)\,ds\,dt =$$

$$= \int u(s) \int v(t-s) e^{-itx}\,dt\,ds = \begin{Bmatrix} t-s = r \\ t = s+r \end{Bmatrix} = \int u(s) \int v(r)\, e^{-irx}\, e^{-isx}\,dr\,ds = \hat{v}(x)\,\hat{u}(x)$$

Övn. 8,5.11 $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $\hat{u}(x) = \pi e^{-|x|}$

$(u*u)(t) = \int \frac{1}{1+s^2} \frac{1}{1+(t-s)^2}\,ds = w(t)$

$\hat{w}(x) = \hat{u}^2 = \left(\pi e^{-|x|}\right)^2 = \pi^2 e^{-2|x|} = \pi\,\hat{u}(2x)$

Vi vet att om $v(t) = u(bt)$, så: $\hat{v}(x) = \frac{1}{|b|}\hat{u}\left(\frac{x}{b}\right)$, Tag $b = \frac{1}{2}$

$\hat{v} = 2\hat{u}(2x) = \frac{2}{\pi}\hat{w}(x)$, så:

$\hat{w} = \frac{\pi}{2}\hat{v} \Rightarrow w = \frac{\pi}{2} v = \frac{\pi}{2} u\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\pi}{2\left(1+(t/2)^2\right)}$

5/10 2011

Fouriertransform

$u(t), \quad t \in \mathbb{R}^n$

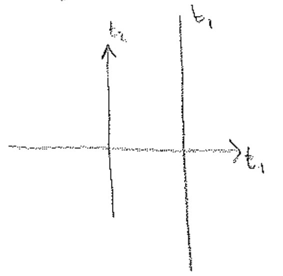
$\hat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t) e^{-it \cdot x} dt \qquad t \cdot x = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$

$\hat{u}$ bestämmer ui $u(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) e^{it \cdot x} dx$

Betrakta $n > 1$.

$$\hat{u}(x_1, 0, \ldots, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t) e^{-it_1 x_1} dt_1 \ldots dt_n \overset{\text{Välj } n=2}{=} \int e^{-it_1 x_1} \underbrace{\left(\int u(t_1, t_2) dt_2 \right)}_{R(u)(t_1)} dt_1 =$$

$$= \int R(u)(t_1) e^{-it_1 x_1} dt_1$$

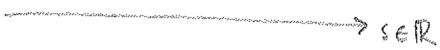


$R(u)(t_1) =$ Integralen av u längs linje parallell med t_2-axeln genom punkten t_1.

$\therefore$ Om vi känner $R(u)(t_1)$ kan vi beräkna $\hat{u}(x_1, 0)$ ($R(u)$ = Radontransformen)

På samma sätt: Om vi känner integralen av u över alla linjer, kan vi beräkna $\hat{u}(x)$ $\forall x$ så känner vi u. Detta används i en tomograf.

Ex. Värmeledning



Låt $u(t,s)$ vara lösning till ekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, $t > 0$, $-\infty < s < \infty$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ u(0,s) = f(s) \end{cases}$$

Låt $\phi(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,s) e^{-isx} ds$ "$= \hat{u}^s(t,x)$"

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(t,s)}{\partial t} e^{-isx} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(t,s) e^{-isx} ds = (ix)^2 \int u(t,s) e^{-isx} ds = -x^2\phi$$

Ty u löser $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$

$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -x^2 \phi$ (ODE i t för varje fixt x)

$\phi(t,x) = C(x) e^{-x^2 t}$

Begynnelsevärde: $f(s) = u(0,s) \Rightarrow \phi(0,x) = \hat{f}(s) \Rightarrow \phi(t,x) = \hat{f}(x) e^{-tx^2}$, $t \geq 0$

$e^{-tx^2} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{C_\pi} e^{-s^2/(4t)}\right]$, ty:

$K(s) = e^{-s^2/4} \Rightarrow \hat{K}(x) = C_\pi e^{-x^2}$, så om $K_t(s) = K\left(\frac{s}{\sqrt{t}}\right)$ har vi $\hat{K}_t(x) = C_\pi e^{-tx^2}$

$\therefore$ $\phi(t,x) = \frac{1}{C_\pi} \hat{K}_t(x) \hat{f}(x)$

$$u(t,s) = \frac{1}{C_\pi} K_t * f(s) = \frac{1}{C_\pi}\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2/(4t)} f(s-r)dr = \frac{1}{C_\pi t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-r)^2/(4t)} f(r) dr$$

Kom ihåg att:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x) e^{itx} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}|^2 dx$$

I kvantmekanik: $u(t)$ komplexvärd, $\int |u(t)|^2 dt = 1$, $|u(t)|^2$ sannolikhetsfördelning för läget.

Då är $|\hat{u}(x)|^2$ sannolikhetsfördelningen för rörelsemängd.

"Bevis":

$$\int u(x)\overline{\hat{v}(x)}dx = \int u(x) \int \overline{e^{-itx} v(t)\, dt}\, dx = \iint u(x)\overline{v(t)} e^{itx}\, dt dx = \int \overline{v(t)} \int u(x) e^{itx} dx dt =$$

$$= \int \hat{u}(-t)\overline{v}(t) dt.$$

Välj $u(x) = \hat{v}(x)$: $\int |\hat{v}(x)|^2 dx = \int |v|^2 dt \cdot 2\pi$ (Om vi accepterar inversionsformeln)

Komplex Fouriertransform

$\hat{u}(x) = \int u(t)e^{-itx}dt$, fungerar om $\int |u| < \infty$

$u'(t) = au$, $u = Ce^{at}$ Uppfyller ej $\int |u| < \infty$

Säg nu istället att $u(t) = 0$ för $t < 0$, och $|u(t)| \leq Ce^{at}$ $t > 0$, något $a > 0$

Sätt $\hat{u}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-itz}dt = \int_0^{\infty} u(t)e^{-itz}dt$ $(u(t) = 0,\ t < 0)$

$|e^{-itz}| = e^{-\operatorname{Re} itz} = e^{ty}$ $(z = x + iy)$

$\therefore \int_0^{\infty} u(t)e^{-itz}dt$ konvergerar om $y = \operatorname{Im} z < -a$

$\left(|u(t)e^{-itz}| \leq Ce^{at}e^{yt} = Ce^{\overbrace{(a+y)}^{<0}t},\ C \in \text{Const}_{\mathbb{R}^+} \right)$

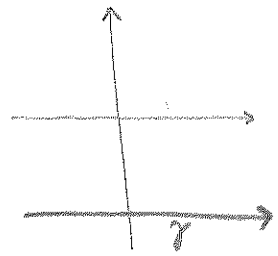
$\therefore$ Om $\operatorname{Im} z < -a$ existerar, om $|u| < Ce^{at}$, så:

$\hat{u}(z) = \hat{u}(x+iy) = \int_0^{\infty} u(t)e^{ty}e^{-itx}dt = \widehat{ue^{ty}}(x)$

Inversionsformel:

$u(t)e^{ty} = \frac{1}{2\pi}\int \hat{u}(x+iy)e^{itx}dx$

$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{u}(x+iy)e^{itx-ty}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} \hat{u}(z)e^{itz}dz =$



