Komplex Analys F

Philip Krantz HT *05*

Granskade av

Jana Madjarova

Föreläsning 1

Vi har ett område $D \subset \mathbb{C}$ samt

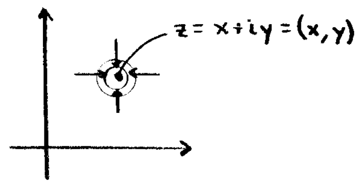
funktioner $f: D \to \mathbb{C}$

En "analytisk funktion" $\cong$ deriverbar

Vi har

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Detta kan visualiseras enligt följande



Där derivatan skall vara densamma oberoende från vilket håll man går

Följande gäller

1) f deriverbar $\Rightarrow f \in C^\infty$

2) 

$f\big|_{\gamma = \partial D}$ känd $\Rightarrow f$ känd i D

3) 

$f\big|_{\gamma} \equiv 0$ $\quad f$ analytisk i D

$\Rightarrow f \equiv 0$ i D

Komplexa tal

Vi utgår från följande ekvation

$i^2=-1$ (Önskemål: Att lösa $x^2+1=0$

Men vad är "i"?

Finns de komplexa talen?

Vårt mål: Konstruera $\mathbb{C}$ så att

1) $\mathbb{R} \in \mathbb{C}$

2) Alla räknesätt och egenskaper överförs från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{C}$ (i görligaste mån)

3) $x^2+1=0$ ska vara lösbar i $\mathbb{C}$

Vi får följande

def $\mathbb{C} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$

$$(a,b) \overset{\text{def}}{=} (a_1,b_1) \Leftrightarrow \begin{cases} a=a_1 \\ b=b_1 \end{cases}$$

Vi tittar på 2)

$(a,b)+(a_1,b_1) \overset{\text{def}}{=} (a+a_1, b+b_1)$ kommutativ och associativ lag gäller

$(a,b)\cdot(a_1,b_1) \overset{\text{def}}{=} (aa_1-bb_1, ba_1+ab_1)$

Nu lämnas till läsaren att göra en kontroll av räknelagarna.

Betrakta 1)

$\tilde{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$

$(a,0)+(a_1,0) = (a+a_1,0) \in \tilde{\mathbb{R}}$

$(a,0)\cdot(a_1,0) = (aa_1,0) \in \tilde{\mathbb{R}}$

Vi har nu att

$\mathbb{R} \cong \tilde{\mathbb{R}}$

isomorf med

$\tilde{\mathbb{R}} < \mathbb{C}$

Vidare undersöks nu det tredje kriteriet

3) $x^2+1=0$ lösning

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(0-1,\ 0+0)=(-1,0)=-1$$

def $i=(0,1)$

Vi kan nu införa den <u>algebraiska formen</u> för komplexa tal

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=\underline{a+bi}$$

Uppg 1.1.1.1

Visa att $z^2=(-z)^2$ utifrån definitionen

Vi har

$$-z\overset{\text{def}}{=}(-a,-b) \quad \text{där } z \text{ är talparet } (a,b)$$

$z+(-z)=(a,b)+(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(0,0)$ Är detta 0 även i $\mathbb{C}$?

$z+(0,0)\overset{?}{=}z \quad \forall z\in\mathbb{C}$

$(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$ ok!

Åter till problemet

$$(-z)^2=(-a,-b)(-a,-b)=(a^2-b^2,\ ba+ab)=(a^2-b^2,\ 2ab)$$

$$z^2=(a,b)(a,b)=(a^2-b^2,\ ba+ab)=(a^2-b^2,\ 2ab)=(-z)^2$$

Betrakta nu kvadraten av ett godtyckligt tal $z\in\mathbb{C}$ då $z=a+bi$

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2 \quad \text{ty } i^2=-1$$

Detta ger följande periodicitet för olika potenser av i

$i=i$

$i^2=-1$

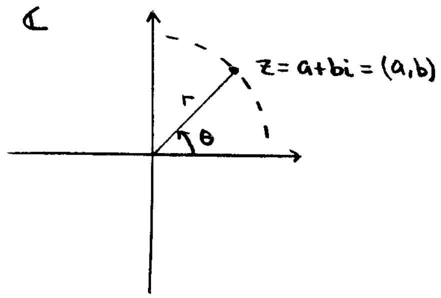
$i^3=-i$

$i^4=1$

$i^5=i$

$\vdots$

Polär form



För polär form av komplexa tal har vi

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

$z=0$ ges av $r=0$

1) Givet r, θ finn a, b

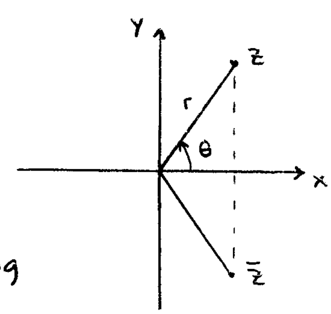
2) Givet a, b finn r, θ (Ingen entydighet)

Vi inför $z = x+iy$

där $x = \operatorname{Re} z$, realdel

$y = \operatorname{Im} z$, imaginärdel (OBS $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$)

Vi har nu den polära form



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

där $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ och θ ej entydlig

$\bar{z} = x - yi$ kallas för det komplexa konjugatel för z.

$z\bar{z} = x^2+y^2 = |z|^2$

$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$

$z - \bar{z} = (2\operatorname{Im} z)i$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Division av komplexa tal

Ex. $$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+5i+\overset{-3}{3i^2}}{1-\underset{-1}{i^2}} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Vi har för belopp av komplexa tal

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ Triangelolikheten

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

Vid övergång från algebraisk form till polär får vi

$z = x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ Vi inför även $z_1 = x_1+iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

Detta ger tillfälle att förevisa produktregeln för polär form

$$zz_1 = rr_1(\cos(\theta+\theta_1) + i\sin(\theta+\theta_1))$$

där θ kallas för argument

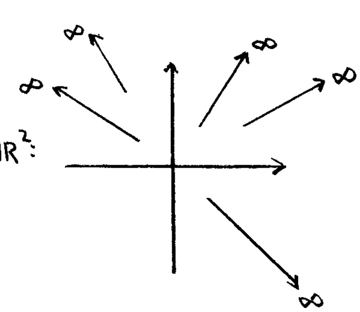
$\dfrac{z}{z_1} = \dfrac{r}{r_1}(\cos(\theta-\theta_1) + i\sin(\theta-\theta_1))$ där $r_1 \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} z^m &= r^m(\cos(m\theta) + i\sin(m\theta)) \\ z^{-m} &= r^{-m}(\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)) \end{aligned}\right\}\quad m \in \mathbb{N},\ m \neq 0$$

Den stereografiska projektionen

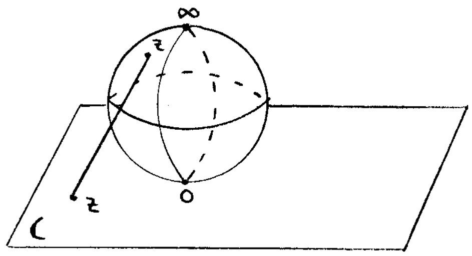
$\mathbb{R}$: $-\infty$ ———————— ∞ är en ordnad mängd "<"

$\mathbb{R}^2$:



är en oordnad mängd

För att skapa en geometrisk tolkning har vi följande



∞ kan här tolkas som en gräns, där denna punkt ligger hur långt bort som helst.

Olikheter

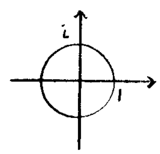
Observera att inga olikheter förekommer mellan komplexa tal.

Detta kommer sig av att de komplexa talen ej går att ordna.

Innan man ordnar talen måste absolutbelopptecken sättas.

Mängder

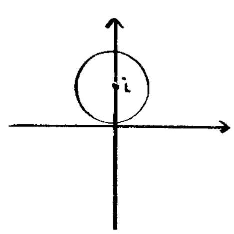
1) $|z| = 1$ enhetscirkeln i $\mathbb{C}$



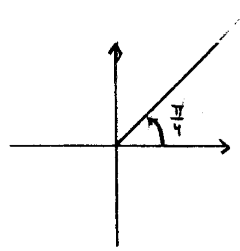
2) $|z| < 1$ den öppna enhetsskivan

3) $|z - i| = 1$

Avståndet mellan z och i är 1



4) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$



Föreläsning 2

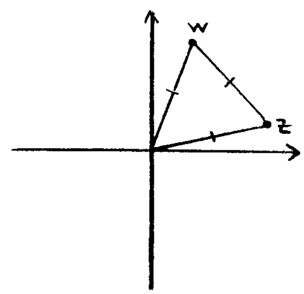
Uppgift 1.1.15

Triangeln med hörn $0, z, w$ är liksidig om och endast om

$$|z|^2 = |w|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

Visa detta.

Lösning:



$\boxed{\Rightarrow}$ Δ $0, z, w$ liksidig

$?$ $|z|^2 = |w|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$

Vi har

$|z|^2 = |w|^2$ fås direkt ty liksidig

$|w-z|^2 = |w|^2 = |z|^2$

$|w-z|^2 = |w-z|\,\overline{|w-z|} = (w-z)(\bar{w}-\bar{z}) = w\bar{w} - w\bar{z} - zw + z\bar{z} =$

$= |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}w) + |z|^2 = |z^2|$

$\Rightarrow |w|^2 = 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}w) = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Vi har nu följande

$|w|^2 = |z|^2 = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})$

$?$ Δ $0, z, w$ liksidig

$|w|^2 = |z|^2 \Rightarrow |w| = |z|$ ty både $|w|$ och $|z| \geq 0$

Nu återstår att visa att

$|w-z|^2 = |z|^2$

Detta lämnas emellertid åt läsaren att visa.

Uppgift 1.2.5

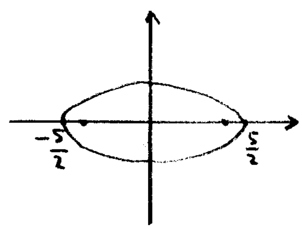
Beskriv var punkterna z ligger i det komplexa talplanet då

$|z+2|+|z-2|=5$

Vi ser att $|z\mp 2|$ är avståndet mellan z och ± 2

Summan av avstånden till två givna punkter är konstant.

$\Rightarrow$ ellips med brännpunkter ± 2



Uppgift 1.2.19

Låt $p>0$, $p\in\mathbb{R}$ och låt Γ vara den kurva som z satisfierar

$|z-p|=cx$ då $z=x+iy$

Visa att Γ är

a) Ellips för $0<c<1$

b) Parabel för $c=1$ då $c=0$ har vi $\Gamma=\{p\}$

c) Hyperbel för $c>1$

Lösning:

Vi utvecklar vår ekvation

$$|z-p|^2=|z-p|\overline{|z-p|}=(z-p)(\bar{z}-p)=|z|^2-(p\bar{z}+pz)+p^2=$$

$$=|z|^2-2px+p^2=x^2+y^2-2px+p^2=c^2x^2$$

Detta ger

$$(1-c^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$$

Kvadratkomplettera detta och kolla tecken. Ur detta kan sedan a), b) och c) tydligt visas.

Uppgift 1.2.21

Låt $\alpha \in \mathbb{C}$, $0<|\alpha|<1$. Visa att den mängd av z med

a) $|z-\alpha| < |1-\bar{\alpha}z|$ utgör skivan $\{z : |z|<1\}$

b) $|z-\alpha| = |1-\bar{\alpha}z|$ utgör cirkeln $\{z : |z|=1\}$

c) $|z-\alpha| > |1-\bar{\alpha}z|$ är mängden $\{z : |z|>1\}$

Lösning:

Enklast beräkningar fås om vi börjar med att visa b)

$$|z-\alpha|^2 = |1-\bar{\alpha}z|^2$$

$$|z|^2 - (\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z) + |\alpha|^2 = 1 - (\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z) + |\bar{\alpha}z|^2$$

$= (|\bar{\alpha}|\cdot|z|)^2 = |\alpha|^2\cdot|z|^2$

ty $|\alpha| = |\bar{\alpha}|$

Detta ger

$$(\underbrace{1-|\alpha|^2}_{>0})|z|^2 = 1-|\alpha|^2$$

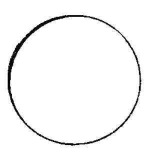
$$|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Det som återstår nu är att visa att mängderna stämmer

$$|z-\alpha| = |1-\bar{\alpha}z| \Rightarrow |z|=1$$

För att genomföra beviset av b) ordentligt, skall visas att det omvända gäller. Detta bevisar vi dock ej här.

Vi har nu a)



$$|z|=1 \Leftrightarrow |z-\alpha| = |1-\bar{\alpha}z|$$

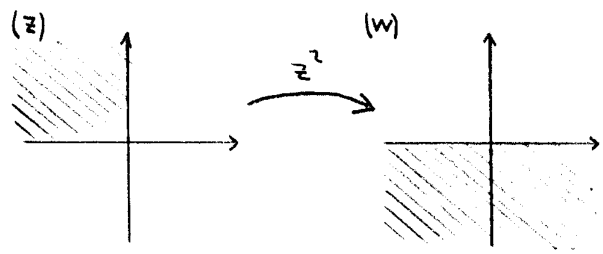
$$|0-\alpha| = |\alpha| < 1$$

Alltså uppfyller 0 olikheten i a) $\Rightarrow$ a) ger enhetsskivan.

För att kommentera c) räcker det att visa att det inte får röra sig om en tom-mängd. ($\frac{1}{\bar{\alpha}} \in$ mängden)

Uppgift 1.3.10

Beskriv den mångd av punkter som z^2 omfattar då z varierar över den andra kvadranten.



Vi har alltså

$$w = z^2$$

Skriv $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ för $0 < r < \infty$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (val)

Detta ger

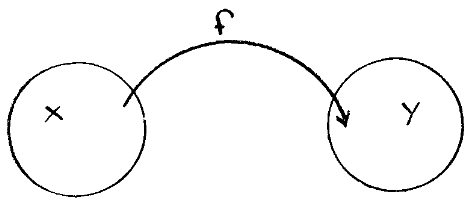
$$w = z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$0 < r^2 < \infty$$

$$\pi < \theta < 2\pi$$

Alltså undre halvplanet.

Funktioner av komplexa variabler



Vi har $D \subset \mathbb{C}$ där D område (öppen och sammanhängande mängd)

$f : D \to \mathbb{C}$

$|\cdot|$ ger en topologi

d.v.s man kan definiera kontinuitet.

Vi har samma def. som i $\mathbb{R}$:

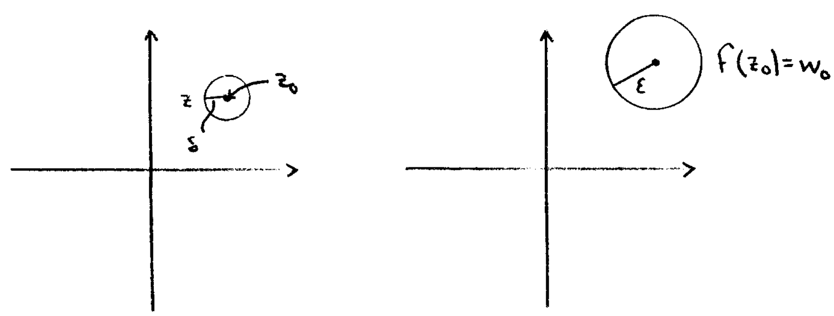
def f kallas kontinuerlig i $z_0 \in D$ om

1) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a. $\forall z \in D : |z - z_0| < \delta$

gäller $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Alltså innebär detta följande illustration



Elementära funktioner

Vi skall ta upp följande elementära funktioner:

Potenser, exponentialfunktioner, trigonometriska funktioner

samt ovanståendes invers och sammansättningar. (ändliga)

Potenser

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}$

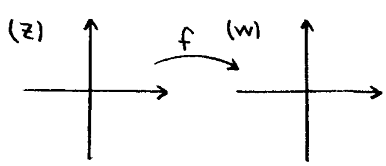
Exponentialfunktionen

$e^z \overset{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$, där $z = x+iy$

Vi har följande egenskaper

$$\left.\begin{array}{l} e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \\ (e^z)^n = e^{nz} \\ e^0 = 1 \\ e^z \neq 0, \ \forall z \end{array}\right\}$$

Dessa visas direkt ur def. m.h.a de trigonometriska formlerna.



$z = x+iy$

$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^z \overset{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$

$\Rightarrow \rho = e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Vi har följande argument:

$\varphi = y + n\cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} > 0$, alltså $e^z \neq 0$

e^z är periodisk med period $2\pi i$

Trigonometriska funktionerna

Vi har

$$\sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \text{och} \quad \cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Både $\sin z$ och $\cos z$ är periodiska med $T=2\pi$

$\boxed{\text{OBS}}$ $\sin z, \cos z$ är obegränsade för $z \in \mathbb{C}$

välj

$$z=iy \Rightarrow \cos iy = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y \underset{y\to\infty}{\to} \infty$$

Vi har nu de hyperboliska funktionerna

$$\cosh z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

Följande samband gäller

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cosh^2 z + \sinh^2 z = 1$$

Inverser

Vi inför $\arg z$ som det flertydiga argumentet av z

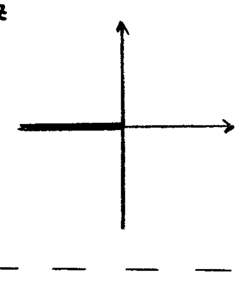
θ_0 ett möjligt argument.

$$\Rightarrow \arg z = \theta_0 + n\cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vi har följande

$\operatorname{Arg} z$ är principalvärdet av $\arg z$

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$



Logaritmer

Vi har

$$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$0 < \rho = e^{x} \quad \text{där } x = \ln \rho = \ln|w|$$

Följande argument fås

$$y = \varphi + n\cdot 2\pi = \arg w$$

Vi har nu fått en formel för både real- och imaginärdel av $\log w$

$$\log w = \ln|w| + i\arg w$$

Vi har även

$$\log z = \ln|z| + i\arg z \quad \text{då } z \neq 0$$

Man betecknar

$$\begin{cases} \log: & \text{Komplexa logaritmer} \\ \ln: & \text{Reella logaritmer} \end{cases}$$

$\log z$ har emellertid oändligt många värden som skiljer sig med $n\cdot 2\pi$.

För att uppnå entydighet för $\log z$ har man därför infört:

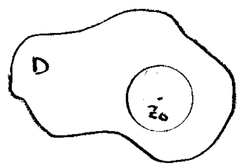
$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \\ \text{Principal logaritmen av } \log z \end{array}}$$

Föreläsning 3

Analytiska funktioner

def $f: D \to \mathbb{C}$, D område

f kallas analytisk (holomorf) i en punkt $z_0 \in D$ om f är deriverbar i en omgivning till z_0.



Cauchy-Riemanns ekvationer (CR):

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ för $z = x+iy$

f deriverbar i $z \Rightarrow$ (CR) d.v.s

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Detta gäller nu i D istället för z.

$f(z) = \bar{z}$ är inte analytisk någonstans.

(CR) är nödvändigt villkor för analyticitet. (se bevis nr 3)

Betrakta nu $\log z = \ln|z| + i\arg z = \ln r + i\theta$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Vi har nu

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta, \quad \Big| \, r\cos\theta \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta \quad \Big| -\sin\theta$$

$$r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial x} + 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

även för v

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{i}{r}\sin\theta\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

För log har vi: $u = \ln r$, $v = \theta$ $\quad z \neq 0$

$$(\log z)' = \cos\theta \frac{1}{r} - 0 + 0 - \frac{i}{r}\sin\theta = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

<u>Om</u> $\begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$ uppfyller (CR) dvs om $\log z$ har en derivata

Kolla!

Vi har flertydigheten $\log_* z = \log_{**} z + \underbrace{2k\pi i}_{\text{const}}$

Harmoniska funktioner (4.1)

$f = u + iv$, analytisk i D

Vi har (CR)

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{matrix} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (u, v \in C^2(D))$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\Delta u = 0} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$\Delta u = 0$; analogt $\Delta v = 0$

def $\quad D \subset \mathbb{R}^2$ område

$u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ kallas harmonisk i D om $\Delta u = 0$ i D där

Δ är Laplaces operator

f analytisk i $D \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Re} f \\ v = \operatorname{Im} f \end{cases}$ harmoniska i D.

u bestämmer v entydigt sånär som på en konstant och tvärtom. v kallas u:s harmoniska konjugat.