$= \left\{ z = -is,\ s = -iz \right\} = \frac{-i}{2\pi}\int \hat{u}(-is)e^{ts}ds =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_{y-i\infty}^{y+i\infty} \hat{u}(-is)e^{ts}ds$

Detta motiverar följande definition:

Def: Låt $u(t) = 0$ för $t < 0$, och $|u(t)| \leq Ce^{at}$ för $t > 0$

Då definierar vi Laplacetransformen av u som:

$\mathcal{L}(u)(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-ts}dt$, definierad om $\operatorname{Re} s > a$

Notera att $\mathcal{L}(u)(s) = \hat{u}(-is)$

SATS: Vi har direkt en inversionsformel

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\gamma-i\infty}^{s=\gamma+i\infty} \mathcal{L}(u)(s) e^{ts}\, ds$$

Ex. $u = 1$ (Notera att detta underförstått betyder $u = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$)

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$$

$u = t^k$

$$\mathcal{L}(t^k)(s) = \int_0^\infty t^k e^{-st}\, dt = \left[\frac{t^k e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{k}{s}\int_0^\infty t^{k-1} e^{-st}\, dt = \frac{k}{s}\mathcal{L}(t^{k-1}) = \frac{k(k-1)}{s^2}\mathcal{L}(t^{k-2}) =$$

$$= \dots = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$u = e^{at}$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad \text{om } \operatorname{Re} s > a$$

ALLMÄNA REGLER:

1) $\mathcal{L}\left(e^{at}u(t)\right)(s) = \int_0^\infty u(t) e^{at} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty u(t) e^{-(s-a)t}\, dt = \mathcal{L}(u)(s-a)$

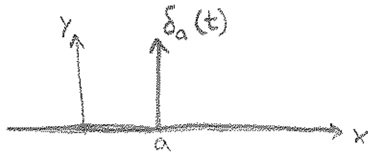
2) $\mathcal{L}\left(tu(t)\right)(s) = \int_0^\infty t u(t) e^{-st}\, dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty u(t) e^{-st}\, dt = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(u)$

Koll: $\mathcal{L}(t^k) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(t^{k-1}) = \left(-\frac{d}{ds}\right)^k \mathcal{L}(1) = \left(-\frac{d}{ds}\right)^k \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}$

7/10 2011

Impulsfunktion – Diracs delta

Def: $\delta_a(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & t < a \\ \text{odefinierad}, & t = a \\ 0, & t > a \end{cases}$



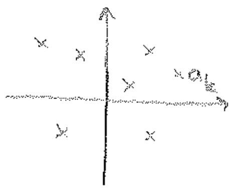
Denna "funktion" kallas Diracs deltafunktion (strängt talat är detta inte en funktion, utan en distribution/generaliserad funktion).
Denna definition är inte helt tillfredsställande, utan en bättre är:

Def: $\delta_a(t)$ är en "funktion" sådan att $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) u(t)\,dt = u(a)$

Detta fungerar också i $\mathbb{R}^n$: δ_a definieras av $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_a(t) u(t)\,dt = u(a)$

Årets Nobelpris: Kvasikristallen

Ny definition av kristall: En kristall är en $f(t) = \sum c_k \delta_{a_k}(t)$ sådan att:
$\hat{f} = \sum d_k \delta_{b_k}$.



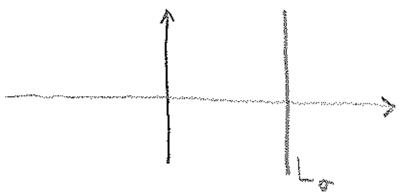
Laplacetransformen

$u(t) = 0, \quad t < 0$

$|u(t)| \leq Ce^{at}, \quad t > 0$, för något C och något a.

$\mathcal{L}[u(t)](s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-ts}\,dt \quad (= \hat{u}(-is))$

Inversion: $u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\sigma} \mathcal{L}[u(t)](s) e^{ts}\,dt$, där L_σ är vilken som helst vertikal rät linje sådan att $\mathrm{Re}(s) = \sigma > a$



Egenskaper:

(i) Linjär: $\mathcal{L}[au+bv] = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(v)$

(ii) $\mathcal{L}[tu](s) = \frac{d}{ds}\mathcal{L}[u](s)$

(iii) $\mathcal{L}[e^{at}u](s) = \mathcal{L}[u](s-a)$

(iv) $\mathcal{L}[u'](s) = s\mathcal{L}[u](s) - u_+(0)$, där $u_+(0) = \lim_{t\to 0^+} u(t)$

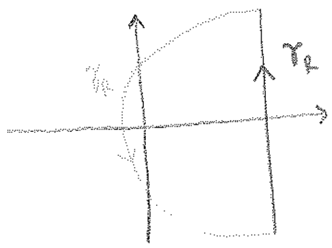
(iv') $\mathcal{L}[u^{(n)}](s) = \mathcal{L}[(u^{(n-1)})'] = s\mathcal{L}[u^{(n-1)}](s) - u^{(n-1)}(0) = s^2\mathcal{L}[u^{(n-2)}](s) - \left(su^{(n-2)}(0) + u^{(n-1)}(0)\right) =$
$= s^n\mathcal{L}[u](s) - \left(s^{n-1}u(0) + s^{n-2}u'(0) + \dots + u^{(n-1)}(0)\right)$

(v) Låt $(u*v)(t) = \int_0^t u(t-r)v(r)dr$. Då:

$\mathcal{L}[u*v] = \mathcal{L}[u]\mathcal{L}[v]$

Ex. Säg att $\mathcal{L}[u] = \frac{1}{s^2-2s+3}$. Finn u! $t>0$

Metod 1: $u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\sigma} \frac{e^{st}}{s^2-2s+3}ds$



Singulära punkter: $s^2-2s+3=0 \Rightarrow s = 1\pm i\sqrt{2} = z_{1,2}$. Måste välja $\sigma\in\mathbb{R}$ så stort att z_1, z_2 är innanför γ_R.

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{e^{st}}{s^2-2s+3}ds = \sum \text{Residyer} = \frac{e^{z_0 t}}{2z_0-2} + \frac{e^{z_1 t}}{2z_1-2} = \frac{e^{t(1+i\sqrt{2})} - e^{t(1-i\sqrt{2})}}{2i\sqrt{2}} = \frac{e^t}{\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2}) =$

$= u(t)$?