Ex.[1] 4.1 a) $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2$$

$\Delta u = 0 \Rightarrow u$ harmonisk i $\mathbb{R}^2$

Vidare har vi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \| \int \ldots dy$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = -4y^3 + 12x^2y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Detta ger

$$v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 + \varphi'(x) = -4y^3 + 12x^2y$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$$

Detta ger nu

$$v = 4x^3y - 4xy^3 + C$$

Om v ej harmonisk: $\varphi'(x) = y$ går ej!!!

b) $f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3) + iC = z^4$

1) Gissa

2) $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Sätt in x och y. Om f analytisk så försvinner $\bar{z}$.

3) Kommer senare

c) $u(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x(x^2+y^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 2xy^2 + 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2+y^2+1)^2}$$

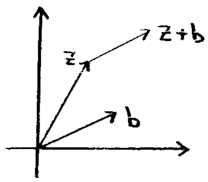
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(2y^2+2)(x^2+y^2+1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2+y^2+1)}\,2x(2xy^2+2x)}{(x^2+y^2+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

Möbiusavbildningar

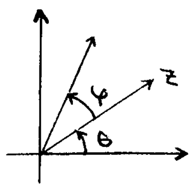
En Möbiusavbildning har formen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{för } a,b,c,d \in \mathbb{C} \qquad z \in \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

1) $T(z) = z+b$ translation

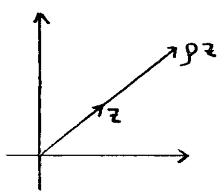


2) $T(z) = e^{i\varphi} z$ rotation



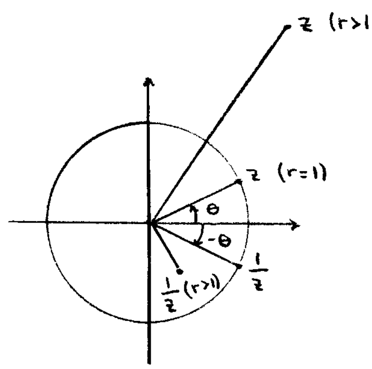
$z = re^{i\theta}$, $T(z) = re^{i(\theta+\varphi)}$

3) $T(z) = \rho z$ skalning



4) $T(z) = az+b \qquad a = \rho e^{i\varphi}$

rotation
skalning
translation sist!



5) $T(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

Vi har

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{1}{c}\,\frac{acz+bc+ad-ad}{cz+d} = \frac{1}{c}\left(a + \frac{bc-ad}{cz+d}\right)$$ sammansättning av ovanstående typer

Vi har dock kravet: $ad-bc \neq 0$ $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

"cirklar" avbildas på "cirklar"

"cirkel" < cirkel / rät linje $\qquad \bar{\mathbb{C}}$: räta linjer är cirklar genom ∞

Föreläsning 4

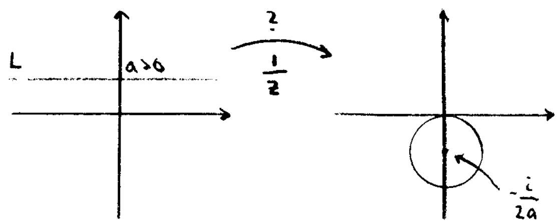
Inversion

Till en början har vi inversionen $\frac{1}{z}$

Uppg 1.2.35

Vi har linjen $L: y = a,\ a > 0$

$L \longrightarrow$ cirkeln med radie $\frac{1}{2a}$ och medelpunkt i $-\frac{i}{2a}$



Vi har

$$z = re^{i\theta} \in L$$

$$\operatorname{Im} z = r\sin\theta = a$$

Således har vi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \qquad \text{där } \frac{1}{z} = w$$

Betrakta nu

$$\Big|\underbrace{w}_{=\frac{1}{z}} + \frac{i}{2a}\Big| \overset{?}{=} \frac{1}{2a}$$

$L: z = x + ia,\ x \in \mathbb{R}$

Insättning ger nu

$$\left|\frac{1}{x+ia} + \frac{i}{2a}\right| = \left|\frac{\cancel{2}a + xi \cancel{-a}}{(x+ia)2a}\right| = \frac{1}{2a}\frac{|(a+xi)(x-ia)|}{|(x+ia)(x-ia)|} = \frac{1}{2a}\frac{|ax - ia^2 + ix^2 + xa|}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}\frac{|2ax + (x^2-a^2)i|}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{\sqrt{\cancel{4}^{2}a^2x^2 + x^4 - \cancel{2x^2a^2} + a^4}}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}\frac{\sqrt{x^4+2a^2x^2+a^4}}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}$$

Notera följande två beräkningar

1) $\left|\dfrac{a+xi}{x+ia}\right| = \dfrac{|a+xi|}{|x+ia|} = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} = 1$

2) $\left|\dfrac{i(x-ia)}{x+ia}\right| = 1$

För avbildningar

$L \longrightarrow C' \underset{?}{\subseteq}$ cirkeln

Vi skall även visa att avbildningen $\frac{1}{w} \overset{?}{\in} L$ där $w \in$ cirkeln

Om föregående uppgift hade varit följande

$L: z = x + ia$

$f(z) = \frac{1}{z}$ Vad blir då $f(L)$

Vi beräknar

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+ia} = \frac{x-ia}{x^2+a^2} = \frac{x}{x^2+a^2} - i\frac{a}{x^2+a^2} = w$$

Låt $w = u + iv$

$$C': \begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+a^2} \\ v = \dfrac{a}{x^2+a^2} \end{cases}$$ där $x \in \mathbb{R}$ Alltså en parametriserad kurva

$\frac{1}{z}$ är en möbiusavbildning i $\overline{\mathbb{C}}$ (∞ inräknad)

Vi har följande fall för L

$L \xrightarrow{\frac{1}{z}}$ rät linje = cirklar genom ∞

$L \xrightarrow{\frac{1}{z}}$ cirkel

$\frac{1}{z} \neq \infty$ ty $z \neq 0$ ($0 \notin L$)

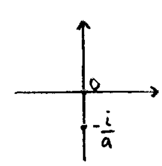
$\Rightarrow f(L)$ äkta cirkel

För att bestämma en cirkel entydigt behöver vi tre punkter

$z_1 = \infty \Rightarrow \frac{1}{z_1} = 0$

$z_2 = ia \Rightarrow \frac{1}{z_2} = \frac{1}{ia} = -\frac{i}{a}$

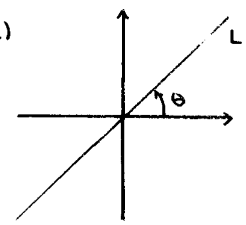
$z_3 = 1 + ia$ ...



Nu följer tre exempel på uppgifter

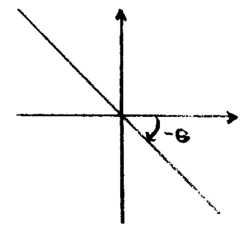
36. Låt L vara en linje genom origo

$f(L) = ?$

(z) 

$z = re^{i\theta}$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = w$

(w) 

37. $C: |z - c| = r \qquad 0 < r < c$

? $f(C)$ är en cirkel med medelpunkt i $\frac{c}{c^2 - r^2}$ och radie $\frac{r}{c^2 - r^2}$

Vi har

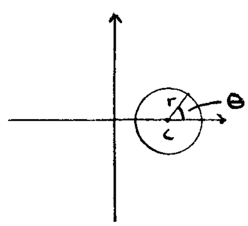
$0 < r < c \Rightarrow C \not\ni \text{origo} \Rightarrow f(C) \not\ni \infty \Rightarrow f(C)$ äkta cirkel

Vi har nu samma info som föregående uppgift

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{c}{c^2 - r^2} \right| \overset{?}{=} \frac{r}{c^2 - r^2}$$

$$\left| \frac{1}{c + re^{i\theta}} - \frac{c}{c^2 - r^2} \right| \overset{?}{=} \frac{r}{c^2 - r^2}$$ Obs! Även det omvända skall visas

Såhär blir vår cirkel i z planet:



$z = c + re^{i\theta}$

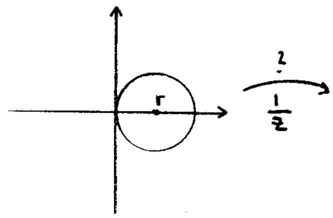
Vi väljer nu tre punkter

$z_1 = \underset{\overset{\vee}{0}}{c} + r$

$z_2 = c - r$

$z_3 = c + ir$

38. Vi har nu följande cirkel som passerar origo.



Vi har nu följande punkter

$z_1 = 0 \qquad w_1 = \infty \Rightarrow f(c)$ rät linje

$z_2 = 2r \qquad w_2 = \frac{1}{2r}$

$z_3 = r + ir \qquad w_3 = \frac{1}{r+ir} = \frac{r-ir}{r^2+r^2} = \frac{r(1-i)}{2r^2} = \frac{1-i}{2r}$

<u>Kongruenser i planet</u>

Vi har följande olika typer av kongruens i planet

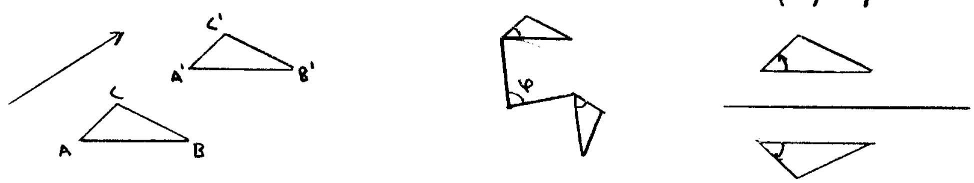
translation, $z+b$

rotation, $e^{i\varphi}z$

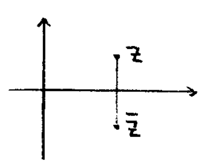
spegling

Likformigheter: ovanstående i kombination med skalning.

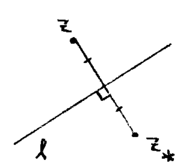
Dessa tre kan illustreras enligt följande



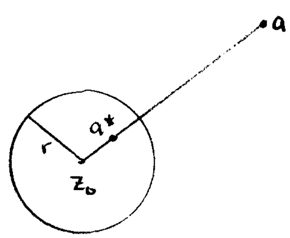
Spegling i realaxeln: $z \longrightarrow \bar{z}$



Godtycklig linje



Inversion (Spegling i en cirkel)



z_0, a, a^* ligger på samma stråle med början z_0

$|a - z_0| \cdot |a^* - z_0| = r^2$

Utsidan av cirkeln $\rightleftarrows$ insidan. Detta fås ur

$$\left.\begin{array}{l} |a - z_0| \lesseqgtr r \\ |a - z_0||a^* - z_0| = r^2 \end{array}\right\} \; |a^* - z_0| \gtreqless r$$

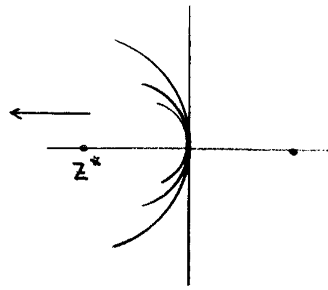
Vi har även följande egenskaper för inversion

- $z_0^* = \infty$, $\infty^* = z_0$ per def.
- $(z^*)^* = z$ (samma som för spegling i linje)
- orienteringen byts
- Sträckan mellan z, z^* är $\perp$ cirkeln
- $z = z^* \Leftrightarrow z \in C$

En övning till läsaren:

Visa att $z_r^* \xrightarrow[r \to \infty]{?} z^*$

z^* spegelbilden av z i linjen



<u>Möbiusavbildningar</u>

Vi har

$\frac{az+b}{cz+d}$ analytisk

$\bar{z}$ ej analytisk

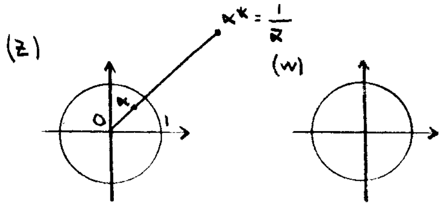
Möbiusavbildningar avbildar par av inversa punkter på par av inversa punkter.

α: $|\alpha| < 1$? $|z-\alpha| = |1-\bar{\alpha}z| \Leftrightarrow |z| = 1$

Detta kan ses som Möbiusavb.

$T(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} = w \qquad |z| = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$

Enhetscirkeln avbildas på enhetscirkeln



Vi har

$|\alpha^*| = \frac{1}{|\alpha|}$

$\alpha = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow \alpha^* = \frac{1}{\rho} e^{i\varphi} = \frac{1}{\rho e^{-i\varphi}} = \frac{1}{\bar{\alpha}}$

Vi har alltså

$\alpha, \frac{1}{\bar{\alpha}}$ inversa i z-planet

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \xrightarrow{T} 0 \\ \alpha^* = \frac{1}{\bar{\alpha}} \xrightarrow{T} \infty \end{array}\right\} \text{Inversa i } z\text{-planet}$$

Föreläsning 5

Möbiusavbildningar (Linear fractional transformations)

Vi har alltså avbildningen

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ där $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ och $ad \neq bc$ (annars $T(z) \equiv const$)

Vi har att

$z \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Möbiusavbildningar avbildar cirklar:

"cirklar" $\begin{cases} \text{cirklar (på sfären, ej genom } \infty\text{, nordpolen)} \\ \text{räta linjer (på sfären, går genom } \infty \end{cases}$

$\vdots$ "cirklar" $\xrightarrow{T}$ "cirklar"

$T(z)$ är en sammansättning av avbildningar av typen

$az+b$ och $\frac{1}{z}$

Det räcker att visa detta för $az+b$ och $\frac{1}{z}$.

Vi har

$T_1(z) = az+b$ rotation och skalning translation

Av geometriska skäl är det uppenbart att

cirklar $\xrightarrow{T_1}$ cirklar

räta linjer $\xrightarrow{T_1}$ räta linjer

Vi undersöker nu $T_2(z)$

$T_2(z) = \frac{1}{z}$

En cirkel har ekvationen

$\alpha(x^2+y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$ där $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

För $\alpha \neq 0$: cirkel; $\alpha = 0$: rät linje   Vi har

$\alpha z\bar{z} + \beta \dfrac{z+\bar{z}}{2} + \gamma \dfrac{z-\bar{z}}{2i} + \delta = 0$ $w = \frac{1}{z}$ Ekvationen för w:
för $z \neq 0$; div. med $z\bar{z}$

$$\alpha + \beta \frac{\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}}{2} + \gamma \frac{\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}}{2i} + \delta \frac{1}{z\bar{z}} = 0$$

Genom insättning av $w = \frac{1}{z}$ fås

$$\alpha + \beta \frac{\bar{w}+w}{2} - \gamma \frac{w-\bar{w}}{2i} + \delta w\bar{w} = 0$$

Vi ser att detta är samma typ av ekvation

$\Rightarrow$ När z beskriver en "cirkel" i z-planet, kommer $w = \frac{1}{z}$ att beskriva en "cirkel" i w-planet

Följande fyra olika alt. för Möbiusavb. finns:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{rät linje genom } 0 \\ 2)\ \text{— " — ej — " —} \\ 3)\ \text{cirkel genom } 0 \\ 4)\ \text{— " — ej — " —} \end{array}\right\} \xrightarrow{\frac{1}{z}} \ ? \qquad \alpha = 0 \text{ alt. } \delta = 0$$

Betrakta avbildningen "cirkel" $\xrightarrow{T(z)}$ "cirkel". Har $T(z)$ ngn invers?

Vi har

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w$$

$$az + b = czw + dw$$

$$cwz - az = -dw + b$$

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} = T^{-1}(w) \quad \text{Möbiusavbildning}$$

$$(-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0$$

Alla möbiusavbildningar är inverterbara och deras inverser är också möbiusavbildningar.

En "cirkel" bestäms alltså av tre punkter (För räta linjer är den ena ∞)

Vi har givet

$$(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{\exists T(z)} (w_1, w_2, w_3)$$

Underförstått att z_1, z_2, z_3 är olika punkter, w_1, w_2, w_3 likaså

Fixpunkter

$? \exists z$ så att $T(z) = z$ och isåfall hur många?

Vid fallet $z+b$ (translation $b \neq 0$) har vi inga fixpunkter

Om vi istället har

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Ekvationen har högst två lösningar, om inte $\begin{cases} c=0 \\ a=d \\ b=0 \end{cases}$

Om $T(z) \not\equiv z$ så $\exists$ max två fixpunkter

Uppg. 3.3.15

$T(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ Visa att $T(T(z)) \overset{?}{=} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Vi söker nu tre punkter som $T \circ T$ lämnar på plats:

$$0 \xrightarrow{T} 1 \xrightarrow{T} 0$$

$$1 \xrightarrow{T} 0 \xrightarrow{T} 1$$

$$\infty \xrightarrow{T} -1 \xrightarrow{T} \infty$$

Dessa tre punkter: $(0, 1, \infty)$ avbildas alltså på sig själva $\Rightarrow T(T(z)) = z$

Vi betraktar gränsvärdet som fås då avbildningen i ∞ söks

$$\lim_{z\to\infty} T(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{\cancel{z}(\overset{0}{\frac{1}{z}} - 1)}{\cancel{z}(\underset{0}{\frac{1}{z}} + 1)} = -1$$

$$\lim_{z\to -1} \frac{1-z}{1+z} = \infty \quad \text{ty} \quad \left|\frac{1-z}{1+z}\right| \xrightarrow[z\to -1]{} \infty$$

För att finna alla S: $S(S(z)) \equiv z \Leftrightarrow S(z) \equiv S^{-1}(z)$

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{-dz+b}{cz-a} \Rightarrow (az+b)(cz-a) \equiv (cz+d)(-dz+b)$$

Uppg. 3.3.4 e)

Vi har avbildningen

$$(i, 2, -i) \longrightarrow (-i, 3, i)$$

Vi ansätter koefficienterna för att finna en avbildning

$$\frac{az+b}{cz+d}: \qquad \frac{ai+b}{ci+d} = -i \qquad \frac{2a+b}{2c+d} = 3 \qquad \frac{-ai+b}{-ci+d} = i$$

$$\boxed{\begin{aligned} ai+b &= c-di \quad (1) \\ 2a+b &= 6c+3d \quad (2) \\ -ai+b &= c+di \quad (3) \end{aligned}}$$

Linjärt ekv. syst

Detta ger

$(1)+(3):\quad b = c, \quad a = -d$

$2a + b = 6b - 3a$

$\cancel{5}a = \cancel{5}b$

Välj $a = b = 1 \Rightarrow c = 1, \ d = 1$

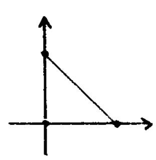
Vilket ger avbildningen

$$T(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

Uppg 3.3.7 a)

T? då 0,1 fixpunkter

Då vi har $T(i) = \infty \Rightarrow$ direkt nämnaren: $T(z) = \dfrac{az+b}{z-i}$



$$\left.\begin{aligned} 0 \mapsto 0 &\Rightarrow \frac{b}{-i} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 1 \mapsto 1 &\Rightarrow \frac{a}{1-i} = 1 \Rightarrow a = 1-i \end{aligned}\right\} \quad T(z) = \frac{(1-i)z}{z-1}$$

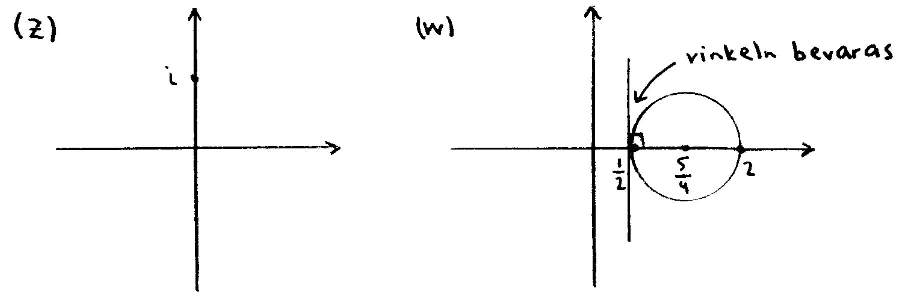
Tripplar på tripplar ger alltid entydiga avbildningar.

Uppg. 3.3.7 c)

Vi har följande avbildningar

Re-axeln $\longrightarrow$ Re-axeln

Im-axeln $\longrightarrow \{|w-\frac{5}{4}|=\frac{3}{4}\}$



Vi har de gemensamma punkterna $0, \infty \longrightarrow \frac{1}{2}, 2$

Helst reella koefficienter

$$\frac{az+b}{cz+d}; \quad \frac{b}{d}=\frac{1}{2}; \quad \infty \longrightarrow \frac{a}{c}=2$$

Detta ger

$d=2b$

$a=2c$

Vi söker en avbildning för vilken ekvationerna stämmer

$$T(z)=\frac{2z+1}{z+2}$$

$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$

$\infty \longrightarrow 2$

Re $\longrightarrow$ Re

Vi gör följande kontroll av punkten i

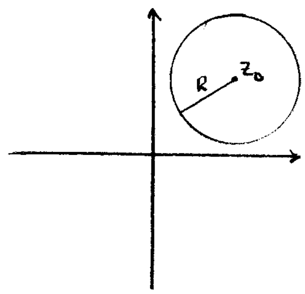
$$T(i)=\frac{2i+1}{i+2}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{4i+2+2-i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

Insättning ger

$$\left|\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i-\frac{5}{4}\right|=\left|-\frac{9}{20}+\frac{3}{5}i\right|=\sqrt{\frac{81}{400}+\frac{9}{25}}=\frac{3}{20}\sqrt{9+16}=\frac{3\cdot 5}{20}=\frac{3}{4} \quad \text{OK!}$$

Potensserie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$



Konvergensradie, R

Vi har att

$\exists R:$ serien

absolut- och likformigt konvergent för $(z-z_0) < R$

divergent för $|z-z_0| > R$

saknar info då $|z-z_0| = R$

Vi har kvotkriteriet

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k \Rightarrow R = \frac{1}{k}$$

och rotkriteriet

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$$

Det är tillåtet att derivera / integrera inuti konvergensskivan; ger serier med samma R.

Omskrivningar av kurvintegral

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

Föreläsning 6

Cauchys sats lyder:

$f: D \to \mathbb{C}$, D område, f analytisk i D

γ enkel sluten styckvis C^1-kurva

γ tillsammans med sitt inre $\subset D$

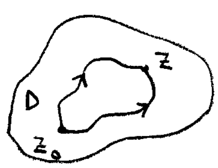
$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

För beviset(*) av Cauchys sats ställs även kravet att $f' \in C$

Det visar sig att samma sats även gäller för icke enkelt slutna kurvor.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \underbrace{\int_{\gamma_1}}_{=0} + \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{=0} = 0$$

f analytisk i D enkelt sammanhängande (för att området mellan kurvorna $\subset D$)



$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$$

oberoende av vägen

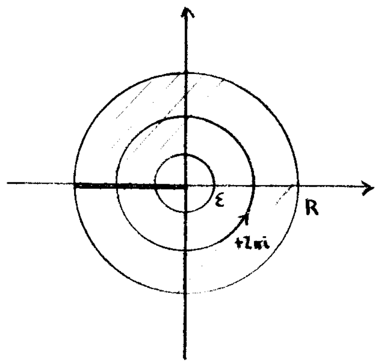
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta : \quad F' = f$$

(*) vårt bevis

Ex. (enkelt sammanhängande väsentligt)

Vi har

$F' = f \Rightarrow F$ analytisk



$\varepsilon < |z| < R$ område (ej enkelt sammanh.)

$f(z) = \frac{1}{z}$

derivatan av $\log z + C$

$\nexists$ gren, analytisk i D

$\nexists$ gren, kontinuerlig i D

Betrakta följande sats

Sats

$$f' \equiv 0 \text{ i } D \Rightarrow f \equiv C \text{ i } D$$

Bevis

Låt $f = u + iv$

$$f' \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \end{cases}$$

Cauchy-Riemanns ekvationer ger nu

$$\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$

Slutsatsen är att följande gäller

$$\begin{matrix} u \equiv C_1 \\ v \equiv C_2 \end{matrix} \Rightarrow f \equiv C_1 + iC_2$$

Uppg 1.6.2

$\int_\gamma e^z dz$ där γ är sträckan från 0 till z_0.

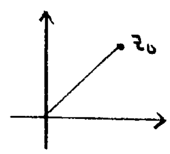
$\to$ analytisk i $\mathbb{C}$ med $(e^z)' = e^z$

$\int_0^{z_0} e^z dz$ oberoende av vägen

Vi har

$$\int_0^{z_0} e^z dz = \left[e^z\right]_0^{z_0} = e^{z_0} - 1$$

Alt: Vi parametriserar γ:



$z = t z_0$ då $t \in [0,1]$

Detta ger

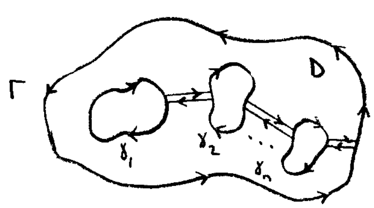
$$\gamma: \begin{cases} x = t x_0 \\ y = t y_0 \end{cases} \qquad dz = z_0 dt$$

Vi har nu

$$\int_\gamma e^z dz = \int_0^1 e^{t z_0} z_0 dt = \int_0^1 (e^{t x_0} \cos t y_0 + i e^{t x_0} \sin t y_0)(x_0 + i y_0) dt$$

Problemet löses nu med reell integration.

Inledande genomgång av deformation av kontur



D enkelt sammanhängande

f analytisk i D

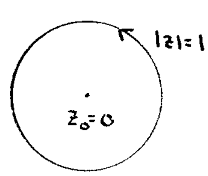
$\Rightarrow \int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz$

$\int_\Gamma = 0$ trivialt, ty alla $\int_{\gamma_k} = 0$

Uppg 2.3.4

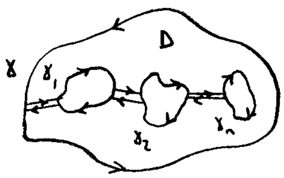
$$\underbrace{\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz}_{= 2\pi i \sin z_0 = 0} \qquad f(z) = \sin z \quad z_0 = 0$$

($\sin z_0 = 0$)



Föreläsning 7

Deformation av kontur



Vi har ett område D

$\gamma \in D$ tillsammans med sitt inre

$\gamma_k <$ γ:s inre

f analytisk på $\gamma, \gamma_k \quad k=1,\dots,n$ och mellan dem

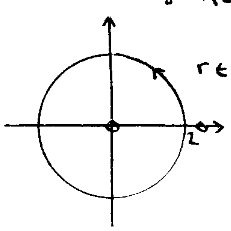
$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

Om vi bildar en kontur av $\gamma \dots \gamma_n$ kan vi skriva

$\Gamma: \int_\Gamma f(z)dz = 0$ enl. Cauchys sats

Uppg. 2.3.2 (modifierad)

Vi har $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-2)}dz$ där $\gamma: |z-z_0| = r \quad (r>0),\ r \neq 2$

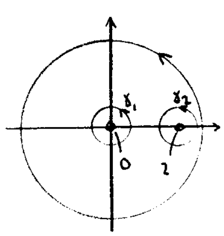


Intressanta punkter är de singulära, $z=0,\ z=2$

Vi har fallen

1) $0<r<2$ $\quad \displaystyle\int_\gamma \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z-0}dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i \left.\frac{e^z}{z-2}\right|_{z=0} = -\pi i$

z_0 (sing. pkt)



2) $r>2$: $\quad \displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-2)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-2)}dz + \int_{\gamma_2}\frac{e^z}{z(z-2)}dz =$

$\gamma: |z| = r$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z}dz + \int_{\gamma_2}\frac{\frac{e^z}{z}}{z-2}dz = 2\pi i\left(\left.\frac{e^z}{z-2}\right|_{z=0} + \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2}\right) =$$

Analytisk på och innanför γ_1

$$= \cancel{2}\pi i\left(-\frac{1}{\cancel{2}} + \frac{e^2}{\cancel{2}}\right) = \pi i(-1+e^2)$$

Ex

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2\pi i$$

Här går ej Cauchys integralformel att använda ty $\frac{e^z}{z}$ är ej analytisk.

Se Cauchys formler för derivatorna.

Uppg 2.3.8

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$$

Vi kan även skriva om $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \longleftarrow$ sänkt potens

Detta ger enklare uträkningar

$$\int_{|z|=1} \ldots\, dz = \left[\begin{array}{l|l} z = e^{i\theta} & \theta\in[0,2\pi] \\ dz = ie^{i\theta}d\theta & \end{array}\right] = \underbrace{\int_0^{2\pi} \ldots\, d\theta}_{(*)}$$

Cauchys integralformel

Vi skriver nu om $\sin\theta$ och $\cos\theta$ som

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$d\theta = \frac{\cancel{1}}{i\cancel{e^{i\theta}}}\,dz = \frac{1}{iz}\,dz$$

Vi går nu tillbaka till (*) genom Cauchys integralformel

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = 2\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{3-\cos 2\theta} = \begin{bmatrix} 2\theta = \varphi \\ d\theta = \frac{1}{2}d\varphi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{3-\cos\varphi} =$$

$$= \int_{|z|=1}\frac{\frac{1}{iz}dz}{3-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = -i\int_{|z|=1}\frac{dz}{3z-\frac{z^2+1}{2}} = 2i\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-6z+1} = 2i\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-3)^2-8} =$$

$$= 2i\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-3-2\sqrt{2})(z-3+2\sqrt{2})} = I$$

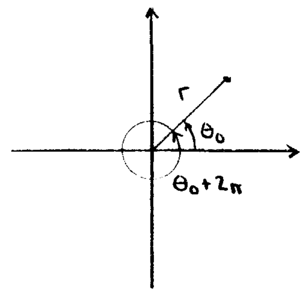
där $(3+2\sqrt{2}>1)$ $\quad (3-2\sqrt{2})\in[0,1]$
$\Rightarrow$ Innanför $|z|=1$

$$\Rightarrow 2i\int_{|z|=1}\frac{\overbrace{\frac{1}{z-3-2\sqrt{2}}}^{(**)}}{z-(3-2\sqrt{2})}\,dz \overset{CIF}{=} 2i\cdot 2\pi i\,\frac{1}{z-3-2\sqrt{2}}\Big|_{z=3-2\sqrt{2}} = 4\pi\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(**) Analytisk på och innanför $|z|=1$

Föreläsning 8

Låt $z = re^{i\theta}$



Vi har då att

$r = |z|$ bestäms entydigt

$\theta = \theta_0 + 2n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$

$\theta = \arg z$ flertydig funktion

För att få en entydigt bestämd funktion för argumentet har vi tidigare definierat principalargumentet, $\operatorname{Arg} z$. Vi har

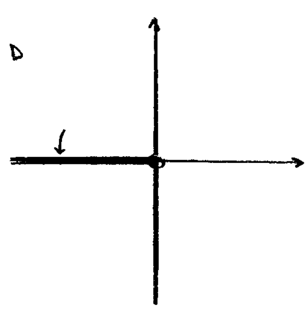
$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$

För $\log z$ som även den är flertydig, definierades

$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ (Principallogaritmen)

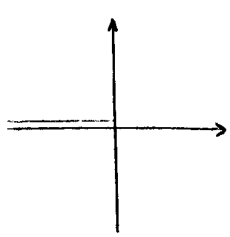
(def) En (entydig) gren av en flertydig funktion är en kontinuerlig funktion i $D \subset \mathbb{C}$, som i varje punkt i D antar som värde, något av värdena som den flertydiga funktionen antar.

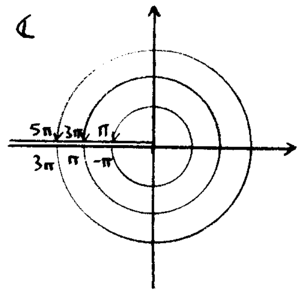
Ex $\operatorname{Log} z$ är en gren av $\log z$



$D: \begin{cases} 0 < |z| < \infty \\ -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi \end{cases}$

Om vi skall betrakta grenen som analytisk: $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$





$\log_0 z = \operatorname{Log} z$

$\log_0(-1) = \underbrace{\ln|-1|}_{=0} + i\pi$

$\log_{-1}(-1) = -i\pi$

$\log_1(-1) = i\pi + 2i\pi = 3\pi i$

Om vi tar

$$\lim_{\substack{z\to -1\\ \operatorname{Im} z>0}} \log_k z = \lim_{\substack{z\to -1\\ \operatorname{Im} z<0}} \log_{k+1} z$$

1) Val av entydig gren

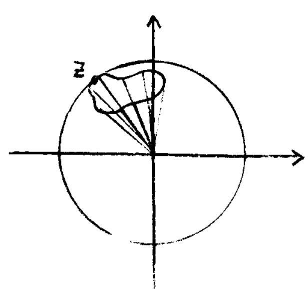
2) Inför en yta istället för $\mathbb{C}$ där funktionen blir kontinuerlig. Denna yta kallas Riemannyta.

<u>Riemannyta för $\log z$</u>

$\mathbb{C}$ i oändligt många ex. uppklippta längs t.ex $\{\operatorname{Re} z<0\}$ alltså den övre "stranden" i plan k limmas ihop med den undre i plan $k+1$. Alla genomborrade i 0.

<u>Val av entydig gren</u>

Vi har en slinga med början och slut i z som går runt 0:



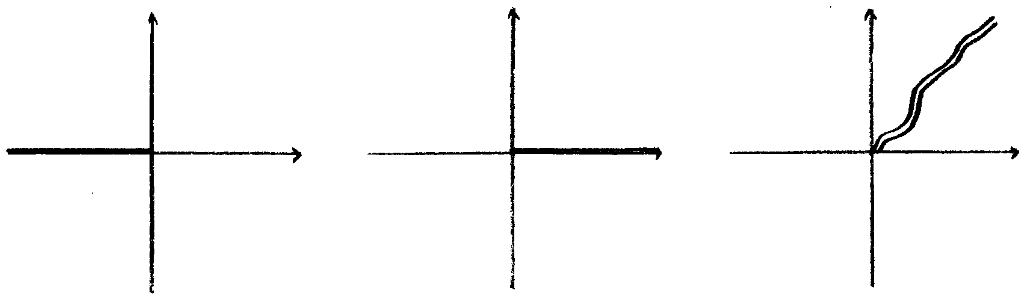
arg stiger med 2π

Slinga som ej går runt 0:

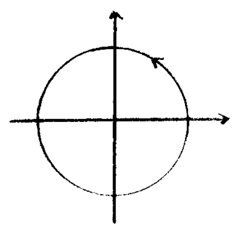
arg oförändrat

En entydig gren av $\log z$ kräver alltså att man förbjuder slingor runt 0.

Snitt mellan 0 och ∞, för övrigt godtyckligt



Förgreningspunkt: Punkt som gör att funktionens värde ändras när man går runt den.



För $\log z$: 0 och ∞

Snitt: Skall binda samman förgreningspunkterna

Givet en flertydig funktion $f(z)$ med förgreningspunkter

$z_1, z_2, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$

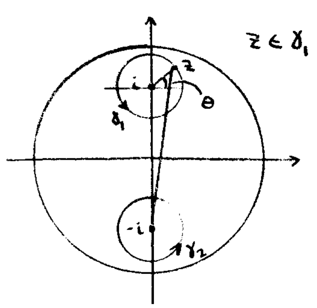
och snitt Γ mellan dessa punkter s.a

$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ är enkelt sammanhängande, så går det att välja

entydig gren av f i $\mathbb{C} \setminus \Gamma$

Ex (1) Vi har funktionen

$f(z) = (z^2+1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(z^2+1)}$ med förgreningspunkter $\pm i, \infty$



$\arg(z-i)$: börjar med värde θ_0

slutar med värde $\theta_0 + 2\pi$

$\arg(z+i)$: börjar med värde θ_1

slutar med värde θ_1

$f(z) = (z-i)^{1/2}(z+i)^{1/2}$

Vidare har vi

$z-i = re^{i\theta_0}$ början

$z+i = \rho e^{i\theta_1}$ början

Värde på $f(z)$

$(z-i)^{1/2}(z+i)^{1/2} = \sqrt{r\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\theta_1}{2}\right)}$ i början

$z-i = re^{i(\theta_0+2\pi)}$ slutet

$z+i = \rho e^{i\theta_1}$ slutet

Vi ser nu att värdet av $z-i$ är förändrat från början till slutet.

Detta innebär att $\underline{\underline{i}}$ är förgreningspunkt.

Låt nu z gå runt γ_3: z går runt $\underline{\underline{i}}$ och $\underline{\underline{-i}}$

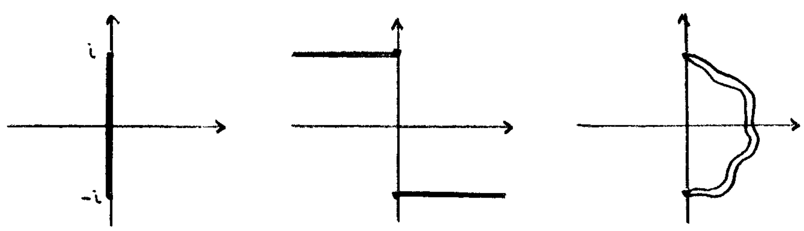
θ_0 i början till $\theta_0+2\pi$

θ_1 — " — till $\theta_1+2\pi$

värde i början: $\sqrt{r\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right)}$

i slutet: $\sqrt{r\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta_0+2\pi+\theta_1+2\pi}{2}\right)} = \sqrt{r\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right)} e^{2\pi i}$ 1

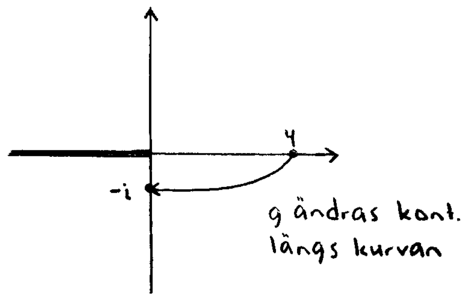
Vi får möjliga snitt



$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ enkelt sammanhängande

Val av gren:

$f(z) = z^{1/2}$ flertydig



Vi har att

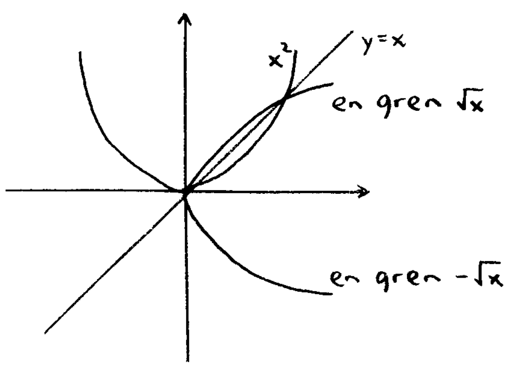
$g(z)$ entydig gren av f, definierad i $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re} \leq 0\}$

$g(4) = 2$ (ett av två möjliga)

? $g(-i)$

Vi har

$$z^{1/2} = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}\arg z} = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}(\theta_0 + 2n\pi)} = \sqrt{|z|}\,(\overset{\text{fixt}}{e^{i\frac{\theta_0}{2}}} \cdot e^{in\pi} \begin{cases} +1 & \text{för } n \text{ jämn} \\ -1 & \text{för } n \text{ udda} \end{cases}$$



Vi väljer

$z_0 = 4, \quad \theta_0 = 0$

$n = 0$ (alt. $2k$)

Detta för att $\frac{\sqrt{4}}{2} e^{i \cdot 0} \cdot e^{in\pi} = 2$

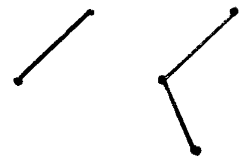
Gå från $z_0 = 4$ till $z = -i$

arg från $\theta_0 = 0$ till $-\frac{\pi}{2}$

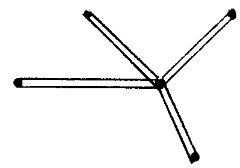
$$\Rightarrow g(-i) = \sqrt{|-i|}\, e^{i(-\frac{\pi}{2})/2} \cdot e^{i0\pi} =$$

$$= e^{-i\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

I de fall då vi har många förgreningspunkter kan vi ej göra så här

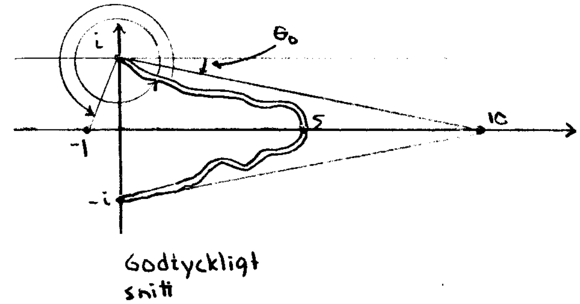


utan samtliga punkter skall vara sammanbundna enligt följande snitt



Vi betraktar återigen det tidigare exemplet

$f(z) = (z^2+1)^{1/2}$ flertydig



$g(z)$ entydig gren i det uppklippta planet s.a.