Behöver nu visa att $\left|\int_{\text{halvcirkeln}} \frac{e^{st}}{s^2-2s+3}\,ds\right| \longrightarrow 0$ då $R \longrightarrow \infty$

$|e^{st}| \leq e^{Re(s)t} \leq e^{\sigma t} \longleftarrow$ Beror ej på s!

$$\left|\frac{1}{s^2-2s+3}\right| \leq \left|\frac{1}{|s|^2-2|s|-3}\right|$$

När $R \gg 0$ så $|s| \geq \frac{R}{2}$

Då: $|s|^2-2|s|-3 \geq \frac{R^2}{4} - R - 3 \geq \frac{R^2}{10}$, $R \gg 0$

$$\left|\int_{\text{halvcirkeln}} \frac{e^{st}}{s^2-2s+3}\,ds\right| \leq \frac{e^{\sigma t}}{R^2/10}\pi R \longrightarrow 0, \text{ då } R \longrightarrow \infty$$

Alltså har vi att $u(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2})$

Metod 2:

$\boxed{\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}}$ (känd transform)

$$\frac{1}{s^2-2s+3} = \left(\frac{1}{s-z_0} - \frac{1}{s-z_1}\right)\frac{1}{z_0-z_1}$$

$$\frac{1}{s-z_0} = \mathcal{L}[1](s-z_0) = \mathcal{L}(e^{tz_0}\cdot 1) = \mathcal{L}(e^{tz_0}) \text{ et cetera}$$

$$\frac{1}{s^2-2s+3} = \mathcal{L}\left[\frac{e^{tz_0}-e^{tz_1}}{z_0-z_1}\right], \quad u(t) = \frac{e^{t(1+i\sqrt{2})}-e^{t(1-i\sqrt{2})}}{2i\sqrt{2}} = \frac{e^t}{\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2})$$

Ex $\mathcal{L}[\sin At]$, $\mathcal{L}[\cos At]$

$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}}$ (känd transform)

$$\mathcal{L}[\sin At] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iAt}-e^{-iAt}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-iA} - \frac{1}{s+iA}\right) = \frac{A}{s^2+A^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos At] = \ldots = \frac{s}{s^2+A^2}$$

Ex. $\mathcal{L}[u](s) = \frac{s}{(s^2+A^2)^2}$, $u = ?$

$$\mathcal{L}[u](s) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s^2+A^2)}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\frac{\sin At}{A}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[\frac{t\sin At}{A}\right]$$

$\therefore u(t) = \frac{t}{2A}\sin At$

Ex. $u' + u = f(t)$, $t > 0$. $u(0) = a$

Då: $\mathcal{L}[u'] + \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[f]$

$s\mathcal{L}[u] - u(0) + \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[f]$

$\therefore (s+1)\mathcal{L}[u] = a + \mathcal{L}[f]$

$\mathcal{L}[u] = \frac{a}{s+1} + \frac{\mathcal{L}[f]}{s+1}$

$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}[e^{-t}](s)$

$u(t) = ae^{-t} + e^{-t} * f = ae^{-t} + \int_0^t e^{-(t-r)} f(r)\,dr$

Notera att ae^{-t} är homogen- och $\int_0^t e^{-(t-r)} f(r)\,dr$ är partikulärlösningen.

Övning 3, 5.3

$u(t) = e^{-Bt}\sin(At)$

$\mathcal{L}[u] = ?$

Metod 1: $u(t) = e^{-Bt}\dfrac{e^{iAt}-e^{-iAt}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(e^{(iA-B)t} - e^{-t(iA+B)}\right)$

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-iA+B} - \frac{1}{s+iA+B}\right) = \frac{iA+B-(iA-B)}{2i\left((s+B)-iA\right)\left((s+B)+iA\right)} =$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{2iA}{(s+B)^2+A^2} = \frac{A}{(s+B)^2+A^2}$$

Metod 2:

$$\mathcal{L}[\sin At] = \frac{A}{s^2+A^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-Bt}\sin At] = \mathcal{L}[\sin At](s+B) = \frac{A}{(s+B)^2+A^2}$$

Egenskap (iii) på sida 102

Övning 9, 5.3

$u(t) = (H * H)(t)$, där $H(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ är Heavisides stegfunktion

$\mathcal{L}[u] = ?$

$\mathcal{L}[H(t)](s) = \frac{1}{s}$ (ty detta är bara Laplacetransformen av 1)

$$\mathcal{L}[H*H] = \left(\frac{1}{s}\right)^2 = \frac{1}{s^2} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \mathcal{L}[t\cdot H]$$

$\therefore\ H*H = t \quad, t>0$

Obs! $\dfrac{dH}{dt} = \delta_0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a}\frac{dH}{dt}\,dt = 1$ om $a>0$

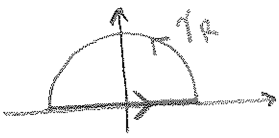
$\dfrac{d}{dt}\delta_0 = \delta_0'$, $\displaystyle\int \delta_0' u\,dt = -u'(0)$

$\mathcal{L}[\delta_0'] = s$

Övning 7, 3.1

$z^4 - 3iz^2 + z - 2 + i = p(z)$

Antal nollställen i övre halvplanet?



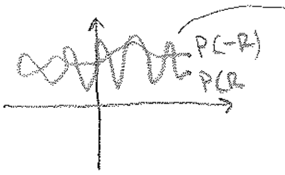
Nollställen inom γ_R

$$= \text{argvar}(p, \gamma_R) = \underbrace{\text{argvar}(p, \text{halvcirkel})}_{\text{I}} + \underbrace{\text{argvar}(p, [-R, R])}_{\text{II}}$$

$\text{I} \approx \text{argvar}(z^4, \text{halvcirkel}) = 4\pi$

II: Betrakta $p(t)$, $t \in \,]-R, R[$

$p(t) = t^n + t - 2 + i(3t^2 + 1) = x(t) + iy(t)$



Spelar ingen roll, ty $y(t) > 0$ för $]-R, R[$

$\therefore \text{II} \approx 0$

$\therefore \text{argvar} = 4\pi$

Nollställena är alltså $\frac{4\pi}{2\pi}$.

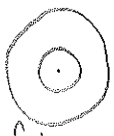
Övning 12, 3.1

Sökt: Antalet nollställen till $p(z) = z^3 - 3z + 1$ i området $1 < |z| < 2$.

Lösning:

Rouchés sats: $|f| > |h|$ på $\partial\Omega$

$\Rightarrow f$ och $f+h$ har lika många nollställen i Ω.



f>h

1. # nollställen i $|z| < 2$

Tag $f = z^3$, $h = 3z - 1$

$|z| = 2 \Rightarrow |f| = 8 > |h|$

$|h| \leq 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$\therefore$ p har 3 nollställen i $|z| < 2$.

2. # nollställen i $|z| < 1$

$f = 3z$, $h = -(z^3 + 1)$

$|z| = 1 \Rightarrow |f| = 3$, $|h| \leq 2$

$|f| > h$

$\therefore$ p har 1 nollställe i $|z| < 1$

Svar: Antalet nollställen är $3 - 1 = 2$

Övning 14, 3.1

Sökt: Antalet nollställen till $g(z) = ze^z - \frac{1}{4}$, $|z| < 2$

Lösning:

$f = ze^z$

$|z| = 2 \Rightarrow |f| = 2e^{\operatorname{Re} z} \geq 2e^{-2}$

$h = \frac{1}{4}$, $|h| = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \overset{?}{<} 2e^{-2} \Leftrightarrow e^2 \overset{?}{<} 8$

Ja

$\therefore$ g har ett nollställe i $|z| < 2$

Övning 15, 3.4,

$f = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, f holomorf

Betrakta kurvorna $u(z) = u(z_0)$, $v(z) = v(z_0)$, där $f'(z_0) \neq 0$.

Då bildar kurvorna rät vinkel.

Bevis:

Normalen till $\{u = c\}$ är $\nabla u = (u_x', u_y')$.

—— " —— $\{v = b\}$ är $\nabla v = (v_x', v_y')$.

Men $(u_x', u_y') \perp (v_x', v_y')$, ty Cauchy-Riemanns ekvationer ger:

$u_x' = v_y'$, $u_y' = -v_x'$.

$\therefore \nabla v = (-u_y', u_x) \perp (u_x, u_y)$ $\quad \left(f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow \nabla u, \nabla v \neq 0\right)$

Övning 2, 3.4.1,

$f(z) = z^\alpha$ $\quad 0 < \alpha < 2$

Visa att

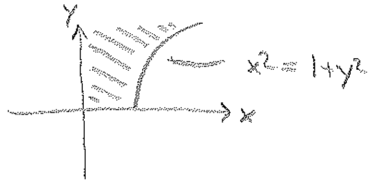
$u = \{z;\ \mathrm{Im}\, z > 0\} = \{z;\ 0 < \arg z < \pi\} \Leftrightarrow 0 < \arg z^\alpha < \pi\alpha$

Resterande mängd

$= \mathbb{C} \setminus \{w;\ 0 < \arg w < \pi\alpha\} = \{w;\ \pi\alpha \leq \arg w \leq 2\pi\}$,

$2\pi - \pi\alpha = \pi(2-\alpha)$

Övning 5, 3.4.11



Avbilda på U = övre halvplanet.

Lösning.

$D =$ kvadrant I $\cap \{(x,y);\ x^2-y^2<1\}$

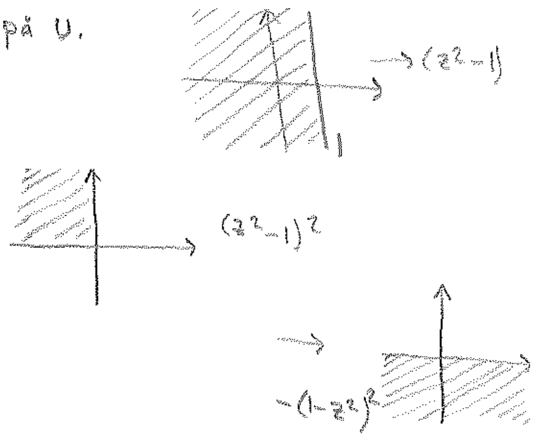
$T(z) = z^2 = w$ avbildar kvadrant I på U.

$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\theta < \pi\right)$

och $\{(x,y);\ x^2-y^2<1\}$ på

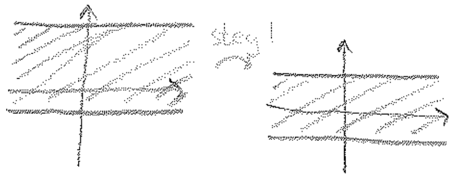
$\{w;\ \operatorname{Re} w < 1\}$

$\left(x^2-y^2 = \operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} w\right)$



Övning 3, 3.5

$D = \{z;\ |z-1| < 2\}$. avbilda på U = övre halvplanet



$z \longrightarrow \frac{z-i}{2}$ avbildas på $\{w;\ |\operatorname{Im} w| < 1\}$

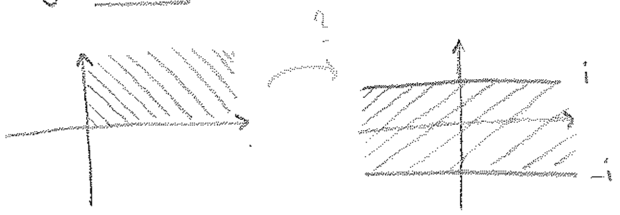
$\downarrow$

$e^{\frac{z-i}{2}}$ avbildas på $\{\zeta;\ -1 < \arg \zeta < 1\}$

$\downarrow$

$F = i\left(e^{\frac{z-i}{2}}\right)^{\pi/2}$

Övning 9, 3.5



$z = re^{i\theta}$,

$0 < \underset{\arg z}{\theta} < \frac{\pi}{2}$

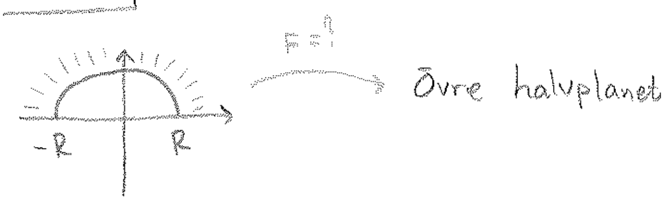
$z \longrightarrow \log z = \log|z| + i\arg z = w$

Avbilda på $\{w;\ 0 \le \operatorname{Im} w < \frac{\pi}{2}\}$

$\downarrow$

$-i + w\frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}\log z - i$

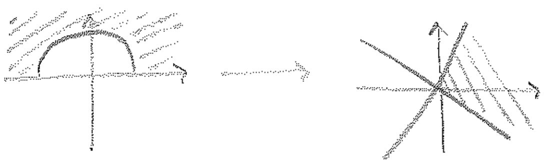
Övning 5, 3.5



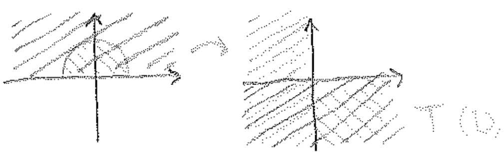
$-R \to 0,\ R \to \infty$

Hitta $T(z)$ Möbiusavbildning med $T(-R) = 0$, $T(R) = \infty$

Då går cirkeln $|z| = R$ och realaxeln på linje genom 0 med vinkeln $\pi/2$.



$T(z) = \frac{z+R}{z-R}$, $T(iR) = -\frac{1+i}{1-i} = -i$



Cirkeln $|z| = R \longrightarrow$ Im-axeln

$|z| < R \longrightarrow$ Vänstra halvplanet

$T(0) = -1$

$F(z) = \left(\frac{z+R}{z-R}\right)^2$ I facit finns en standardlösning $G(z)$, men båda är okej, ty

$F \circ G^{-1}: u \longrightarrow u$

$\therefore z \mapsto G(z)$ funkar $\Rightarrow z \mapsto F \circ G^{-1} \circ G = F$

Laplacetransformen

Anmärkning: $\mathcal{L}[u'(t)](s) = s\mathcal{L}[u(t)](s) - u(0)$

jämför: $\widehat{u'} = ix\hat{u}(x)$. Varför ingen extra term.

För Laplacetransformen: $U(t) = \begin{cases} u(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

"$U' = u' + u(0)\delta_0$" (Derivatan "moraliskt")

$\mathcal{L}[U'] = \mathcal{L}[u'] + u(0)\mathcal{L}[\delta_0] = \mathcal{L}[u'] + u(0)$

$\overset{\|}{s\mathcal{L}[u]}$

$\therefore \mathcal{L}[u'] = s\mathcal{L}[u] - u(0)$

jämför åter med Fouriertransformen:

$\widehat{u'} = ix\hat{u}$ gäller endast om:

① u kontinuerligt deriverbar (glatt)
eller
② u styckvis glatt och kontinuerlig

Ex. $u'' + u = f$, $u'(0) = 0$, $u(0) = 1$

$\mathcal{L}[u''] = s\mathcal{L}[u'] - u'(0) = s^2\mathcal{L}[u] - s$

$s^2\mathcal{L}[u] - s\mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[f]$