$g(10) = -\sqrt{101}$

$g(-1) = ?$

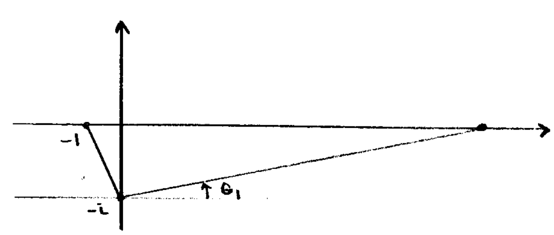
Vi tillar nu på

arg för $-1-i$: $\frac{5\pi}{4}$

10: $\theta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $\quad g(10) = \sqrt{101}\cdot e^{i\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\theta_1}{2}\right) + \frac{\overset{(z-1)^{1/2}}{2n\pi i} + \overset{(z+1)^{1/2}}{2m\pi i}}{2}} =$

$= \sqrt{101}\cdot 1 \cdot e^{(n+m)\pi i} = -\sqrt{101}$

Vi väljer $n+m$ udda $(n=0,\ m=1)$



från $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ till $\frac{3\pi}{4}$

arg för $-1+i$

Vi har nu

$g(-1) = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)} \cdot e^{\frac{\cancel{2}n\pi i + \cancel{2}m\pi i}{\cancel{2}}} = \sqrt{2}\cdot 1 \cdot (-1) = -\sqrt{2}$

Tänk på att använda samma kurva runt t.ex $\underline{\underline{i}}$.

Föreläsning 9

Sats

$f: D \to \mathbb{C}$, f analytisk i D

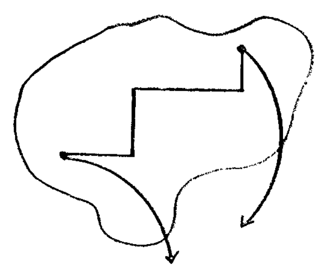
$f = u + iv$, där $u \equiv \text{const}$ (alt. $v \equiv \text{const}$)

$\Rightarrow f \equiv \text{const}$

Bevis

Låt $u = C_1 \in \mathbb{R}$

(CR) ger
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$$



D sammanhängande $\Rightarrow v \equiv C_2$

v, samma värde

$\Rightarrow f \equiv C_1 + iC_2$

Följande sats bevisar vi på tre olika sätt

Sats

$f: D \to \mathbb{C}$, f analytisk i D

$|f| \equiv C$ i D

$\Rightarrow f \equiv \text{const}$ i D

Bevis (1)

1) $C = 0$ klart

2) $C \neq 0$

$f = u + iv \quad |f| = \sqrt{u^2+v^2} \equiv C \Rightarrow u^2 + v^2 \equiv C^2 \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$

Vi får
$$\left|\begin{array}{l} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2ex] 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (CR) \begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\[2ex] v\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Detta ger nu följande homogena linjära ekvationssystem

$$\det A = \begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2+v^2 = c^2 \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ bara den triviala}$$

lösningen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ i alla punkter $\Rightarrow u \equiv c_1$

Eftersom det blir analogt för v fås alltså att $f \equiv \text{const}$

Bevis (2)

$c \neq 0$

$f \neq 0$ i D (eventuellt snitt)

$$\log_* f(z) = \underbrace{\ln|f|}_{\equiv \text{const}} + i\arg_* f \Rightarrow \log_* f(z) \equiv \text{const} \Rightarrow f \equiv \text{const}$$

Bevis (3)

$c \neq 0$

$$\underbrace{|f|^2}_{} = |c|^2$$

$f\bar{f} \equiv c^2 \Rightarrow \bar{f} = \frac{c^2}{f_{\neq 0}}$ analytisk funktion

$\Rightarrow$ Både $f, \bar{f}$ analytiska $\Rightarrow \frac{f+\bar{f}}{2} = u$ analytisk

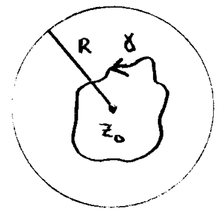
Eftersom u är analytisk måste imaginärdelen $v \equiv 0$ const

$\Rightarrow \quad u \equiv \text{const} \Rightarrow f \equiv \text{const}$

Potensserieutvecklingar

Vi har följande två typer av potensutvecklingar

(1) "Riktiga" potensserier



Taylorutveckling $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} \, d\tau$$

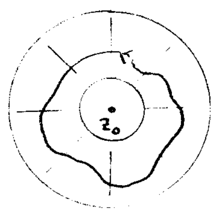
Bevis av Taylor

f analytisk

(2) Serier där man även tillåter negativa potenser

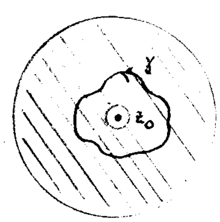
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Laurentserier



f analytisk i cirkelring

Specialfall: Punkterad omgivning



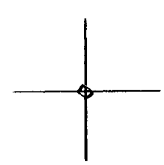
$D \setminus \{z_0\}$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \boxed{\int_\gamma f(\tau)\, d\tau} = \operatorname{Res}_{z_0} f \Rightarrow \int_\gamma f(\tau)\, d\tau = 2\pi i a_{-1}$$

$$\int_\gamma \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^0} \, d\tau$$

Ex. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \ldots$

Vi har nu $a_{-1} = 1$, alltså $\int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot 1$



Föreläsning 10

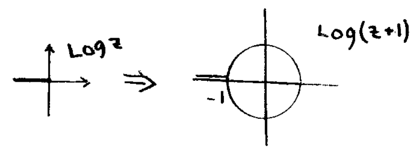
Betrakta följande taylorutvecklingar

$$
R=\infty \quad \left[\begin{aligned}
e^z &= 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots \qquad z_0=0,\ R=\infty \qquad f^{(n)}(z)\Big|_{z=0}=\left(e^z\right)^{(n)}\Big|_{z=0}=e^z\Big|_{z=0}=1\\
\cos z &= 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\ldots\\
\sin z &= z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Dessa Taylorutvecklingar fås ur: $\cos z \overset{def}{=} \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\quad \sin z \overset{def}{=} \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots,\ R=1$$

$$\mathrm{Log}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots$$



$$(1+z)^\alpha \overset{def}{=} e^{\alpha\log(1+z)}\ ? \qquad R=1$$

def Ett nollställes multiplicitet

f analytisk i $\{|z-z_0|<R\}$

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots$$

Då kallas z_0 för nollställe till f med multiplicitet $\underline{\underline{m}}$

Ex. $\quad 1-\cos z = \cancel{1}-\cancel{1}+\underbrace{\frac{z^2}{2!}}_{m=2}-\frac{z^4}{4!}+\ldots$

$z_0=0$ har multiplicitet 2

Definition: z_0 är nollställe till f av multiplicitet $\underline{\underline{m}}$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}=0,\ a_m\neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0$

Uppg. 2.4.1

Vi har funktionen

$$\frac{\sin z}{z}$$

Visa att den komplexa sin-funktionen har samma nollställen som den reella. Vi har

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Vi ser att täljaren är 0 i $z_k = k\pi$

$z_0 = 0$: $\quad \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots \qquad z_0$ ej nollställe

$k \neq 0, \; z_k = k\pi$

$$\frac{\sin k\pi}{k\pi} = 0, \quad f(z_k) = 0$$

Vi undersöker nollställets multiplicitet genom att derivera

$$f'(z)\Big|_{z=k\pi} = \frac{\cos z \cdot z - \sin z}{z^2}\Big|_{z=k\pi} = \frac{k\pi \cdot (-1)^k - 0}{(k\pi)^2} \neq 0$$

Alltså har z_k multiplicitet 1 (enkelt nollställe)

Uppg. 2.4.2

$$(e^z - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^z = 1$$

log: $z = \log 1 = \ln|1| + i(0 + 2k\pi)$

flertydig

$z_k = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(z_k) = 0$

$$f'(z)\Big|_{z=2k\pi i} = 2(e^z - 1)e^z\Big|_{z=2k\pi i} = 0$$

$$f''(z)\Big|_{z=2k\pi i} = 2e^z e^z + 2(e^z - 1)e^z\Big|_{z=2k\pi i} \neq 0$$

Alltså är nollstället $z_k = 2k\pi i$ av multiplicitet 2

Uppg. 2.4.6

$\mathrm{Log}(1-z)$, $|z|<1$

$z_0 = 0$ nollställe

Vi har följande Taylorutveckling

$$\mathrm{Log}(1-z) = \underset{0^{*}}{}(-1)\underset{m=1}{z} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots$$

multiplicitet 1 enkelt

$\mathrm{Log}(1-z) = 0$

$$\Rightarrow e^{\mathrm{Log}(1-z)} = 1 \Rightarrow 1-z = 1 \Rightarrow z = 0$$

$f(z)$ har nollställe med multiplicitet $\underline{\underline{m}}$ i z_0

$\Leftrightarrow$ $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, där g är analytisk i z_0 och $g(z_0) \neq 0$

Bevis

$\boxed{\Leftarrow}$ Trivialt

$\boxed{\Rightarrow}$ $f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots = (z-z_0)^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \ldots)}_{= g(z),\ g(z_0) \neq 0}$

g analytisk ty potensserie

Vi har

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{tolkas som ovan i } z_0 \quad z \neq z_0 \\ a_m & z = z_0 \end{cases}$$

Föreläsning 11

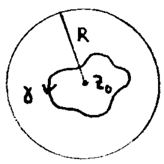
Serieutvecklingar

Taylors sats: f analytisk i $\{|z-z_0|<R\}$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{Taylorserie i } \{|z-z_0|<R\}$$

där

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

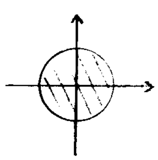


Vi har entydighet

uppg. 2.4.12 Utveckla $f(z)$ i potenser av z

Vi har $f(z)=\dfrac{z^2}{1-z}$, $z_0=0$

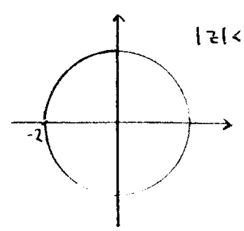
$$f(z)=z^2\cdot\frac{1}{1-z}=z^2\left(1+z+z^2+\dots\right)=z^2+z^3+\dots+z^n+\dots$$



i $\{|z|<1\}$

Vi gör nu en modifiering av uppgiften

$$f(z)=\frac{z^2}{2+z}=z^2\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=z^2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\dots\right)$$



$|z|<2 \Leftrightarrow |-\frac{z}{2}|<1$

Om vi istället har följande

$$f(z)=\frac{z^2+1}{1-z}=z^2\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-z}$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}=\frac{1}{\underbrace{\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{e^{i\frac{\pi}{3}}}\underbrace{\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{e^{-i\frac{\pi}{3}}}}=\frac{A^{=c}}{z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\;\frac{B^{=c}}{z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

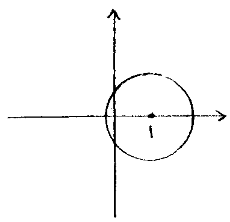
$$f(z)=\frac{1}{(z+1)^3}=\frac{1}{1+z}\cdot\frac{1}{1+z}\cdot\frac{1}{1+z}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)''$$

Att utveckla kring 0 blir mer överskådligt men vi kan utveckla kring godtycklig punkt t.ex 1.

$|z-1|<R$

i potenser av $z-1$



Obs! Utveckla ej $(z-1)^k$

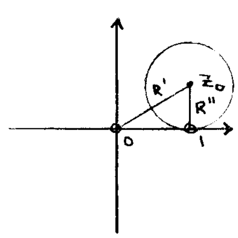
Sätt istället $w=z-1 \Leftrightarrow z=w+1 \longrightarrow f(z)=\ldots$

<u>Isolerade singulära punkter</u>

def z_0 kallas isolerad singulär punkt (singularitet) till f om f är analytisk i en punkterad omgivning till z_0, d.v.s f är analytisk i $\underbrace{\{0<|z-z_0|<R\}}_{\text{cirkelring}}$

$\Rightarrow$ f kan utvecklas i Laurentserie i den punkterade omgivningen.

<u>Ex.</u> $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$



Vi kan göra följande utvecklingar:

kring z_0: Taylorutveckling

$R=\min(R',R'')$ $\{|z-z_0|<R\}$

kring z_0: Laurentutvecklingar

$R''<|z-z_0|<R'$

$R'<|z-z_0|<\infty$

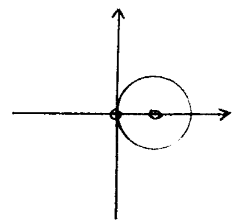
Betrakta $z_0 = 1$

Ingen Taylorutveckling kring 1

Laurentutvecklingar:

$\boxed{0 < |z - z_0| < 1}$ $\rightarrow$ Viktigast i den punkterade omgivningen

$1 < |z - z_0| < \infty$



z_0 isolerad singularitet till f

Laurentserie för f kring z_0 i $0 < |z - z_0| < R$

Vi har följande tre möjligheter för Laurentserien:

(1) Inga negativa potenser (t.ex. $\frac{\sin z}{z}$ i 0)

(2) Ändligt många negativa potenser (t.ex. $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$)

(3) Oändligt många negativa potenser (t.ex $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \ldots$)

def fall (1): z_0 kallas hävbar singularitet

fall (2): z_0 kallas pol

fall (3): z_0 kallas väsentlig singularitet

sats

1) z_0 är hävbar singularitet $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow f$ begr. i en omg. till z_0

2) z_0 pol $\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

3) z_0 är väsentlig singularitet $\Leftrightarrow \nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$ (ändligt el. oändligt)

Picards sats

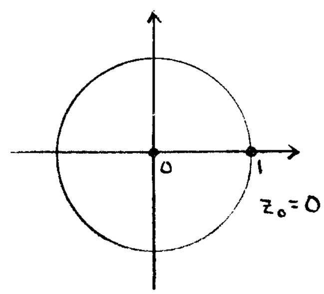
sats

z_0 väsentlig singularitet till f

$\varepsilon > 0$ godtyckligt (litet)

$\Rightarrow$ i $\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ kommer f att anta alla komplexa tal som värden, utom möjligtvis ett.

Laurentutveckla $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$



(i) $0 < |z| < 1$

Vi har nu

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$

$$1 = A(z-1) + Bz$$

$z = 0$: $A = -1$, $z = 1$: $B = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

färdig utvecklad
ty potens av z

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + \ldots) \Rightarrow \underbrace{f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots}_{\text{pol, här avläses typen}}$$

(ii) $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \dfrac{1}{z}\left(1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \ldots\right)$

$(|z| > 1)$ $\quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots \qquad i\{|z| > 1\}$$

Föreläsning 12

f analytisk i en punkterad omgivning till z_0

(d.v.s z_0 är en isolerad singularitet)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad ; \quad 0<|z-z_0|<R$$

Vi har då följande tre möjligheter för z_0:

z_0 kallas hävbar om $a_n=0 \quad \forall n<0$

z_0 kallas pol av ordning $m \in \mathbb{N}$, om $a_n=0 \quad \forall n<-m$ då $a_{-m}\neq 0$

z_0 kallas väsentlig singularitet om Laurantutvecklingen ovan innehåller oändligt många negativa potenser.

Sats

z_0 hävbar singularitet (A) $\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0} f(z)$ (B) $\Leftrightarrow f$ begränsad i en omgivning till z_0 (C)

Vi har att (A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) $\Rightarrow$ (A)

vet vi

Bevis

(A) $\Rightarrow$ (B) d.v.s givet i z_0 hävbar singularitet

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad ; \quad \{0<|z-z_0|<R\}$$

$$=a_0+\underbrace{(z-z_0)}_{\to 0}+\ldots+a_n\underbrace{(z-z_0)^n}_{\to 0} \longrightarrow a_0 \quad \text{då } z\to z_0$$

definiera nu följande funktion

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq z_0 \\ a_0 & z=z_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ analytisk i $|z-z_0|<R$ ty potensserie

Ex $\quad \frac{\sin z}{z}$ analytisk i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Vi definierar

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \qquad \text{då } \tilde{f}(z) \text{ analytisk i } \mathbb{C}$$

Bevis (forts.)

$B \Rightarrow C \quad$ Alltid

$C \overset{?}{\Rightarrow} A \quad$ (Riemanns sats)

f analytisk i $0 < |z - z_0| < R$

f begränsad i — || —

$\overset{?}{\Rightarrow} a_n = 0 \quad \forall n < 0$

Vi visar detta

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau \right| = \frac{1}{2\pi i} \left| \int_{\gamma_r} f(\tau)(\tau - z_0)^{m-1} d\tau \right| \overset{ML}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\tau \in \gamma_r} \underbrace{\left| f(\tau)(\tau - z_0)^{m-1} \right|}_{= |f(\tau)| \underbrace{(\tau - z_0)^{m-1}}_{r^{m-1}} |} \cdot 2\pi r = r^m \underbrace{\max_{\tau \in \gamma_r} |f(\tau)|}_{\leq M, \text{ ty } f \text{ begränsad i } 0 < |z - z_0| < R}$$

Detta ger att

$$\left. \begin{array}{l} a_n \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \\ \\ n > 0 \quad a_n \text{ oberoende av } r \end{array} \right\} \Rightarrow a_n = 0 \quad \text{för } n < 0$$

Sats

z_0 är pol $\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

Bevis

$\boxed{\Rightarrow}$ z_0 pol av ordning $m (>0)$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n$$

i $0 < |z-z_0| < R$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \text{ där } g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots$$

$\Rightarrow g$ analytisk

$\exists \lim_{z\to z_0} g(z) = a_{-m}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \xrightarrow[z\to z_0]{} \left(\text{"}\frac{\overset{\neq 0}{a_{-m}}}{0}\text{"}\right) \infty \quad (h \to \infty \Leftrightarrow |h| \to \infty)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$? z_0 pol ($\Rightarrow \exists$ negativa potenser i Laurent-utvecklingen)

Betrakta $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ Då $\lim_{z\to z_0} h(z) = 0$, h analytisk i

en punkterad omgivning z_0 (ty $f \to \infty$, alltså $f \neq 0$ i omg)

$\Rightarrow h(\tilde{h})$ analytisk i en hel omgivning till z_0

$h(z_0) = 0 = b_0$

$$\Rightarrow h(z) = b_m (z-z_0)^m + b_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots =$$

$$= (z-z_0)^m (b_m + b_{m+1}(z-z_0) + \dots)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z-z_0) + \dots}$$

analytisk ty nämnaren analytisk $\neq 0$ nära z_0

$$\Rightarrow \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z-z_0) + \dots} = c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

$\Rightarrow$ <u>z_0 pol av ordning m</u> till $f \Leftrightarrow$ z_0 nollställe av mult. m till $\frac{1}{f}$

z_0 hävbar $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

z_0 pol $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$

z_0 väsentlig singularitet $\Leftrightarrow$ f har inget gränsvärde då $z \to z_0$ vare sig ändligt eller oändligt.

Sats (Weierstraß)

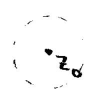
z_0 isolerad singularitet till f

z_0 väsentlig singularitet

$\Rightarrow$ i godtyckligt liten omgivning till z_0 kommer f godtyckligt nära varje (fixt) komplext tal.

Sats (Mer matematisk)

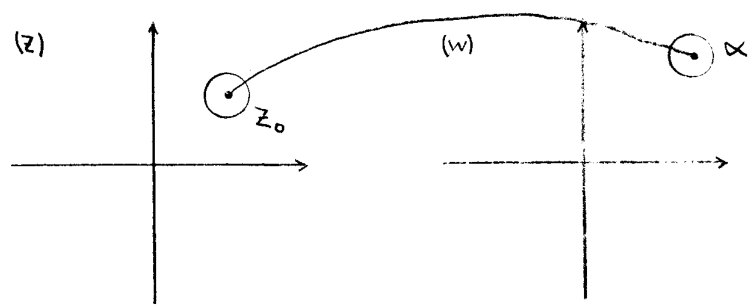
$\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $(\overline{\mathbb{C}})$ $\exists \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$, $z_n \to z_0$ s.a. $f(z_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha$



välj $\alpha \in \mathbb{C}$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ (små) $\exists z_{\varepsilon_2}$: $0 < |z_{\varepsilon_2} - z_0| < \varepsilon_2$ och $0 < |f(z_{\varepsilon_2}) - \alpha| < \varepsilon_1$



Bevis

Vi antar att påståendet är falskt

$\exists \alpha_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon_1^0 > 0, \varepsilon_2^0 > 0$ s.a.

$\forall z : |z - z_0| < \varepsilon_2^0$ gäller $|f(z) - \alpha_0| \geq \varepsilon_1^0 = \varepsilon_0$

Betrakta

$F(z) = \dfrac{1}{f(z) - \alpha_0}$; vi vet att $|F(z)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon_0}$ i $0 < |z - z_0| < \varepsilon_2^0$

$$|F(z)| = \frac{1}{|f(z) - \alpha_0|}$$

$\Rightarrow z_0$ hävbar singularitet ty F begränsad i punkterad omg.

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C$

Vi får nu två fall:

(1) $C \neq 0$: $\dfrac{1}{f(z) - \alpha_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} C \neq 0$

$\Rightarrow f(z) - \alpha_0 \xrightarrow[z \to z_0]{} \dfrac{1}{C}$

$\Rightarrow f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \dfrac{1}{C} + \alpha_0$

$\Rightarrow$ z_0 hävbar, motsägelse

(2) $C = 0$

$\dfrac{1}{f(z) - \alpha_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$

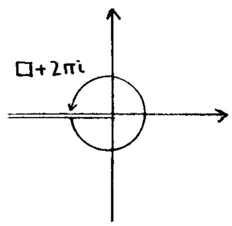
$\Rightarrow f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty$

$\Rightarrow f$ har pol i z_0, motsägelse

Detta ger att påståendet är sant.

Finns det icke-isolerade singulariteter? Ja!

Ex. i 0 för $(\log_* z)$ $\operatorname{Log} z$

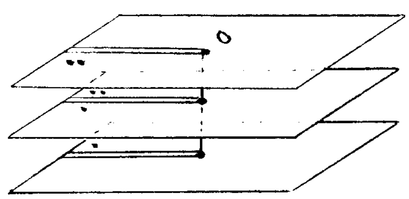


log kan ej definieras runt 0 s.a. den blir kontinuerlig.

Nu utgör 0 förgreningspunkt för $\operatorname{Log} z$.

Vi har för $\log z$:

Riemannyta:

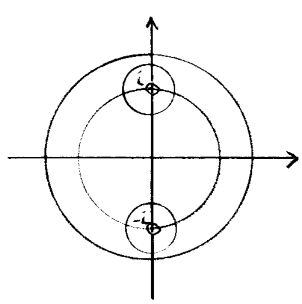


På Riemannytan är 0 samma punkt

Efter ett varv nås nästa plan (yta)

$0, \infty$ förgreningspunkter

$f(z) = (z^2+1)^{1/2}$ har Laurentutveckling kring 0 i $1 < |z| < \infty$



Förelåsning 13

Uppg. 2.5.4

$f(z) = \pi \cot(\pi z)$ Vilken typ av singularitet

Vi har

$$f(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$ både täljare och nämnare analytiska i hela $\mathbb{C}$

Singularitet då $\sin(\pi z) = 0$

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} = 0 \quad \Big| \cdot 2e^{i\pi z}$$

Vi får

$$e^{2i\pi z} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2i\pi z} = 1$$

$$2i\pi z = \underbrace{\log}_{\text{flertydig}} 1 = \underbrace{\ln|1|}_{=0} + i(0 + 2k\pi)$$

$z_k = k$ nollställe till nämnaren $k \in \mathbb{Z}$

Nu undersöker vi multipliciteten för $z_k = k$

$$\left(\sin(\pi z)\right)'\Big|_{z=k} = \pi\cos(\pi z)\Big|_{z=k} = \pi(-1)^k \neq 0 \Rightarrow z_k = k \text{ enkla nollställen till nämnaren.}$$

ej nollställen till täljaren.

$$f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{a_0} + a_1(z-k) + \dots}{\underset{\neq 0}{b_1}(z-k) + b_2(z-k)^2} = \frac{1}{z-k} \boxed{\frac{\overset{\neq 0}{a_0} + a_1(z-k) + \dots}{\underset{\neq 0}{b_1} + b_2(z-k) + \dots}}$$

analytisk funktion i en omgivning till $z_k = k$ den är $\neq 0$ i $z_k = k$

$$= \frac{1}{z-k}\left(c_0 + c_1(z-k) + \dots\right)$$

Laurentutvecklingen

$\Rightarrow z_k = k$ enkelpol till f

Vi gör en generell utredning:

Vi har

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$$

där g, h analytiska i en omgivning till z_0, nollställe till g

av multiplicitet $m \geq 0$ och nollställe till h av multiplicitet $n>m$

$$f(z)=\frac{\overset{\neq 0}{a_m}(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots}{\underset{\neq 0}{b_n}(z-z_0)^n+b_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\dots}=\frac{\overset{\neq 0}{a_m}+a_{m+1}(z-z_0)+\dots}{\underset{\neq 0}{b_n}(z-z_0)^{n-m}+b_{n+1}(z-z_0)^{n-m+1}+\dots}=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^{n-m}}\boxed{\frac{\overset{\neq 0}{a_m}+a_{m+1}(z-z_0)+\dots}{\underset{\neq 0}{b_n}+b_{n+1}(z-z_0)+\dots}}$$ analytisk i en omgivning till z_0, $\neq 0$ i z_0

$$=\underbrace{\frac{1}{(z-z_0)^{n-m}}\left(c_0+c_1(z-z_0)+\dots\right)}_{\text{Laurentutveckling}}=f(z)$$

z_0 pol av ordning $n-m$ (>0)

2.5.6 Lokalisera $f(z)$:s isolerade singularitet och avgör dess typ

Vi har

$$f(z)=\frac{e^{z-1}}{e^{2z}-1}=\frac{e^{\cancel{z-1}}}{\cancel{(e^z-1)}(e^z+1)}=\frac{1}{e^z+1}$$

Vi betraktar nämnarens nollställen, vi sätter

$$e^z+1=0$$

$$z_k=\log(-1)=\underbrace{\ln|-1|}_{=0}+i(\pi+2k\pi)=i(2k+1)\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

Dess multiplicitet:

$$(e^z+1)'=e^z\neq 0$$

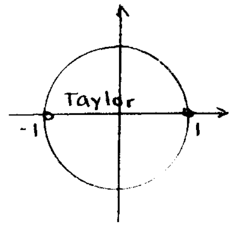
$\Rightarrow$ z_k enkla nollställen till nämnaren

Vi ser även att z_k ej är nollställen till täljaren

$\Rightarrow$ $z_k=i(2k+1)\pi$ enkelpoler till $f(z)$

2.5.22 c) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+1}$ skall utvecklas i Laurentserier i $2<|z|<\infty$

kring 0



$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\dots\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\dots$$

Detta ger

$$\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}=\cancel{\frac{1}{z}}+\frac{1}{z^2}+\cancel{\frac{1}{z^3}}-\cancel{\frac{1}{z}}+\frac{1}{z^2}-\cancel{\frac{1}{z^3}}\dots=\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^4}+\dots=\frac{2}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}+\dots\right)$$

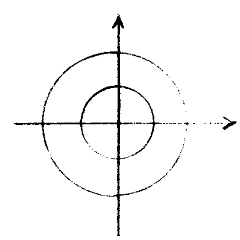
2.5.22 d) $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=e^{z}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\dots+\frac{1}{n!z^n}+\dots\right)=$

I en punkterad omgivning kring 0, $0<|z|<\infty$

$$=\dots+\underbrace{\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\dots\right)}_{\substack{=c_{-1}\\ =\operatorname{Res}_0 f}}\frac{1}{z}+\underbrace{\left(1+1\cdot\frac{1}{2!^2}+\dots+\frac{1}{(n!)^2}\right)}_{=c_0}+\underbrace{\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!2!}+\dots+\frac{1}{(n+1)!n!}+\dots\right)}_{=c_1}z$$

2.5.23 a) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-z-2}$ (i) $1<|z|<2$

Vi har (ii) $2<|z|$



$$f(z)=\frac{z+2}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\dots\right)$$ i båda fallen

$\left|\frac{1}{z}\right|<1$ $|z|>1$ i (i) och (ii)

(i) $1<|z|<2$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{2}\,\frac{-1}{-\frac{z}{2}+1}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\dots\right)$$

$\left|\frac{z}{2}\right|<1$

(ii) $2<|z|$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\dots\right)$$

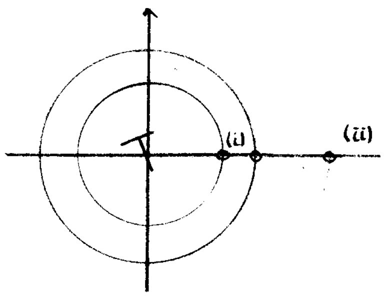
$|z|>2\Rightarrow\left|\frac{2}{z}\right|<1$

2.5.23 c) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)(z-3)(z-5)} = \dfrac{A}{z-2} + \dfrac{B}{z-3} + \dfrac{C}{z-5}$

(i) $2 < |z| < 3$

$|z|$ innebär att vi utvecklar kring 0.

(ii) $5 < |z|$



Vi har

(i) $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} = \dfrac{1}{z}\left(1 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{4}{z^2} + \dots\right)$

$\left|\frac{2}{z}\right| < 1$

$\dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{\frac{z}{3}-1} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{-1}{1-\frac{z}{3}} = -\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{z}{3} + \dfrac{z^2}{9} + \dots\right)$

$\left|\frac{z}{3}\right| < 1$

$\dfrac{1}{z-5} = \dfrac{1}{5}\,\dfrac{1}{\frac{z}{5}-1} = -\dfrac{1}{5}\,\dfrac{1}{1-\frac{z}{5}} = -\dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{z}{5} + \dfrac{z^2}{25} + \dots\right)$

$\left|\frac{z}{5}\right| < \left|\frac{z}{3}\right| < 1$

Multiplicera in A, B, C och lägg ihop.

(ii) $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} = \dots$ Analogt resonemang som ovan

$|z| > 5$ $\qquad \left|\frac{2}{z}\right| < \left|\frac{5}{z}\right| < 1$

$\dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{3}{z}} = \dots$

$\dfrac{1}{z-5} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{5}{z}} = \dots$

$\left|\frac{5}{z}\right| < 1$

Residylsatsen

Sats

f analytisk i D, utom (eventuellt) i ändligt många isolerade singulära punkter $z_1, \ldots, z_k$.

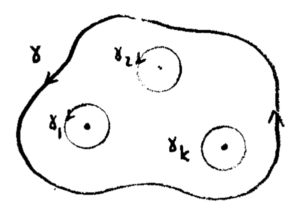
γ enkel sluten, $\gamma \in D$ tillsammans med sitt inre.

$z_1, \ldots, z_k \in \gamma$:s inre (omcirklas av γ)

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z_j} f$$

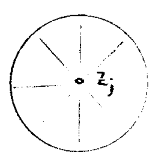
Bevis

Deformation av kontur: $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$



(γ_j omcirklar endast z_j, $\{\gamma_j\}$ långt ifrån varandra.)

z_j: Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_j



$$a_{-1}^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{Res}_{z_j} f$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z_j} f \qquad \text{(ett varv moturs)}$$

Hur residylkalkyl kan appliceras i reella fall

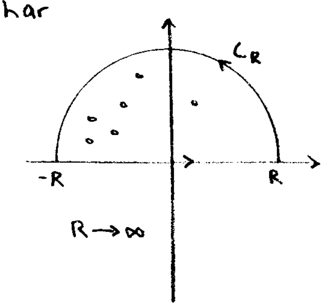
(1) $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$, $\quad z = e^{i\theta} \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \qquad \int \rightsquigarrow \int_{|z|=1}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ där P, Q polynom, $\deg Q \geq \deg P + 2$, ($Q \neq 0$ för $x \in \mathbb{R}$)

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x) \cdot \left\{ \begin{matrix} \sin ax \\ \cos ax \end{matrix} \right\}}{Q(x)}\,dx \quad \deg Q \geq \deg P + 1$, ($Q \neq 0$ i $\mathbb{R}$)

(4) $\ln$, x^α

Vi har



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $\quad z_k$ nollställen till $Q(z)$ i öhp

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z_j} f \quad ; \quad \int_{C_R} f(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Res = ?

$$\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{?} 0$$

Föreläsning 14

Ur residylsatsen från föregående föreläsning fick vi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z_j} f$$

Hur beräknas $\operatorname*{Res}_{z_j} f$?

Vi har

Pol z_0 av ordning m:

$\operatorname*{Res}_{z_0} f$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{\boxed{a_{-1}}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0)$$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \dots$$

$$\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} = (m-1)!\,a_{-1} + \square\,(z-z_0) + \dots$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}$$

$\operatorname*{Res}_{z_0} f$

Notera följande specialfall:

$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ där g, h analytiska i en omgivning till z_0.

h har enkelt nollställe i z_0 och $g(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow z_0$ enkelpol till f

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Bevis

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z-z_0)+\dots}{b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2+\dots} = \frac{1}{z-z_0}\,\frac{\overset{\neq 0}{a_0} + a_1(z-z_0)+\dots}{\underset{\neq 0}{b_1} + b_2(z-z_0)+\dots}$$

Eftersom z_0 enkelpol har vi $m=1$

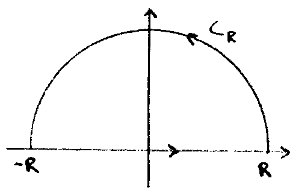
$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{a_0 + a_1(z-z_0)+\dots}{b_1 + b_2(z-z_0)+\dots} = \frac{a_0}{b_1} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Integraltyper

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

Förutsättningar: P, Q polynom med reella koefficienter

$$\left.\begin{array}{l} \deg Q \geq \deg P + 2 \\ Q \text{ har inga reella nollställen} \end{array}\right\} \text{konvergens}$$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

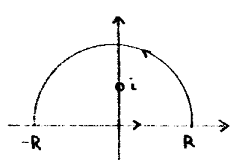
Från början är R tillräckligt stort för att samtliga nollställen till Q i öhp skall ligga innanför Γ_R.

Vi har

$$2\pi i \underbrace{\sum \operatorname{Res} f}_{Q\text{:s nollst i öhp}} = \int_{\Gamma_R} \underbrace{f(z)}_{\frac{P(z)}{Q(z)}}\,dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx}_{\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx} + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{Q\text{:s nollst i öhp}} \operatorname{Res} \frac{P}{Q}}$$

Ex. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ ty $\dfrac{1}{x^2+1}$ jämn funktion

Vi ser att Q:s nollställe i öhp är $z_0 = i$



$R > 1$ $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{i} f = 2\pi i \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \pi$

$$\operatorname{Res}_i f = \left.\frac{1}{(z^2+1)'}\right|_{z=z_0}$$

Nu uppskattar vi $\displaystyle\int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1}$

$$\left|\int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1}\right| = \left[\begin{array}{l|l} z = Re^{i\theta} & dz = Rie^{i\theta}d\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi & \end{array}\right] = \left|\int_0^{\pi} \frac{Rie^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+1}\right| \leq R\frac{1}{R^2-1}\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

För att beräkna integralen kan även uhp väljas: $\tilde{\Gamma}_R = \overleftarrow{[-R, R]} \cup \tilde{C}_R$

2.6.2

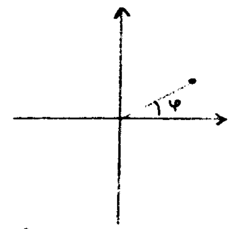
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-4x^2+5}\,dx$$

Vi har $Q(\overset{(z)}{x}) = (\overset{(z)}{x}^2-2)^2+1=0 \Rightarrow z^2-2=\pm i \Rightarrow z^2=2\pm i$

Inga reella nollställen

(1) Polär form

$2+i = |2+i|e^{i\varphi}$ där $\varphi = \arctan\frac{1}{2}$



(2) $z=a+bi$

$z^2 = a^2-b^2+2abi = 2\pm i \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=2 \\ 2ab=1 \end{cases} \Bigg| \begin{cases} a^2-b^2=2 \\ 2ab=-1 \end{cases}$

Detta ger

$$b=\frac{1}{2a}$$

$$a^2-\frac{1}{4a^2}=2$$

$$a^4-2a^2-\frac{1}{4}=0$$

$$(a^2-1)^2-\frac{5}{4}=0$$

$$a^2-1=\pm\frac{\sqrt5}{2} \Rightarrow a^2=1\pm\frac{\sqrt5}{2} \Rightarrow a=\pm\sqrt{1\pm\frac{\sqrt5}{2}} \;;\quad b=\pm\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{\sqrt5}{2}}}$$

Fall I

$$a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt5}$$

$$b=\pm\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt5}}$$

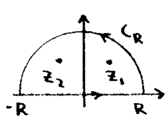
Fall II

$$a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt5}$$

$$b=\mp\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt5}}$$

Vi är bara intresserade av de rötter som ligger i öhp: $(b>0)$

$$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt5}+i\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt5}} \quad \text{och} \quad z_2=-\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt5}+i\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt5}}$$



$\Gamma_R=[-R,R]\cup C_R$ ($R>\sqrt[4]{5}$, tillräckligt stort)

Vi uppskattar nu $\int_{C_R}$:

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^2}{z^4-4z^2+5}dz\right| = \begin{bmatrix} z=Re^{i\theta} & dz=Rie^{i\theta}d\theta \\ 0\le\theta\le\pi & \end{bmatrix} = \left|\int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\theta}\cdot Rie^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}-4R^2e^{2i\theta}+5}d\theta\right| \le$$

$$\le \pi\frac{R^3}{R^4-4R^2-5} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\begin{bmatrix} \text{det största abs. bel. med}(+) \\ \text{övriga med}(-) \end{bmatrix}$

Vi har nu Res f för enkla nollställen

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)} = \frac{z_1}{4z_1^2-8} = \frac{1}{4}\frac{z_1}{z_1^2-2} = \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{5}}+i\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}}{\frac{1}{4}(4+2\sqrt{5})-\frac{1}{4+2\sqrt{5}}+i-2} = \dots$$

Vi vet sedan tidigare att

$$z_1^2 = 2+i$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z_1} f = \frac{1}{4}(-i)\left(\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{5}}+i\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}\right)$$

$$z_1^2-2=i$$

$$\frac{1}{i}=-i$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2} f = \frac{1}{4}\cdot i\,\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{5}}+i\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}}{\cancel{z_2^2-2-i}}$$

$$2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z_1} f+\operatorname*{Res}_{z_2} f\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{5}}\right)i = \underbrace{\frac{\pi}{2}\sqrt{4+2\sqrt{5}}}_{\substack{\text{Reellt}\\ >0}} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{\underbrace{x^4-4x^2+5}_{>0}}$$

Föreläsning 15

Betrakta följande kvot

$$\frac{\dots}{x^8+1}$$

För att lösa den binomiska ekvationen $z^n = A$, bestämmer vi alla

n-te rötter av A, n st.