$(s^2+1)\mathcal{L}[u] = s + \mathcal{L}[f]$

$\mathcal{L}[u] = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}[f]$

$u = \cos t + f * \sin t = \cos t + \int_0^t f(r)\sin(t-r)\,dr$

Z - TRANSFORMEN

Låt $a = \{a_k\}_0^\infty$ $(\sim u(t))$

Antag: $|a_k| \leq M r_0^k$ för något r_0

DEF: $Z[a](s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} =$

Ex. $a_k = 1$ $\forall k \geq 0$ $(a_k = 0 \quad k < 0)$

$$Z[a] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{för } |z|>1$$

Ex. $a_k = \frac{1}{k!}$

$$Z[a](z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = e^{1/z} \quad \forall z$$

Diskret variant av Laplacetransformen

Tag $u(t)$ definierad på $t \geq 0$

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt \approx \sum_{k=0}^{\infty} u(k)e^{-ks} = \{e^s = z\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = Z[u](e^s)$$

Räkneregler

DEF: $a = \{a_k\}_{k=0}^\infty$, $b = \{b_k\}_{k=0}^\infty$

$$a * b(n) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

(i) $Z[a*b] = Z[a]Z[b]$

bevis: $Z[a]Z[b] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{-m} = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_k b_k z^{-(k+m)} = \{k+m = n\} =$

$$= \sum z^{-n} \sum_{k+m=n} a_k b_m = \sum z^{-n} \sum a_k b_{n-k}$$

Ex. $b = \{b_j\}$ given. Lös

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 - 2a_0 = b_1 \\ a_2 - 2a_1 + a_0 = b_2 \\ \vdots \\ a_n - 2a_{n-1} + a_{n+2} = b_n \\ \vdots \end{cases} \qquad (*)$$

Inför $f = \{f_k\}$, där $f_0 = 1, f_1 = -2, f_2 = 1, f_k = 0 \quad k > 2$

$$Z[f](z) = 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2} = \frac{(z-1)^2}{z^2}$$

$(*)$ säger att $a * f = b$, ty

$$a * f(n) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} f_k = \begin{cases} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}, & n \geq 2 \\ a_1 - 2a_0, & n = 1 \\ a_0, & n = 0 \end{cases}$$

$\therefore (*) \Rightarrow Z[a]\,Z[b]$

$$Z[a] = \frac{Z[b]}{Z[f]} = \frac{z^2}{(z-1)^2} Z[b]$$

Sök $Z[g] = \frac{z^2}{(z-1)^2} \quad \therefore a = g * b$

$Z[g] = \frac{z^2}{(z-1)^2}$, utveckla i Laurentserie

$$\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2} = \frac{1}{(1-w)^2}, \quad w = \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \frac{d}{dw} \frac{1}{1-w} = \frac{d}{dw}(1 + w + w^2 + \dots) = 1 + 2w + 3w^2 + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) w^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{z^k}$$

$\therefore g_k = k+1, \quad k \geq 0$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} g_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (k+1) b_{n-k}$$

Betrakta $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Vad är det?

DEF. Låt $(\Delta a)(n) = a_n - a_{n-1}$ (differensen, derivatan)

$(\Delta^2 a)(n) = a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}$ (Kolla!)

$\therefore$ (*) är en diskret variant av $a'' = b$

Ex. $a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, $k \geq 2$

Fibonaccifäljden: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

f definieras av $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_k = 0$, $k > 2$

$$a * f(n) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} f_k = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$n = 1$: $a_0 = 1$
$n = 0$: 0

Ekvationen blir: $a * f = a - b$, $b = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$

$$Z[a]Z[f] = Z[a] - 1$$

$$Z[f] = 0 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z+1}{z^2}$$

$$Z[a](1 - Z[f]) = 1$$

$$Z[a] = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = 1 + \frac{z+1}{z^2 - z - 1}$$

$$z^2 - z - 1 = 0$$

$$z_{0,1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$Z[a] = 1 + \frac{c_0}{z - z_0} + \frac{c_1}{z - z_1}$$

$$a_k = c_0 z_0^k + c_1 z_1^k = c_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Shifting:

$a = \{a_j\}$

$b = S[a](j) = a_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots$

$a = \{a_0, a_1, \ldots\}$

$b = \{a_1, a_2, \ldots\}$

$S[a] - a \approx$ derivata

$Z[b](z) = z\left(Z[a] - a_0\right)$

bevis:

$$z\left(Z[a] - a_0\right) = z\left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right) = a_1 + \frac{a_2}{z} + \ldots$$

allmänt: $S^N[a](j) = a_{j+N}$

$$Z[S^N[a]] = z^N\left(Z[a] - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_{N-1}}{z^{N-1}}\right)\right)$$

Detta kan användas för att lösa differensekvationer:

$$\sum_{j=0}^{p} A_j y_{j+n} = \sum_{j=0}^{q} B_j x_{j+n} \text{ , } A, B \text{ givna , } x \text{ input}$$

Övning 17, 5.5 | $\quad y_n - y_{n-1} = x_n + x_{n-1} + x_{n-2}$, $y_0 = 1 \qquad (*)$

Z-transformera: $Z[y] = Y(z)$

$Z[\{y_{n+1}\}] = Z[S[y]] = z(Y - 1)$

$$(*) \Rightarrow Y - z(Y - 1) = X + z(X - x_0) + z^2\left(X - x_0 - \frac{x_1}{z}\right)$$

$$Y(1 - z) = -z + (1 + z + z^2)X - zx_0 - z^2x_0 - zx_1$$

$$Y = -\frac{z}{1-z} + \frac{1+z+z^2}{1-z}X - \frac{z(x_0 + x_1)}{1-z} - \frac{z^2x_0}{1-z}$$

$\frac{z}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k}$, et cetera

Övn. 11, 5.3

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{\sin t}{t}, & t>0 \end{cases}$$

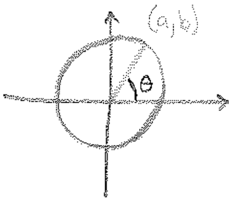
Beräkna $\mathcal{L}[u] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-ts}\,dt$

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[u] = \int_0^\infty \sin t\, e^{-ts}\,dt = \frac{1}{1+s^2}$$

$$\mathcal{L}[u] = C - \arctan s$$

$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[u](s) = 0$ ger $C = \lim_{s\to\infty} \arctan s = \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{L}[u](s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$



$\tan\theta = \frac{b}{a}$, $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{a}{b}$

$\theta = \arctan\frac{b}{a}$, $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \arctan\frac{a}{b} + \arctan\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}$

Genomgång av exempeltenta

1a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx$ b) $\hat{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^4}\,dx$, $u = \frac{1}{1+x^4}$

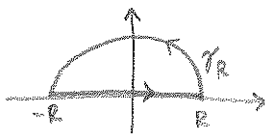
b) Notera att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\xi x - i\sin\xi x}{1+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\xi x}{1+x^4}\,dx$, ty $\sin x$ udda. (*)

Gör b) först !

Lösning. Sätt $a = -\xi$

Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^4}\,dx$

Residymetoden: $|e^{iaz}| = e^{-ay}$.

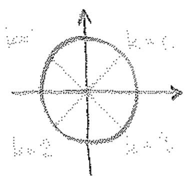


Välj $a \geq 0$ först.