På polär form:

$$\begin{cases} A = \rho e^{i\varphi} & \text{(givet)} \\ z = re^{i\theta} & \text{(söks)} \end{cases}$$

$$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$$

$r^n = \rho \quad \exists!$ lösning: $r = \sqrt[n]{\rho}$ (≥ 0)

$n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$? Oändligt många lösningar

$\theta = \underbrace{\dfrac{\varphi}{n}}_{\text{fixt}} + \dfrac{k}{n} 2\pi$ Bland dessa: Bara $\underline{\underline{n}}$ olika

$\dfrac{k}{n} = q + \dfrac{p}{n}$

q kvot $\in \mathbb{Z}$

p rest $p = 0, 1, 2, \dots, n-1$

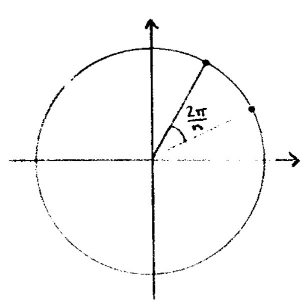
Vi har nu

$$\frac{k}{n} \cdot 2\pi = q \cdot 2\pi + \frac{2p\pi}{n}$$

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(q \cdot 2\pi + \frac{2p\pi}{n} + \frac{\varphi}{n}\right)} = z_p$$

$$e^{i2\pi q} = 1$$

n möjliga rester $p \Rightarrow n$ olika rötter



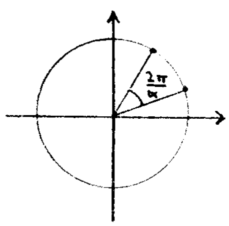
$r = \sqrt[n]{\rho}$

Om vi har

$$z^{\alpha} = A$$

oändligt många värden för z om $\alpha \notin \mathbb{Q}$

då $\alpha \in \mathbb{R}$ har vi



Betrakta återigen

$$\operatorname*{Res}_{z_j} \frac{P(z)}{z^8+1} = \frac{P(z)}{8z_j^7}$$

Vi vet att

$$z_j^8 = -1 \Rightarrow z_j^7 = -\frac{1}{z_j}$$

Detta ger följande förenkling

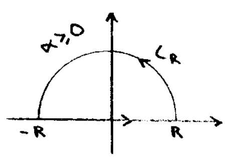
$$\frac{P(z)}{8z_j^7} = -\frac{1}{8} z_j P(z_j)$$

Nästa integraltyp

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\begin{Bmatrix}\sin ax \\ \cos ax\end{Bmatrix}}{Q(x)} dx \quad \deg Q \geq \deg P + 1$$

2.6.4

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (\text{enkelt ty } \deg Q \geq \deg P+2)$$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} \quad \text{ty} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

öhp: $z = iy$: $e^{-i\,iy} = e^{y} \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$

uhp: $z = -iy$: $e^{i(-i)y} = e^{y} \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$

Både öhp och uhp är otrevliga

eftersom täljaren $\longrightarrow \infty$

Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx\right]$$

Q har inga reella nollställen

R väljs så stort att alla nollställen till Q har belopp < R.

$$\underbrace{\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz}_{=\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz} = 2\pi i \sum_{\substack{z_j \\ \cap \\ \text{öhp}}} \operatorname*{Res}_{z_j} f$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Vi skall nu undersöka att $\int_{C_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ Detta gäller ej alltid

Betrakta följande uppskattning

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz\right| = \begin{bmatrix} z = Re^{i\theta} \\ 0 \le \theta \le \pi \\ dz = Rie^{i\theta}d\theta \end{bmatrix} = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{i\alpha R\cos\theta}\cdot e^{-\alpha R\sin\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+1)(R^2e^{2i\theta}+4)}\,Rie^{i\theta}\,d\theta\right| \le$$

$$\le \pi R\frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)} \max_{0\le\theta\le\pi} \underbrace{e^{-\alpha R\sin\theta}}_{\sin\theta \ge 0 \,:\, [0,\pi]}{}^{\le 0} \le \pi R\frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Nu återstår att beräkna residylen, $\alpha > 0$

$Q(z)=0$ i öhp: i och $2i$, $z^2+1=0$ och $z^2+4=0$

Dessa är båda enkla nollställen

$$\operatorname*{Res}_{i} f(z) = \frac{e^{i\alpha\cdot i}/(i^2+4)}{2i} = \frac{e^{-\alpha}}{6i}$$

$$\operatorname*{Res}_{2i} f(z) = \frac{e^{i\alpha\cdot 2i}/(-4+1)}{2\cdot 2i} = -\frac{e^{-2\alpha}}{12i}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} = 2\pi \cancel{i}\left(\frac{e^{-\alpha}}{\cancel{6i}_{\,3}} - \frac{e^{-2\alpha}}{\cancel{12i}_{\,6}}\right) = \pi\left(\frac{e^{-\alpha}}{3} - \frac{e^{-2\alpha}}{6}\right) = \frac{\pi}{6}\left(2e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}\right) \quad \text{oberoende av R}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx + 0 = \frac{\pi}{6}\left(2e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx \qquad \alpha \ge 0$$

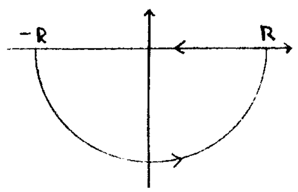
Olika fall för α

$\alpha < 0$

$\cos(-\alpha x) = \cos \alpha x$

$-\alpha > 0$ som tidigare uppgift

Betrakta fallet då $\alpha < 0$



$\pi \leq \theta \leq 2\pi$

$\sin\theta \leq 0$

$-\alpha R \sin\theta \leq 0$

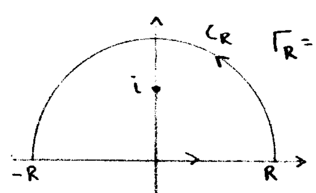
Hur får vi följande?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\quad} = \text{reellt} \quad \text{ty} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin \alpha x}{(x^2+1)(x^2+4)}}_{\text{udda}} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x \, dx \qquad \deg Q = \deg P + 1$$

2.6.5'

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx$$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

Låt $f(z) = \dfrac{z e^{iz}}{z^2+1}$ $\qquad \alpha = 1 > 0$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{i} f(z) = 2\pi i \left. \frac{z e^{iz}}{2z} \right|_{z=i} \overset{?}{=} \pi i e^{-1}$$

Om $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$$\left| \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+1} dz \right| = \begin{bmatrix} z = Re^{i\theta} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ dz = Rie^{i\theta} d\theta \end{bmatrix} = \left| \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta} \cdot e^{iR\cos\theta} \cdot e^{-R\sin\theta}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\pi} \underbrace{e^{-R\sin\theta}}_{\leq 1} d\theta$$

räcker ej

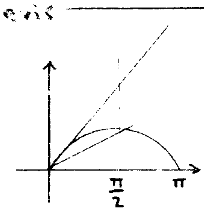
Vi behöver något starkare: Jordans lemma

Jordans lemma

Lemma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha\sin\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi}{2\alpha R} \quad \text{för } \alpha > 0$$

Bevis



$\sin x \leq x$ i $[0, \frac{\pi}{2}]$

Dessutom gäller att

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x \quad \text{i } [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

sinus kurvan är $\underbrace{\text{konkav}}_{(\sin x)'' = -\sin x \leq 0}$ $\Rightarrow$ sinus graf över sekanten

$$\Rightarrow \underbrace{-\alpha R}_{<0} \sin\theta \leq -\frac{2\alpha R\theta}{\pi} \quad \forall \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}\, d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\theta}\, d\theta = \left[-\frac{\pi}{2\alpha R} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{-\frac{\pi}{2\alpha R} e^{-\alpha R}}_{<0} + \frac{\pi}{2\alpha R} \leq$$

ty exp växande

$$\leq \frac{\pi}{2\alpha R}$$

Vi återgår nu till uppgiften 2.6.5'

Vi har

$$\frac{R^2}{R^2-1} \cdot \underbrace{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\, d\theta}_{\text{p.g.a symmetri}} \leq \frac{R^2}{R^2-1} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Föreläsning 16

Den logaritmiska indikatorn, Rouches sats

$f: D \to \mathbb{C}$ f har enbart poler i D (f.ö. analytisk)

(def) Den logaritmiska indikatorn för f (givet en enkel sluten kurva γ moturs, f har inga poler och nollställen på γ) är

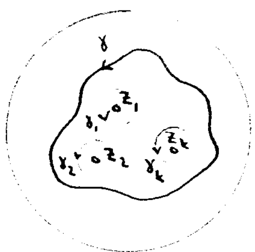
talet $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

$\frac{f'(z)}{f(z)} \to (\log f(z))'$

Specialfall: f analytisk i D

f har nollställe i $z_1, \dots, z_k \in D$

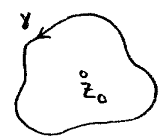
f analytisk $\Rightarrow$ isolerade nollställen ($\in \gamma$:s inre)



$$\int_\gamma = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} \quad \text{(deformation av kontur)}$$

γ_j går runt endast ett nollställe z_j

γ går runt endast ett nollställe, z_0



Betrakta nu

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Utveckla f, f' i Taylorserie kring z_0

$$f(z) = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots \quad , m \geq 1 \text{ (ty } z_0 \text{ nollställe)}$$

$$f'(z) = m a_m (z-z_0)^{m-1} + (m+1) a_{m+1} (z-z_0)^m + \dots$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m a_m \cancel{(z-z_0)^{m-1}} + (m+1) a_{m+1} (z-z_0)^{\cancel{m}} + \dots}{a_m (z-z_0)^{\cancel{m}} + a_{m+1} (z-z_0)^{\cancel{m+1}} + \dots} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \boxed{\frac{m a_m + (m+1) a_{m+1} (z-z_0) + \dots}{a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots}} =$$

analytisk i en omgivning till z_0 ty $a_m \neq 0$

$$= \frac{1}{z-z_0} \left(b_0 + b_1 (z-z_0) + \dots \right) \text{ där } b_0 = m$$

$\Rightarrow z_0$ enkelpol för $\frac{f'}{f}$, $\underbrace{\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f}}_{= 72 = a_{-1}} = m$ nollst. multiplicitet

Tillbaka i fallet med flera nollställen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{2\pi i}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z_j}\frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{k} m_j = N$$

enl. residylsatsen

z_j:s multiplicitet

N = antalet nollställen till f innanför γ räknade med multiplicitet.

Generellt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N-P$$

N som ovan

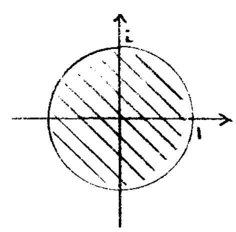
P = antalet poler till f innanför γ, räknade med ordning.

Ex. Rouches sats

Hur många rötter har ekvationen

$$z^5+z^3-z^2+6z+1=0$$

i $\{|z|<1\}$



Vi ser att $6z$ blir dominant term.

$f(z)=6z$

$\gamma=\{|z|=1\}$ på γ: $|f|=6$

$g(z)=z^5+z^3-z^2+1$

$|g|\leq |z^5|+|z^3|+|z^2|+1=4<6=|f|$

$\Rightarrow f$ och $f+g$ har lika många nollställen innanför $\{|z|=1\}$ d.v.s ett.

Följande gäller

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ kontinuerlig} \\ K \text{ kompakt} \end{array}\right\} \Rightarrow f(K) \text{ kompakt} \qquad \left.\begin{array}{l} f \text{ kontinuerlig} \\ D \text{ öppen} \end{array}\right\} \not\Rightarrow f(D) \text{ öppen}$$

(t.ex $f \equiv$ const)

Sats

D öppen i $\mathbb{C}$

f analytisk i D, $f \not\equiv$ const

$\Rightarrow f(D)$ öppen i $\mathbb{C}$

Bevis

Tag $w_0 \in f(D)$

$? \; \exists \delta > 0 : \{|w - w_0| < \delta\} \subset f(D)$

Givet att $\exists z_0 \in D : f(z_0) = w_0$

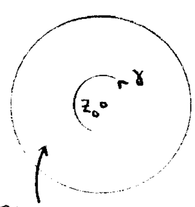
Betrakta funktionen $f(z) - w_0 \left| \begin{array}{l} \text{analytisk} \\ \not\equiv \text{const} \quad (\not\equiv 0) \\ = 0 \text{ i } z_0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow f(z) - w_0 = \overset{\neq 0}{a_m}(z - z_0)^m + \ldots$

(multiplicitet $\underline{\underline{m}}$)

z_0 isolerat nollställe till f.

(d.v.s $f(z) - w_0 \neq 0$ i en punkterad omgivning till z_0)



$f(z) - w_0 \neq 0$

$\gamma = \{|z - z_0| = r\} <$ den punkterade omgivningen där $f(z) - w_0 \neq 0$

Tag $\delta = \min\limits_{\gamma} |f(z) - w_0| > 0$ (ty kontinuerlig funktion > 0 på en kompakt mängd $\Rightarrow$ min. antas)

$? \; \{|w - w_0| < \delta\} \subset f(D)$ Låt $w : |w - w_0| < \delta$

$\underbrace{|w - w_0|}_{= |w_0 - w|} < \delta = \min\limits_{\gamma} |f(z) - w_0| \leq |f(z) - w_0|, \quad \forall z \in \gamma$

$\Rightarrow$ Enl. Rouches sats har $f(z) - w_0$ och $f(z) \cancel{-w_0} \cancel{+w_0} - w$ lika många nollställen innanför γ, d.v.s $m \geq 1$

$\Rightarrow \underset{(\underline{\underline{m}} \text{ st})}{\exists z_1 \in D}$ (innanför γ) s.a. $f(z_1) - w = 0 \Rightarrow \underset{w = f(z_1)}{w \in f(D)} \Rightarrow \{|w - w_0| < \delta\} \subset f(D) \Rightarrow f(D)$ öppen

Föreläsning 17

Sats

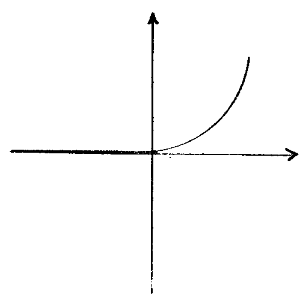
En analytisk funktions nollställen är isolerade, d.v.s

$f: D \to \mathbb{C}$, f analytisk i D

$f(z_0) = 0$, $f \not\equiv 0$

$\Rightarrow f \neq 0$ i en punkterad omgivning till z_0

Betrakta följande funktion



reell, C^∞

$\equiv 0$ för $x \leq 0$

$\not\equiv 0$ i $\mathbb{R}$

$$f = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

Dessa egenskaper kan ej förekomma för analytiska funktioner

$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 0$

Taylorserien i 0: $\quad 0 + 0x + 0x^2 + \ldots \equiv 0 \not\equiv f$

Sats

$f: D \to \mathbb{C}$, f analytisk i D

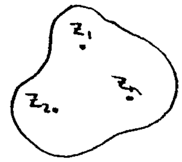
$\exists \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D: f(z_k) = 0 \quad k \in N$

och $z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} z_0 \in D$

$\Rightarrow f \equiv 0$ i D

Bevis

f analytisk $\Rightarrow f$ kontinuerlig



$\Rightarrow f(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{f(z_k)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow z_0$ icke-isolerat nollställe till z_0

$\Rightarrow f \equiv 0$ i en omgivning till z_0

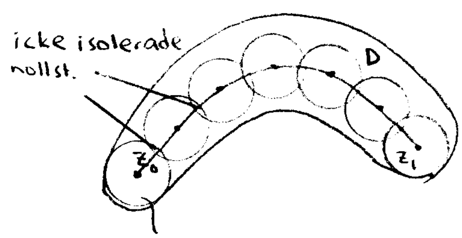
Analytisk fortsättning

D öppet och sammanhängande

$\exists$ kurva γ som binder ihop z_0 och z_1

? $f(z_1) = 0$

Vi har

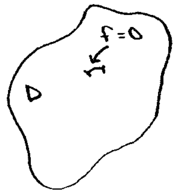


Täck γ med överlappande cirkelskivor $\subset D$, med medelpkt på γ. Det går att göra med ändligt många cirkelskivor.

I varje cirkelskiva har f en Taylorutveckling.

Gå via överlappande skivor enl. figuren ovan.

Om vi har en kort kurva med värde 0:



$\Rightarrow f \equiv 0$ i D

Vi återgår nu till den logaritmiska indikatorn

def $f: D \to \mathbb{C}$, f har som värst poler i D.

Den logaritmiska indikatorn (givet en enkel sluten kurva $\gamma \in D$ s.a f ej singulär på γ)

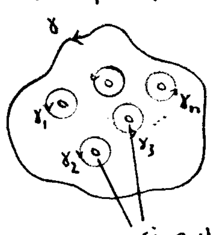
Vi har då talet $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$

Sats

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$, där N är antalet nollställen till f innanför γ, räknade med multiplicitet.

P är antalet poler till f innanför γ, räknade med ordning.

Bevis (för poler)



singulariteter för $\frac{f'}{f}$ (nollställen eller poler till f), isolerade.

Vi har

$\int_\gamma = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}$ ty f analytisk på och mellan kurvorna.

Betrakta $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$

motors
går runt z_k, pol till f

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \operatorname{Res}_{z_k}\frac{f'}{f}$

enl. residysatsen

$\operatorname{Res}_{z_k}\frac{f'}{f} = ?$ $\quad z_k$ pol till f av ordning $m_k \geq 1$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\overset{\neq 0}{a_{-m_k}}}{(z-z_k)^{m_k}} + \frac{a_{-m_k+1}}{(z-z_k)^{m_k-1}} + \dots + a_0 + a_1(z-z_k) + \dots$$

$$f'(z) = -m_k \cdot \frac{\overset{\neq 0}{a_{-m_k}}}{(z-z_k)^{m_k+1}} - (m_k-1)\frac{a_{-m_k+1}}{(z-z_k)^{m_k}} - \dots$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m_k \cancel{(z-z_0)^{-m_k}}\left(a_{-m_k}\frac{1}{z-z_k} + b_{-m_k+1} + \dots \text{ pos. potenser}\right)}{\cancel{(z-z_k)^{-m_k}}\left(a_{-m_k} + a_{-m_k+1}(z-z_k) + \dots \text{ pos. potenser}\right)} =$$

$$= \frac{-m_k}{z-z_k} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\overset{\neq 0}{a_{-m_k}} + b_{\dots}(z-z_k) + \dots}{\underset{\neq 0}{a_{-m_k}} + \dots \text{ pos. potenser av } (z-z_k)}}}_{\varphi(z)}$$

φ analytisk i en omgivning till z_k; $\varphi \neq 0$ i den omgivningen

$\varphi(z_k) = 1$

$\Rightarrow \varphi(z) = 1 + c_1(z-z_k) + \dots$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m_k}{z-z_k} \cdot 1 + \frac{-m_k}{z-z_k} \cdot c_1(z-z_k) + \dots$$

$\Rightarrow z_k$ enkelpol till $\frac{f'}{f}$

$\operatorname{Res}_{z_k} \frac{f'}{f} = -m_k$ (polens ordning för f)

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{\substack{\text{nollst. till } f\\ \text{innanför } \gamma}} \text{nollställenas multiplicitet} - \sum_{\substack{\text{nollst. till } f\\ \text{innanför } \gamma}} \text{polernas ordning} = N - P$$

Den logaritmiska indikatorn används i argumentpricipen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z) (= N - P)$$

Ex. f analytisk (d.v.s inga poler, $P=0$)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z)}_{\substack{=\text{antalet varv}\\ f \text{ går runt } 0\\ \text{när } z \text{ genomlöper } \gamma}} = N = \text{antalet nollställen innanför } \gamma$$

Ex. tillämpning av Rouchés sats

Vi har följande polynom

$z^8 - z^3 + 5z + 2 = 0$

Hur många rötter ligger i:

(1) $\{|z|<1\}$, $5z$ dominant på $|z|=1$.

Sätt $f(z) = -5z$

$g(z) = z^8 - z^3 + 5z + 2$

Vi har då

$|f(z)| = |-5z| = 5$

$|f(z)+g(z)| = |z^8 - z^3 \cancel{+5z} + 2 \cancel{-5z}| \overset{\text{triangel.}}{\leq} |z^8| + |z^3| + |2| = 4 < 5$ på $\{|z|=1\}$

Enligt Rouchés sats har $g(z)$ lika många nollställen som $f(z)$ i $\{|z|<1\}$, d.v.s ett.

(2) $\{|z|<2\}$, $\gamma = \{|z|=2\}$

dominant term blir då z^8, vilket ger att vi istället sätter

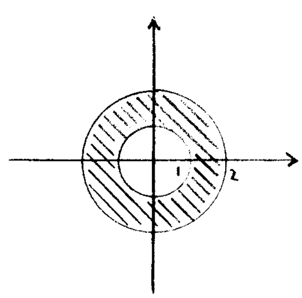
$f(z) = -z^8$, $|f(z)| = |-z^8| = 2^8 = 256$

$g(z)$ samma som i (1)

$|f(z)+g(z)| = |-z^3 + 5z + 2| \leq |z^3| + |5z| + |2| = 8 + 10 + 2 = 20 < 256$

$\Rightarrow g$ har åtta nollställen i $\{|z|<2\}$

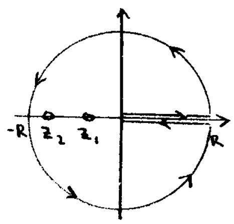
(3) Eftersom vi hade åtta nollställen i $\{|z|<2\}$ varav ett i $\{|z|<1\}$ har vi sju nollställen i $\{1<|z|<2\}$



2.6.13 (2)

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+3x+2}\,dx \qquad 0<\alpha<1 \qquad \text{låt } f(z)=\frac{z^\alpha}{z^2+3z+2}$$

Vi har nu följande snitt i planet



$\Gamma: [0,R] \cup C_R \cup \underleftarrow{[0,R]}$ där $\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

ty $\left|2\pi R \frac{R^\alpha}{R^2+3R+2}\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$0<\alpha<1$

Följande nollställen fås för nämnaren

$$\left(z+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{8}{2}=0 \Rightarrow z=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2} \Rightarrow z_1=-1=\boxed{e^{\pi i}},\quad z_2=-2=\boxed{2e^{\pi i}}$$

Vi har nu

$$\int_{[0,R]} \frac{z^\alpha}{z^2+3z+2}\,dz=\int_0^R \frac{x^\alpha}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$\operatorname*{Res}_{z_1} f(z)=2\pi i\left(\frac{z^\alpha}{(z^2+3z+2)'}\right)\Bigg|_{z=z_1}=2\pi i\left(\frac{e^{\alpha\pi i}}{2e^{\pi i}+3}\right)=2\pi i\, e^{\alpha\pi i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z_2} f(z)=2\pi i\left(\frac{z^\alpha}{2z+3}\right)\Bigg|_{z=z_2}=2\pi i\left(\frac{2e^{\alpha\pi i}}{4e^{\pi i}+3}\right)=-4\pi i\, e^{\alpha\pi i}$$

Föreläsning 18

Vi har följande två formuleringar av Rouchés sats:

(1)

γ enkel sluten
f, g analytiska på och innanför γ
$\lvert f+g\rvert < \lvert f\rvert$ på γ
$\Rightarrow$ f, g har lika många nollställen innanför γ

(2)

$\lvert g\rvert < \lvert f\rvert$ på $\gamma \longrightarrow \lvert f\rvert > \lvert g\rvert$
g kan uppfattas som en störning
$\left.\begin{matrix} f \\ f+g \end{matrix}\right\}$ beter sig likadant i avseende på nollställen.
$\Rightarrow$ $f, f+g$ har lika många nollställen innanför γ

Betrakta (2)

$$|g| < |f_1|$$

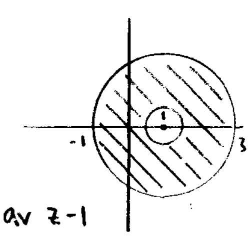
$$\Rightarrow f_1 = f_1 + g_1 \ldots$$

$$f = f_1, \quad f + g_1 = g \;\Big|\; g_1 = g - f$$

3.1.15

Vi skall bestämma antalet rötter i $\{\frac{1}{2} < |z-1| < 2\}$ av polynomet

$$\underbrace{4z^3 - 12z^2 + 2z + 10}_{P(z)} = 0$$



Detta kan göras genom: triangelolikheten

eller : utveckla i potenser av $z-1$

I det senare alternativet har vi:

1) Substitution, $w = z-1$, $z = w+1$

2) Taylorutveckling kring punkten 1 (Taylors formel exakt för polynom)

Vi väljer att Taylorutveckla polynomet kring 1:

$$P(z)=P(1)+P'(1)(z-1)+\frac{P''(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{P'''(1)}{3!}(z-1)^3=$$

$$=4-10(z-1)+4(z-1)^3$$ dominant term på $|z-1|=2$

$p'(z)=12z^2-24z+2$

$p''(z)=24z-24$

$p'''(z)=24$

Vi har nu

$|f|=32$ på $\{|z-1|=2\}$

$|g|\le 4+10\cdot 2=24$ på $\{|z-1|=2\}$, $24<32$

$\Rightarrow$ f och $f+g$ har lika många nollställen i $\{|z-1|<2\}$, dvs 3 st

Om vi har

$|z-1|=\frac{1}{2}$

dominant $f=-10(z-1)$

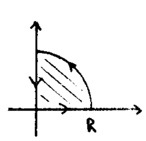
$|f|=10\cdot\frac{1}{2}=5$ på $\{|z-1|=\frac{1}{2}\}$

$|g|=|4+4(z-1)^3|\le 4+\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{8}\,2}<5$ på $\{|z-1|=\frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow$ f och $f+g$ har lika många nollställen i $\{|z-1|<\frac{1}{2}\}$, d.v.s ett

$\Rightarrow$ $P(z)$ har 2 nollställen i $\{\frac{1}{2}<|z-1|<2\}$

$f(z)$ (ofta polynom)



antal nollställen i I:a kv.

R så stort att inga nollställen finns utanför

$f(x)$, $0\le x\le R$

$f(iy)$, $0\le y\le R$

$f(Re^{i\theta})$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

Stabilitet: (differentialekvationer
differensekvationer)

data: det givna (tex yttre kraft, begynnelseläge)

stabilitet: Liten ändring i data leder till liten ändring i lösningen.

$y^{(n)} + \ldots = f$

karakteristisk ekvation

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

$$r_0 = \alpha + \beta i$$

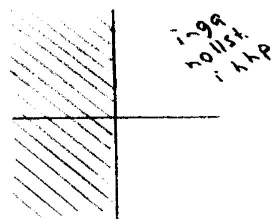
Lösningen: $t^n e^{\alpha t} \begin{Bmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{Bmatrix} \xrightarrow[t \to \infty]{?} 0$

$\Uparrow$ stabilitet

kravet för stabilitet: $\alpha < 0$

Re r_0

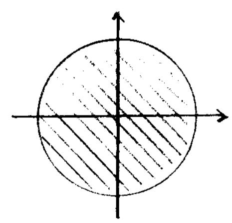
Stabilitet: Re (rötterna) < 0



Differensekvationer:

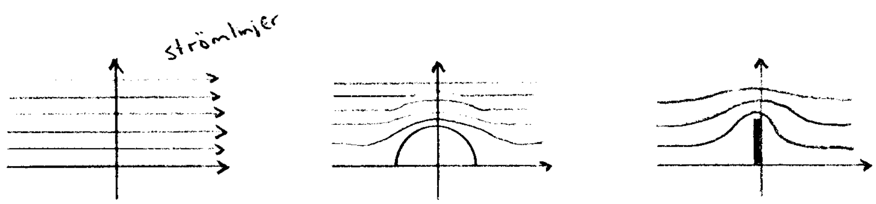
$$n^{\alpha} (r_k)^n \xrightarrow{?} 0$$

Beteendet avgörs av $(r_k)^n$, alltså då $|r_k| < 1$



Konforma avbildningar

f analytisk $\Rightarrow u$ och v harmoniska ($\Delta u = 0$, där Δ är Laplace operatorn)



(def) En konform avbildning är en avbildning som bevarar vinklar till både storlek och riktning.

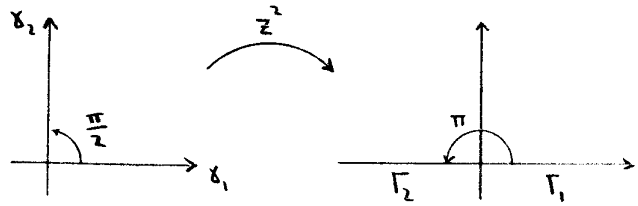
Ex. translation, rotation och skalning.

Spegling är dock inte konform utan isogonal (riktning ändras)

Ex. (derivata = 0)

$f(z) = z^2, \quad z_0 = 0$

$f'(0) = 0$



$\boxed{z = re^{i\theta}}$ $\qquad$ $\boxed{z^2 = r^2 e^{2i\theta}}$

Globalt:

$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$

f analytisk i D

$f' \neq 0$ i D

f bijektiv

$\Rightarrow f$ globalt konform från D till $f(D)$

[Funktionen $f(z) = e^z$ är ej bijektiv ty $f'(z) = e^z \neq 0$]

Vi har följande olika situationer för problem

$U \xrightarrow{f} V$

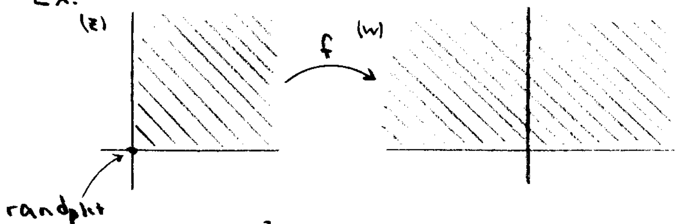
$U \xrightarrow{f} \,?$

$? \xrightarrow{f} V$

$U \xrightarrow{?} V$ $\Longleftarrow$ Mest intressant

V: oftast öhp eller enhetsskivan (öppna mängder: områden)

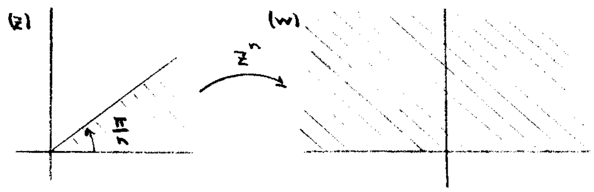
Ex.

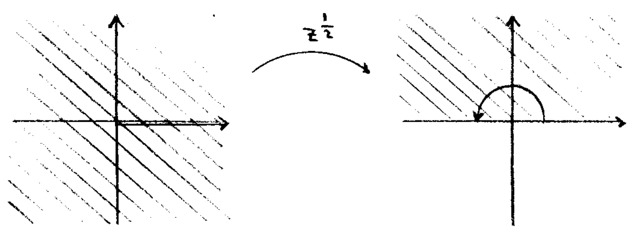


$f(z) = z^2$

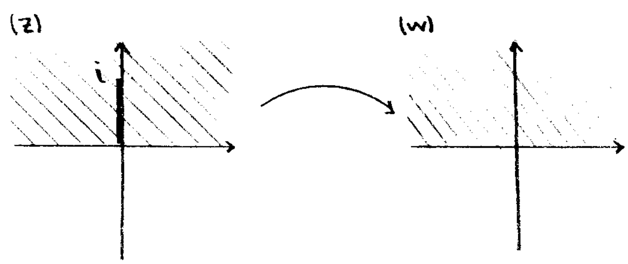
För att generalisera detta betraktar vi

$f(z) = z^n$, i origo n-dubblas vinkeln



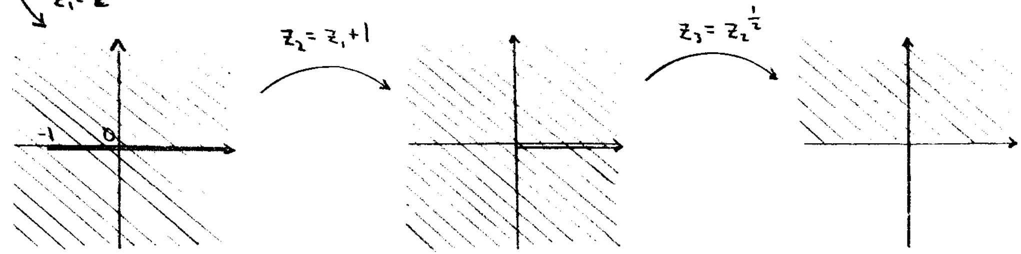


$0 < \theta < 2\pi$ $\qquad$ $0 < \frac{1}{2}\theta < \pi$



$\{z = x + iy : y > 0\} \setminus \{x = 0,\ 0 < y \leq i\}$

$z_1 = z^2$



Alltså får vi slutligen $w = (z^2+1)^{\frac{1}{2}}$, obs ingen entydighet.

Vi har nu diskuterat avbildningar av typen

$z^n,\ z^{\frac{1}{n}},\ z^{m/n}$

$z+b$

$az = \underset{\substack{\text{skalning}\\ \text{konstant}}}{\rho}\, e^{\overset{\text{rotation}}{i\varphi}} \cdot z\ , \quad a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$

<u>Möbiusavbildningar</u>

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \qquad ad \neq bc$

$\exists T^{-1}$ som också är Möbiusavbildning.

$T'(z) \neq 0$ för $ad-bc \neq 0$

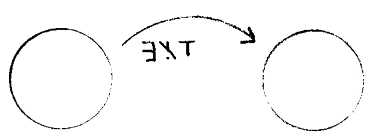
$\Rightarrow$ Möbiusavbildningar är konforma avbildningar; även globalt.

"cirklar" $\longrightarrow$ "cirklar"

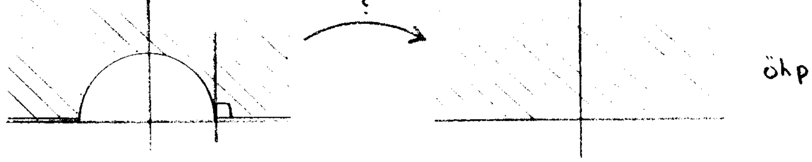
"cirklar" består av:
- cirklar
- räta linjer (cirklar genom ∞)

$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\{z_1, z_2, z_3\} \xrightarrow{\exists! T} \{w_1, w_2, w_3\}$



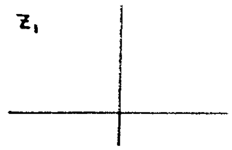
Betrakta följande exempel:



$\{z : y > 0\} \setminus \{z : |z| \leq 1\}$ $\qquad$ rät linje genom ∞

$\Rightarrow$ Om vi avbildar en skärningspunkt på ∞ så blir båda räta linjer.

z_1



Vi har

$$z_1 = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 \to \infty \\ 1 \to 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{både Re-axeln och } |z|=1 \\ \text{avbildas på räta linjer genom 0.} \end{array}$$

Detta ger oss nu möjligheten att välja mellan följande:

(1) $\{|z|=1\}$ avbildning genom att välja en tredje punkt, t.ex i

(2) <u>Använda konformiteten för skärningspunkten:</u>

Vi vet att $T(\{|z|=1\}) \perp T(Re)$ i $T(1)=0$

Detta ger alltså att $T(\{|z|=1\}) = Im$-axeln ty vinkeln bevaras

Vilken kvadrant har vi fått?

Då vi betraktar vår ursprungs bild ser vi att 0 ligger långt från området

$\Rightarrow T(0)=-1$ ligger långt från området

$\Rightarrow$ I- eller IV kvadranten

(1) välj punkt $-1+i$

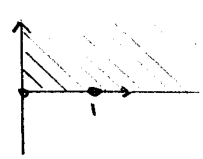
(2) konformiteten (vinkelns orientering)

Vi har

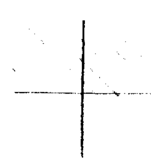
$$\Theta \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \{1, \infty, -1\}, \ (\{1, i, -1\}, \text{ moturs}) \end{cases}$$

T (området på vänster sida

$\{0, 1, \infty\}$, $T(D)$ på vänster sida $\quad \infty \xrightarrow{T} 1$



$\Rightarrow$ [I a kvadranten] $\xrightarrow{w=z_1^2}$



Alltså har vi $w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$

Föreläsning 19

Schwarz lemma

$D: \{z : |z| < 1\}$

f analytisk i D

$f(0) = 0$

$|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in D$

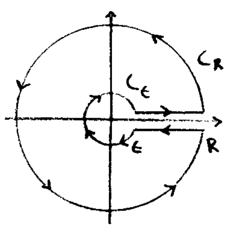
$\Rightarrow |f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D$, "=" för ngt $(z \neq 0) \Rightarrow f(z) = \lambda z$

där $|\lambda| = 1$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

2.6.14

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\,dx \qquad \text{Låt } f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^2+2z+5} \qquad z^{1/2}: \text{snitt d.v.s } 0 \leq \arg z < 2\pi$$

$\arg = 0: \; z^{1/2} = \sqrt{x} > 0$



$$\Gamma_{\epsilon,R} = C_R \cup \underset{\arg = 2\pi}{\overleftarrow{[\epsilon, R]}} \cup (-C_\epsilon) \cup \underset{\arg = 0}{[\epsilon, R]}$$

, analytisk funktion på $\Gamma_{\epsilon,R}$

analytisk innanför, utom i nämnarens nollställen, som är poler

Detta ger

$$\underbrace{\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)\,dz} = 2\pi i \sum_{z_1, z_2} \operatorname{Res} f \quad (\text{för } \epsilon \text{ tillräckligt litet, } R \text{ tillräckligt stort})$$

$$= \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz + \int_R^\epsilon \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz - \int_{C_\epsilon} \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz + \int_\epsilon^R \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz$$

? $\swarrow z \to \infty$ 0 — Ger integralen

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz \right| \leq 2\pi R \frac{\sqrt{R}}{R^2-2R-5} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz \right| \leq 2\pi \epsilon \frac{\sqrt{\epsilon}}{5-\epsilon^2-2\epsilon} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$$

Vidare har vi

$$\int_\epsilon^R \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz = \int_\epsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\,dx$$

$z = xe^{i0}$

$z^{1/2} = \sqrt{x}$

$$\int_R^\epsilon \frac{z^{1/2}}{z^2+2z+5}\,dz = -\int_\epsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\,dx = \int_\epsilon^R \cdots \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+5}\,dx$$

$z = xe^{i2\pi}$

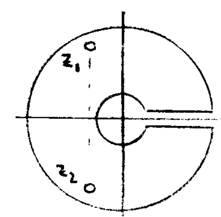
$z^{1/2} = \sqrt{x}\,e^{i\frac{2\pi}{2}} = -\sqrt{x}$

Detta ger

$$I = \pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1} f + \operatorname{Res}_{z_2} f \right)$$

För att nu beräkna residyerna söker vi nämnarens nollställen och således de singulära punkterna

$z^2+2z+5=0, \quad (z+1)^2+4=0 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} z_1 = -1+2i \\ z_2 = -1-2i \end{array}}$



$$\operatorname{Res}_{z_{1,2}} f = \frac{(z_{1,2})^{1/2}}{2z_{1,2}+2}$$ ← den valda grenen

$2z_{1,2}+2 = -2 \pm 4i + 2 = \pm 4i$

Nu betraktar vi $(z_{1,2})^{1/2}$ $\quad \left[z_{1,2}^{1/2} = a+bi \Rightarrow (a+bi)^2 = -1 \pm 2i \right]$

Polär form:

$z_1 = -1+2i$ (II:a kv)

$|z_1| = \sqrt{5} \qquad |z_1^{1/2}| = \sqrt[4]{5} \qquad \frac{\pi}{2}\ \cancel{0} < \arg z_1 < \cancel{2\pi}\ \pi$

$\arg z_1 = \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) + \pi = \pi - \arctan 2$ ty arctan udda

$\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$z_1^{1/2} = \sqrt[4]{5}\, e^{i\frac{1}{2}(\pi - \arctan 2)} = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}(\pi - \arctan 2)\right) + i \sin\left(\tfrac{1}{2}(\pi - \arctan 2)\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{5}\left(\sin\left(\tfrac{1}{2}\arctan 2\right) + i\cos\left(\tfrac{1}{2}\arctan 2\right)\right)$$

$$\Big[\underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{2}\arctan 2\right)}_{\in\ \text{I:a kv}}\Big] = \underset{\substack{\sin>0\\ \text{i I kv}}}{+}\sqrt{\frac{1-\cos(\arctan 2)}{2}} = \sqrt{\frac{1-1/\sqrt{5}}{2}}$$

Bestäm alla konforma avbildningar (bijektiva) av enhetsskivan på sig själv.

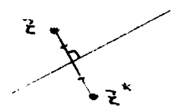
Vi har

$(\Delta) = D = \{z : |z| < 1\}$

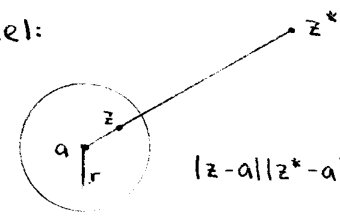
? Alla f analytiska i D, f bijektiv, $f' \neq 0$ och $f(D) = D$

Inversion (spegling i en "cirkel")

rät linje:



cirkel:

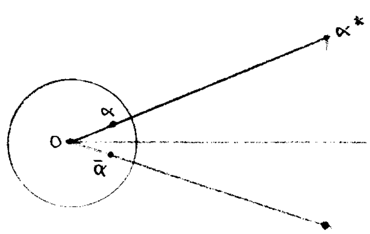


$|z-a||z^*-a| = r^2$

a, z, z^* i linje

$z, z^* \in$ samma stråle med början i a.