$|e^{iaz}| \leq 1$ på γ_R

$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{1+z^4}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{innanför}\\ \gamma_R}} \text{Res}$

Res:



$z^4+1=0 \Rightarrow z^4 = e^{i\pi + 2ki\pi}$

$z = e^{\frac{i\pi}{4}(1+2k)}$, $k = 0,1,2,3$

Lösningar i övre halvplanet: $z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$

$\text{Res}(\ldots, z_0) = \frac{e^{iaz_0}}{4z_0^3}$, $\text{Res}(\ldots, z_1) = \frac{e^{iaz_1}}{4z_1^3}$

$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$e^{iaz_0} = e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\frac{ia}{\sqrt{2}}}$, $e^{iaz_1} = e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{ia}{\sqrt{2}}}$

Alltså:

$$\frac{e^{iaz_0}}{4z_0^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{i\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)}, \quad \frac{e^{iaz_1}}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{-i\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{9\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{-i\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$2\pi i \sum_i \mathrm{Res} = \frac{2\pi i}{4}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(e^{i\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \frac{\pi i}{2}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(-e^{i\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) =$$

$$= \frac{-\pi i}{2}e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(2i\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$\therefore \int_{\gamma_R}\frac{e^{iaz}}{1+z^4}\,dz = \pi e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Vi måste nu visa att $\displaystyle\int_{\substack{z=Re^{i\theta}\\ 0<\theta<\pi}}\frac{e^{iaz}}{1+z^4}\,dz \longrightarrow 0$ då $R\to\infty$

$$\left|\int_{\substack{z=Re^{i\theta}\\ 0<\theta<\pi}}\frac{e^{iaz}}{1+z^4}\,dz\right| \le \int_{\dots}\frac{|e^{iaz}|}{|1+z^4|}|dz| \le \frac{R\pi}{R^4-1} \longrightarrow 0 \text{ då } R\to\infty$$

Alltså:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^4}\,dx = \pi e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Om $a<0$ så ser vi ur (*) att resultatet är oförändrat; bara $|a|$ är relevant.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{1+x^4}\,dx = \pi e^{-\frac{|a|}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right) \quad \longleftarrow \text{Svar}$$

a) Sätt $a=1$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \pi e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$

2. $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$. Utveckla i Laurentserie $|z|>1$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$

Svår lösning:

$$\frac{e^z}{1-z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

$$e^z = (1-z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{k+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) z^k$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$a_k - a_{k-1} = 0, \; k<0$$

$$\therefore \; a_k = a, \; k<0$$

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{k!}, \; k \geq 0$$

$$f(z) = a\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

$$a = ? \qquad (= a_{-1})$$

$$\begin{cases} a_0 - a_{-1} = \frac{1}{0!} \\ a_1 - a_0 = \frac{1}{1!} \\ \vdots \\ a_k - a_{k-1} = \frac{1}{k!} \end{cases}$$

$$+ \quad \overline{a_k - a = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}}$$

Låt $k \to \infty$: $\lim_{k\to\infty}(a_k - a) = e \Rightarrow a = e$ (ty $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, för $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 1^k$ konvergerar)

$$f = -e\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Så svar: De fyra första termerna (och alla andra med negativ exponent) blir $-e$.

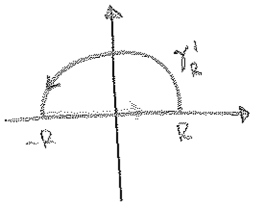
Lätt lösning:

$f(z) = \frac{e^z}{1-z} = \frac{e^z - e}{1-z} + \frac{e}{1-z}$. Första termen är holomorf, påverkar ej negativa exponenter.

$$\therefore \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k = \frac{e}{1-z} = \frac{1}{z}\,\frac{-e}{1-\frac{1}{z}} = -e\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k$$

3 a) $p(z) = 2z^4 + (1+i)z^2 + z - 1 + i$

Sökt. Antal nollställen i övre halvplanet.



$\gamma_R = \gamma_R' + [-R, R]$

Antalet nollställen $= \frac{1}{2\pi} \text{argvar}(p, \gamma_R)$, $R \gg 0$

$p = z^4(2 + \text{litet fel})$

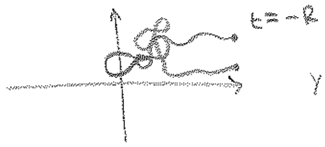
$\text{argvar}(p, \gamma_R') \approx 4\pi$

$\text{argvar}(p, [-R, R]) = ?$

$z = t \in [-R, R]$

$p(t) = 2t^4 + t^2 + t - 1 + i(t^2+1) = x(t) + iy(t)$

Plotta $p(t)$



$y(t) > 0$!

$t = -R \ll 0$

$\arg p(t) \approx 0$, ty $x(t) \gg y(t)$

$t = R \gg 0$

$\arg p(t) \approx 0$

$\therefore \text{argvar}(p, \gamma_R) = 4\pi + 0$. Alltså:

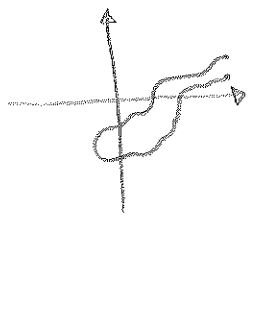
Svar: $\frac{4\pi}{2\pi} = 2$ nollställen

b) $p(z) = 2z^4 + (1+i)z^2 + z - 1 - i$, samma fråga

$p(t) = 2t^4 + t^2 + t - 1 + i(t^2 - 1)$ $\qquad y = 0,\ t = \pm 1$

$\arg p(-R) \approx 0$

$\arg p(R) \approx 0$



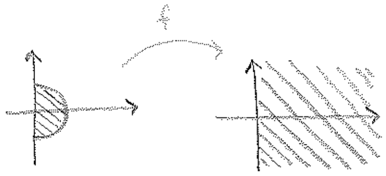
$y(-1) = 0$

$x(-1) = 1$

$x(1) = 3$

Svar: 2 nollställen

4.



Recept:

I.) Hitta $T \in M$ så att $T(-i)=0$, $T(i)=\infty$

Då avbildas både enhetscirkeln och imaginäraxeln på linjer genom origo.

Vilka linjer?

Tag $T = \frac{z+i}{z-i}$

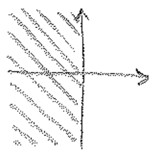
$T(0) = -1$

$\therefore$ Imaginäraxeln går på linje genom 0 och -1, det vill säga realaxeln

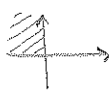
$\therefore$ T(Imaginäraxeln) = Realaxeln

$T(1) = \frac{1+i}{1-i} = i$

$\therefore$ Enhetscirkeln $\longrightarrow$ Imaginäraxeln

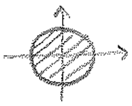
$\{z;\ |z|<1\} \rightarrow$  Vänstra halvplanet

Högra halvplanet $\rightarrow$ Övre halvplanet !

$\therefore D = \{z;\ |z|<1\} \cap \{z;\ \operatorname{Re} z > 0\} \longrightarrow$ 

Tag nu: $f = -i\left(-iT(z)\right)^2 = i\left(T(z)\right)^2$

5a) $f \in H(\bar{\Delta})$



$|f| \leq r \leq 1$, då $|z| \leq 1$

Visa att $\exists! a;\ f(a) = a$

<u>Lösning</u>: Vill visa att $z - f(z) = 0$ har exakt en lösning.

$|z| = 1 \Rightarrow |f(z)| \leq r \leq |z|$

$\because$ Rouché $\Rightarrow$ $z - f(z) = 0$ har lika många lösningar som $z = 0$, det vill säga 1.

b) Antag $|f| \leq 1$, då $|z| \leq 1$

Visa att $\exists a;\ f(a) = 0$ (Kan finnas fler än ett sådant a)

<u>Idé</u>: Betrakta rf, $r < 1$

a) $\Rightarrow \exists! a_r;\ f(a_r) = a_r$

Tag gränsvärde av en följd a_r.

$f(a_{r_j}) = a_{r_j}$

$a_{r_j} \longrightarrow a$

$\Rightarrow f(a) = 0$

<u>Alternativt: Motsägelsebevis</u>

Antag $\nexists a;\ f(a) = 0$

Då $|f(z) - z| \neq 0$ på $|z| \leq 1$

$\because$ $|f(z) - z| \geq \delta > 0$, ty $\frac{1}{|f - z|}$ uppåt begränsad

Då $|rf(z) - z| \geq \frac{\delta}{2}$ om r väldigt nära 1. $\left(|rf - z| = |f - z + rf - f| \geq |f(-z)| - (1-r)|f| \geq \frac{\delta}{2}\right.$, om $\left.1 - r \leq \frac{\delta}{2}\right)$

$\because$ rf saknar fixpunkt. Motsäger a)!

6. Sökt. Bevisa implicita funktionssatsen:

$f(z,w)$ holomorf med avseende på z, w, kontinuerlig.

$f(0,0)=0$, $f'_w(0,0) \neq 0$

Då finns en holomorf funktion $g(z)$, definierad för $|z|<\delta$; $g(0)=0$

$f(z,w)=0$, $|w|<\delta'$ om och endast om $w=g(z)$

$f(z,g(z)) \equiv 0$.

Bevis: Låt $G(w)=f(0,w)$

$G'(0) \neq 0$

$\therefore$ G har enkelt nollställe i $w=0$

$\therefore$ $G(w)=wH(w)$, $H(0)\neq 0$

$\therefore$ $G(w)=0$ har bara en lösning $w=0$ om $|w| \leq \delta'$

Vill visa att ekvationen $f(z,w)=0$, z fixt, har exakt en lösning.

$w=g(z)$ om $|w|<\delta'$

$f(0,w)=0$ har en lösning

Vi vill: $f(z,w)=0$ har en lösning

Rouché! $|w|=\delta'$

$\Rightarrow |f(0,w)|>|f(0,w)-f(z,w)|$ om $|z|<\delta'$

Rouché $\Rightarrow$ $f(0,w)$ och $f(z,w)$ har lika många nollställen för $|w|<\delta'$, det vill säga ett. Kalla detta $w=g(z)$

Återstår: Visa $g(z)$ holomorf.

Betrakta $\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\delta'} w \frac{f'(z,w)}{f(z,w)}\,dw = \text{Res}\left(\frac{wf'_w}{f}, w=g(z)\right)$

$= g(z)\frac{f'_w(z,g(z))}{f'_w(z,g(z))} = g(z)$

$\therefore$ g holomorf !

Genomgågna satser

1.) Uppskattning av kurvintegraler

2.) Cauchy-Riemanns ekvationer, nödvändigt villkor

$f = u + iv$ holo $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

3.) Cauchy-Riemanns ekvationer, tillräckligt villkor

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ och derivatorna kontinuerliga $\Rightarrow$ f holomorf

4.) Cauchys Integralsats

f holomorf $\Rightarrow \int_\gamma f\,dz = 0$ (Visas med Greens formel) (γ sluten)

5.) Moreras sats

$\int_\gamma f\,dz = 0 \Rightarrow$ f holomorf (γ godtycklig triangel)

6.) Cauchys formel

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)$

7.) Liouvilles sats

$f \in H(\mathbb{C}) \wedge (\exists C;\ |f| < C)$

$\Rightarrow f \equiv C$

8.) Taylors formel

9.) Laurentserie

10.) Nollställen:

Isolerade, ordning $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$. m ordningen

11-13.) Hävbar singularitet, poler (Inget ur kompletterande material, ingen Caserati-Weierstrass)

14.) Argumentprincipen

15.) Rouchés sats

16.) Algebrans fundamentalsats (Finns flera bevis, alla okej.)

17.) Laplacetransformen av derivata

⋮

23.) Ur Kjell Holmåkers Kompendium. Utgår

Gammal Jana-tenta, 19/8 2009

1.) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

Def. $a^{\alpha} = e^{\alpha \log a}$ (Flertydig!)

$$\log\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = w \Leftrightarrow e^{w} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$w = -\frac{i\pi}{4} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

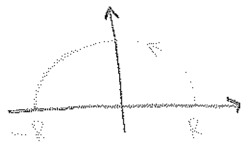
$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{\left(-\frac{i\pi}{4} + 2k\pi i\right)(1+i)} = e^{-\frac{i\pi}{4}} e^{\frac{\pi}{4}(1-8k)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}(1-8k)}$$

2. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + 2\sin ax}{x^2+2x+2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+2x+2}\,dx = \hat{f}(a)$

Börja med b)

$$\hat{f}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{(x+1)^2+1}\,dx = \{x+1=t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ia(t-1)}}{t^2+1}\,dt = e^{ia}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iat}}{t^2+1}\,dt = e^{ia}\,\pi e^{-|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat}}{t^2+1} = ? \qquad \text{Antag } a \geq 0$$



$$|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1, \; y \geq 0$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,dz + \int_{\substack{|z|=R\\ y>0}} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,dz$$

$$\left|\int_{\substack{|z|=R\\ y>0}} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,dz\right| \leq \int_{\substack{|z|=R\\ y>0}} \left|\frac{e^{iaz}}{1+z^2}\right| |dz| \leq \int_{\substack{|z|=R\\ y>0}} \frac{1}{|1+z^2|}\,|dz| \leq \frac{R\pi}{R^2-1} \longrightarrow 0 \text{ då } R \to \infty \quad (*)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat}}{1+t^2}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,dz$$

Residysatsen: $\int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i \, \frac{e^{iai}}{2i} = \pi e^{-a} = \pi e^{-|a|}$

$a<0$: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iat}}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(-at)}{1+t^2}\,dt$, även för $a<0$!

Alltså: $\hat{f}(a) = e^{ia}\pi e^{-|a|}$

Notationen $|dz|$ i $(*)$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\underbrace{\gamma'(t)\,dt}_{dz}, \quad \text{så} \quad \int_\gamma |f(z)||dz| \overset{def}{=} \int_a^b |f(\gamma)||\gamma'|\,dt$$

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+2x+1}\,dx = \text{Re}\,\hat{f}(a) = (\cos a)\pi e^{-|a|}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2+2x+1}\,dx = -\text{Im}\,\hat{f}(a) = \dots$

3. $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2 = 0$

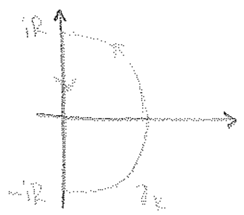
a) Antal nollställen i $|z|<1$?

Rouché: $|z|=1 \Rightarrow |5z^4| = 5$

$|z^7 + iz^2 - 2| \le 1+1+2 = 4 < 5$

$\therefore$ $5z^4$ och $z^7 - iz^2 - 2 - 5z^4$ har lika många nollställen, det vill säga 4.

b) Antal nollställen i $\{z;\ \text{Re}\, z > 0\}$ (högra halvplanet)?



$\gamma_R = \gamma_R' + [-iR, iR]$

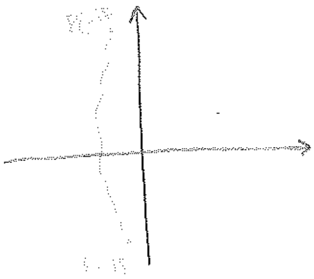
argvar $\gamma_R' \approx 7\pi$

$p(it) = (it)^7 - 5(it)^4 + i(it)^2 - 2 = -i(t^7 + t^2) - (5t^4 + 2) = x(t) + iy(t)$

Plotta $p(it)$: $x(t) < 0$

$x(iR) = -5R^4 - 2$
$y(iR) = -R^7 - R^2 < 0$
$y(iR) \ll x(iR)$, $\arg P(iR) \approx -\frac{\pi}{2}$

$x(-iR) = -5R^4 - 2$
$y(-iR) = R^7 - R^2 > 0$
$y \gg |x|$

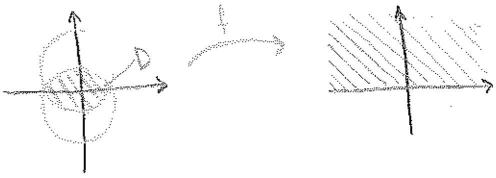


argvar $(P, [iR, -iR]) \approx -\pi$

Så: argvar(totalt) $= 7\pi - 6\pi$, och

Svar: Antalet nollställen $= \frac{6\pi}{2\pi} = 3$

4. $D = \{z; |z-i| < 2\} \cap \{z; |z+i| < 2\}$



Skärning på realaxeln?

$|z-i| = |z+i| = 2$

$|z-i|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 1 + 2\text{Re}\, iz = |z|^2 + 1 - 2\text{Re}\, iz \Rightarrow \text{Re}\, iz = 0$

$\therefore$ iz imaginärt, z reellt

$|x - i| = 2$, $x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Skärningspunkterna är $z_0 = -\sqrt{3}$ och $z_1 = \sqrt{3}$

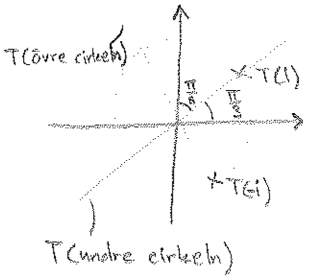
Välj nu en Möbiusavbildning T sådan att $T(-\sqrt{3}) = 0$ och $T(\sqrt{3}) = \infty$ (Då avbildas båda cirklarna på linjer genom origo.)

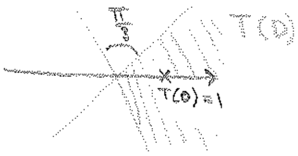
$T(z) = -\frac{z + \sqrt{3}}{z - \sqrt{3}}$. (Teckenvalet blir praktiskt senare.)

Vilka blir linjerna?

$$T(i) = -\frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = -\frac{(i+\sqrt{3})^2}{(i-\sqrt{3})(i+\sqrt{3})} = \dots = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$T(-i) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$





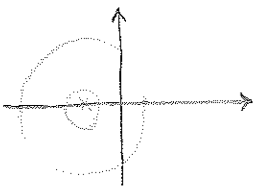
$$T(D) = \left\{w ;\ -\frac{\pi}{3} < \arg w < \frac{\pi}{3}\right\} = \Omega$$

$$\Omega \rightarrow \left\{\zeta ;\ -\frac{\pi}{2} < \arg \zeta < \frac{\pi}{2}\right\},\quad \zeta = w^{\frac{3}{2}}$$

Alltså: $f(z) = i\,(T(z))^{3/2} = i\left(\frac{\sqrt{3}+z}{\sqrt{3}-z}\right)^{3/2}$

4'. $f(z) = \frac{z}{(z+3)(z+5)}$. Utveckla i Laurentserie runt punkten -2 i det område som innehåller origo.

Poler: $z=-3$, $z=-5$



f holomorf för $|z+2|<1$
$1<|z+2|<3$
$3<|z+2|$

Utveckla i ringområdet $1<|z+2|<3$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z+2)^k$$

$$f(z) = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z+5},\quad A = -\frac{3}{2},\quad B = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+2+1} = \frac{1}{z+2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z+2}} = \frac{1}{z+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z+2)^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z+2)^{k+1}}, \text{ i området } \left|\frac{1}{z+2}\right|<1$$

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{3+z+2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z+2}{3}}.\ \text{I området gäller: } \left|\frac{z+2}{3}\right|<1$$

Alltså:

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}(z+2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}(z+2)^k$$

$$\therefore\ f(z) = \frac{5}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k+1}}(z+2)^k - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z+2)^{k+1}}$$

5. $f(z) = \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, $|z|<1$

a) f har oändligt många nollställen i $|z|<1$. Visa!

b) Det finns ingen $f \in H(\bar{\Delta})$ med oändligt många nollställen. Visa!

a) Lösning:

$f = \sin\frac{z+1}{z-1} = 0$

$w = \frac{z+1}{z-1}$, $\sin w = 0$

$w = k\pi$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow k\pi = \frac{z+1}{z-1}$

$z_k = T^{-1}(k\pi)$. När ligger z_k i Δ?

$T: \Delta \longrightarrow$ Vänstra halvplanet (kolla!)

$z_k \in \Delta$ om och endast om $T(z_k) \in$ Vänstra halvplanet

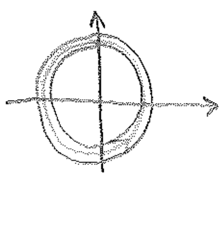
Så $k<0$. Det finns oändligt många nollställen.

b) Lösning: Påståendet är uppenbart falskt. $f\equiv 0$ uppfyller det. Bevisa för $f \not\equiv 0$.

$\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ har en hopningspunkt, det vill säga, det finns en delföljd $z_k \longrightarrow z_0 \in \bar{\Delta}$

$f(z_k) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

Alternativt: $f \in \Omega \supseteq \bar{\Delta}$



Välj en kurva γ i $\Omega\setminus\bar{\Delta}$, enkel, sluten, sådan att $f \neq 0$ på γ.

Då är antalet nollställen innanför γ: $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'}{f}dz < \infty$

6. $f, g \in H(\Omega)$ och $fg \equiv 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$ eller $g \equiv 0$

Visa!

Lösning: Tag $a \in \Omega$, $z_k \longrightarrow a$

$\forall k \quad \underset{\mathrm{I}}{f(z_k) = 0}$ eller $\underset{\mathrm{II}}{g(z_k) = 0}$

Antingen I eller II gäller för oändligt många k.

Säg I.

Då finns en oändlig följd $z_{k_j} \longrightarrow a$ $f(z_{k_j}) = 0$.

$\therefore f \equiv 0$