Möbiusavbildningar bevarar inversa punkter, d.v.s om z, z^* är inversa m.a.p γ och T är Möbiusavbildning, så är $T(z), T(z^*)$ inversa m.a.p $T(\gamma)$ och omvänt (T^{-1} också Möbiusavbildning)



$|z| = 1$ $\qquad \frac{1}{\alpha}$

$|\alpha| = 1$, α fixt

Vi har att

$|\alpha^*| = \frac{1}{|\alpha|}$, $\alpha^* = \frac{1}{\bar{\alpha}}$

För att nu finna den avbildning som avbildar enhetscirkeln på sig själv

har vi

$$\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}} \qquad \begin{matrix}\alpha & \longrightarrow & 0\\ \frac{1}{\bar{\alpha}} & \longrightarrow & \infty\end{matrix} \qquad \Rightarrow$$ bilden är cirkel med medelpkt i 0.

inversa m.a.p $|z|=1$

inversa m.a.p bilden av $|z|=1$

Vi har nu

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}\right| = \,?$$

Vi modifierar så att det blir 1

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\bar{\alpha}}}\right| = 1, \quad \alpha \in D$$ (enhetsskivan)

$$0 \longrightarrow -\alpha \in D \Rightarrow D \xrightarrow{\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}} D$$

$\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ bijektiv och konform

Rotation kring origo ändrar inte D

$\Rightarrow e^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$ konform (bijektiv) avbildning $D \to D$

$\alpha \in D$, godtycklig

$\varphi \in \mathbb{R}$, godtycklig

Sats

Alla konforma (bijektiva) avbildningar av enhetscirkeln, D

på sig själv är av formen

$$e^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right), \quad |\alpha|<1, \quad \varphi\in\mathbb{R}$$

Bevis

Återstår att visa "alla"

Låt $f: D\to D$ konform

$$? \ \exists\alpha\in D, \varphi\in\mathbb{R} \text{ s.a } f(z)=e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

$$\begin{array}{ccc} f: D & \to & D \\ \Psi & & \Psi \\ f(0) & = & \alpha \end{array}$$

Låt nu $T(z)=\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

Låt $g(z)=(T\circ f)(z)=T(f(z))=\dfrac{f(z)-\alpha}{1-\bar{\alpha}f(z)}$; g analytisk

$$g(0)=\frac{f(0)-\alpha}{1-\bar{\alpha}f(0)}=0 \quad \text{ty } f(0)=\alpha$$

$|g(z)|\leq 1$ ty $|f(\cdot)|<1$ i D, $f: D\to D$

$|T(\cdot)|<1$ i D, $T: D\to D$

$\Rightarrow |g(z)|\leq|z|$ enligt Schwarz lemma

Detsamma gäller g^{-1} (g bijektiv ty T, f bijektiva)

$g: D\to D$ bijektiv

$\Rightarrow \exists g^{-1}: D\to D$; $g(0)=0 \Rightarrow g^{-1}(0)=0$

g^{-1} analytisk (ty T, f inverterbara, analytiska, $T', f'\neq 0$)

$\Rightarrow \underbrace{|g^{-1}(z)|}_{=z}\leq\underbrace{|z|}_{=g(z)}$ enligt Schwarz lemma

$\Rightarrow |z|\leq|g(z)|$ i D $\Rightarrow |g(z)|=|z|$ i D

$\Rightarrow g(z)=\lambda z$ där $|\lambda|=1$, dvs $\lambda=e^{i\varphi}$

Detta ger nu att

$$g(z) = e^{i\varphi} z = \frac{f(z)-\alpha}{1-\bar{\alpha} f(z)}$$

Vi löser ut $f(z)$

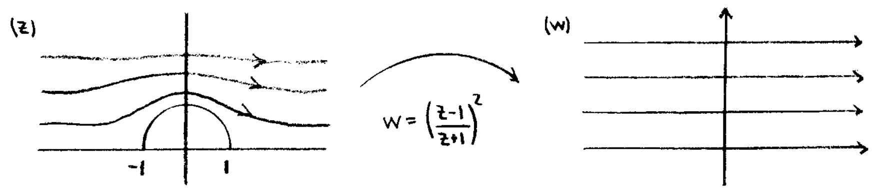
$$e^{i\varphi} z - e^{i\varphi} \bar{\alpha} f(z) = f(z) - \alpha$$

$$e^{i\varphi} z + \alpha = (1 + e^{i\varphi} \bar{\alpha} z) f(z)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{e^{i\varphi} z - \alpha}{1 + e^{i\varphi} \bar{\alpha} z} = e^{i\varphi}\left(\frac{z - \overbrace{(-e^{-i\varphi}\alpha)}^{\beta}}{1 - \underbrace{(-e^{i\varphi}\bar{\alpha})}_{\bar{\beta}} z}\right) = e^{i\varphi}\left(\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta} z}\right)$$

Föreläsning 20

Betrakta följande avbildning



Strömlinjer i w-planet

$$v = \operatorname{Im} w = \text{const}$$

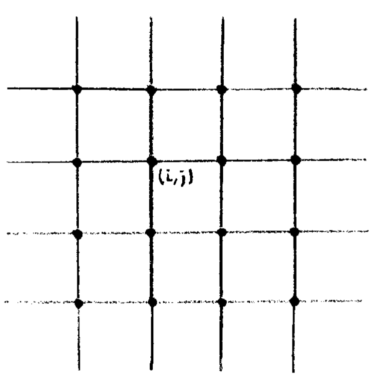
$$v = \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = \operatorname{Im}\left(\frac{x+iy-1}{x+iy+1}\right)^2 = \operatorname{Im}\left(\frac{(x+iy-1)(x+iy-1)}{(x+1)^2+y^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\operatorname{Im}(x^2-1+2yi+y^2)^2}{((x+1)^2+y^2)^2} = \frac{4y(x^2+y^2-1)}{((x+1)^2+y^2)^2} \equiv \text{const}$$

strömlinjer i z-planet

Andra ordningens PDE: tre typer

$$\begin{cases} \text{elliptiska}, & \Delta u = f \quad \text{Laplace ekvation} \\ \text{hyperboliska}, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{vågekvaktionen} \\ \text{paraboliska}, & \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{värmeledningsekvationen} \end{cases}$$



$$u_i' \approx \frac{u(i+1)-u(i)}{h}$$

$$\Delta u \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0$$

(Taylorutveckla kring i,j)

där $u_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}$ jämvikt

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

Dirichlets problem för Δ:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

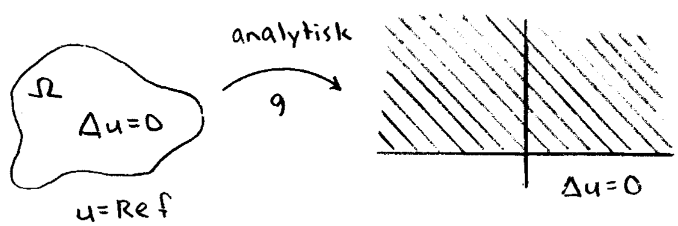
Explicita formler: $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

Ω cirkelskiva (Poissons integralkärna)

Ω öhp

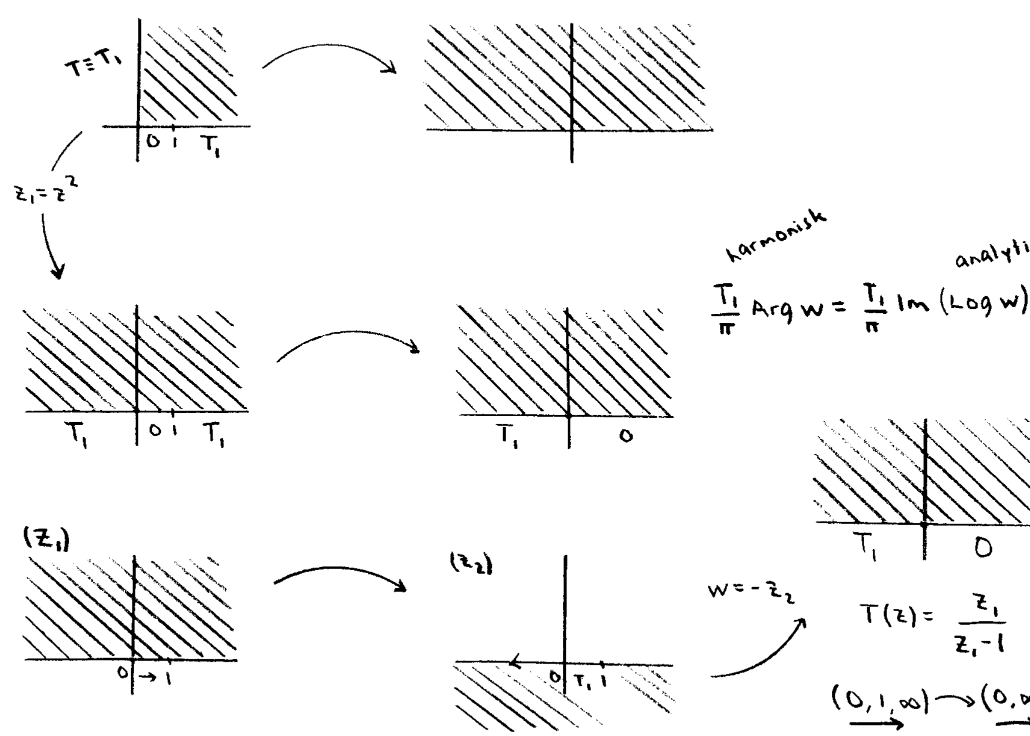
Idé: Avbilda Ω konformt på öhp (eller enhetsskivan) och lösa problemet där.

$\Delta u = 0$ (harmoniska funktioner)



Sammansättningar av analytiska funktioner är analytiska $\Rightarrow \mathrm{Re}(\ldots)$ harmonisk

4.4.7'



harmonisk $\qquad$ analytisk

$$\frac{T_1}{\pi} \operatorname{Arg} w = \frac{T_1}{\pi} \operatorname{Im}(\operatorname{Log} w)$$

$$T(z) = \frac{z_1}{z_1 - 1}$$

$$(\underrightarrow{0, 1, \infty}) \to (\underrightarrow{0, \infty, 1})$$

Vi får följande lösning i w-planet

$\frac{T_1}{\pi}$ Arg w

$w = u + iv$

Vi har

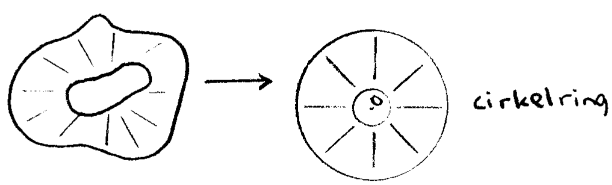
$\operatorname{arccot} \frac{u}{\underset{\neq 0}{v}} \in (0, \pi)$ ty öhp öppet

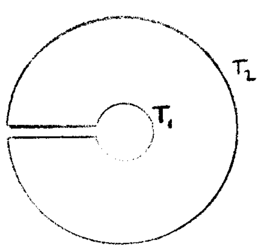
$\Rightarrow$ Lösningen är $\frac{T_1}{\pi} \operatorname{arccot} \dfrac{\operatorname{Re}\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)}$

Riemanns sats

Alla enkelt sammanhängande områden är konformt ekvivalenta med enhetsskivan (och därmed med öhp)

Fallet med dubbelt sammanhängande områden



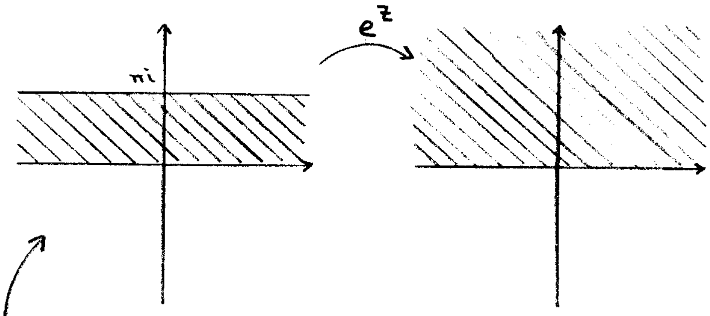


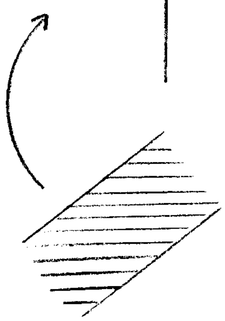
$\Delta u = 0$

$\ln|z| = \operatorname{Re}(\log z)$ (skarva två)

$A \ln|z| + B$ s.a man får randvärdena

z^{α}, Möbiusavbildningar





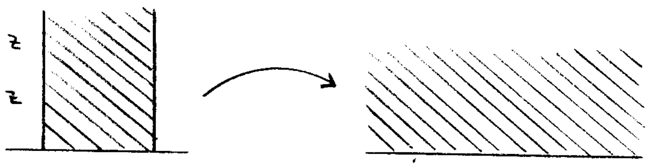
rotera, translatera, skala om

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

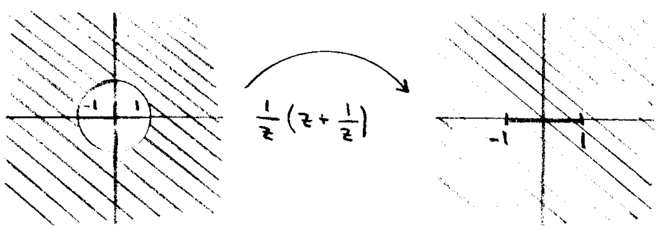
$$\left.\begin{array}{l} -\infty < x < \infty \Rightarrow e^x \in (0,\infty) \\ 0 < y < \pi \end{array}\right\} \text{öhp}$$

sin z

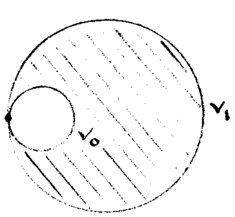
cos z



Zhukovskis avbildning



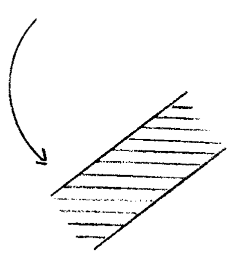
4.4.9



$$\Delta u = 0$$

$$u\big|_{\gamma_0} = v_0$$

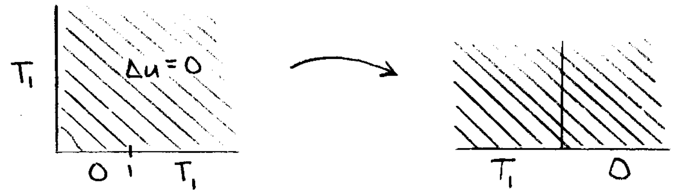
$$u\big|_{\gamma_1} = v_1$$



band

Föreläsning 21

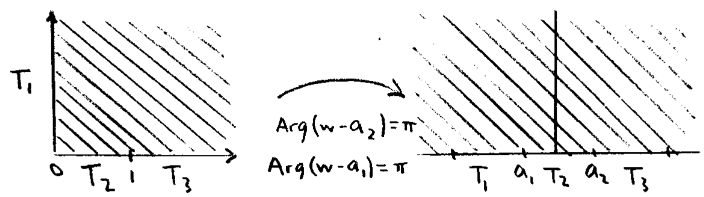
4.4.7'



$A \operatorname{Arg} w + B$

Vi gör ytterligare modifiering

4.4.7''



$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} c_j \underbrace{\operatorname{Arg}(w-a_j)}_{\text{harmonisk i öhp}} + B}_{\text{harmonisk i öhp}}$$

Fourier, Laplace och Z-transformer

Fourier och Laplacetransformer tillämpas för att lösa differential- och differensekvationer.

Z-transform är en diskret variant av Laplacetransformen.

Vi har

$$\underbrace{(e^{\lambda x})'}_{\text{derivata}} = \underbrace{\lambda e^{\lambda x}}_{\text{multiplikation}} \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j x}\right)' = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j e^{\lambda_j x}$$

Tanken är då att vi har

$$\int f(x) e^{\lambda x} dx$$

vi vill transformera s.a

derivatan $\longrightarrow$ multiplikation

DE $\longrightarrow$ algebraisk ekvation

lös

transformera tillbaka

(def) **Fouriertransform**

$f \in$ klass av funktioner

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$$

$$\hat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f'(x)\,dx \overset{p.i}{=} \underbrace{\left[e^{-ix\xi} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{0 \text{ " } f \to 0,\ x \to \pm\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\xi) e^{-ix\xi} f(x)\,dx =$$

$$= i\xi \hat{f}(\xi) \qquad |e^{-ix\xi}| = 1$$

$\mathcal{F}$ linjär

$$\mathcal{F}(f+g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}(f(x)+g(x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x)\,dx =$$

$$= \mathcal{F}(f)(\xi) + \mathcal{F}(g)(\xi)$$

Vi har för koefficienter

$$\mathcal{F}(af)(\xi) = a\,\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Lämplig för DE som är linjära med konstanta koefficienter.

Ex.

$$u'' + u = f \xrightarrow{\mathcal{F}} (i\xi)^2\hat{u} + \hat{u} = \hat{f}$$

Som har lösningen

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{1-\xi^2}$$

Vi transformerar tillbaka $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$ $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(\xi)\,d\xi$

$$f' \xrightarrow{\mathcal{F}} \approx \xi\hat{f}$$

$$\approx x\,g(x) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} g'(\xi)$$

$x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

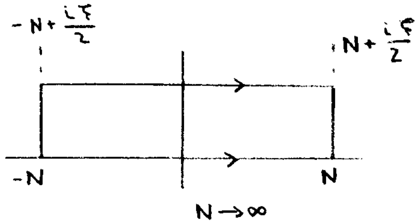
Lämpligt för rumsvariabler

Ex $\widehat{e^{-x^2}} = ?$

Vi har

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+ix\xi)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{1}{2}i\xi)^2} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4}} dx =$$

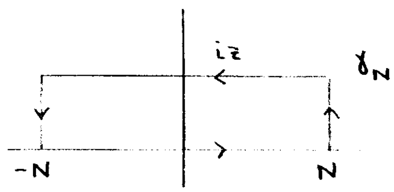
$$= e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{1}{2}i\xi)^2} dx = \begin{bmatrix} t = x+\frac{1}{2}i\xi \\ dt = dx \end{bmatrix} = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty+\frac{i\xi}{2}}^{\infty+\frac{i\xi}{2}} e^{-t^2} dt$$



Variabelsubstitution:

$\underbrace{\text{byte av kontur}}_{\text{Cauchys sats}}$

$f(z) = e^{-z^2}$ analytisk i $\mathbb{C}$



$\int_{\gamma_N} f(z)dz = 0$ enl. Cauchys sats

$$\int_{-N}^{N} e^{-z^2} dz = \int_{\text{Kortsida 1}} + \int_{N+ia} + \int_{\text{Kortsida 2}}$$

För integralerna har vi

Kortsida 1:

$z = N + iy \quad 0 \leq y \leq a$

$$\left| \int_{\text{Kortsida 1}} \right| = \left| \int_0^a e^{-(N+iy)^2} i\,dy \right| = \left| \int_0^a e^{-N^2} \cdot e^{-2Niy} \cdot e^{y^2} dy \right| \leq$$

$$\leq e^{-N^2} \cdot 1 \cdot e^{a^2} \cdot a \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Vi har

$$\widehat{e^{-x^2}}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

Laplacetransform (Analysera problem som är tidsberoende)

ODE och PDE

def $f \in$ klass av funktioner

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \quad \text{där } s \in \mathbb{C},\ t \text{ tidsvariabel (typiskt)}$$

Laplacetransformen har två grundläggande egenskaper

- Linearitet (som för Fourier)

$$(\mathcal{L}f')(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt \overset{p.i}{=} \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}\,dt =$$

$$= \boxed{s(\mathcal{L}(f))(s) - f(0) = (\mathcal{L}f')(s)}$$

om $e^{-st}f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Som övning ombedes läsaren att härleda $(\mathcal{L}f'')(s)$

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-(\mathrm{Re}\,s)t}\underline{\underline{|f|}}$$

f får inte växa snabbare

än exp. funktionen

$\Rightarrow f$ får som mest vara av

s.k. exponentiell typ.

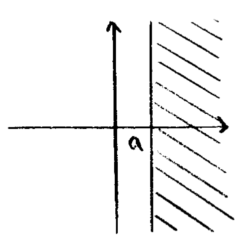
Klass av tillåtna funktioner:

f s.a $|f(t)| \le Ce^{at}$ (*)

Vi återgår till

$$\underbrace{|e^{-st}f(t)|}_{\le e^{-(\mathrm{Re}\,s)t}\cdot e^{at} = e^{\overbrace{-(\mathrm{Re}\,s-a)}^{0}t} \to 0} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \mathrm{Re}\,s > a$$

Vi har nu att för f av typen (*) är $\mathcal{L}(f)$ väldefinierad i $\{\mathrm{Re}\,s > a\}$



man kan derivera under $\int$

$\mathcal{L}(f)$ analytisk funktion i $\{\mathrm{Re}\,s > a\}$

Föreläsning 22

Vi har

$|f(t)| \leq Ce^{at}$ funktion av exponentiell typ

$f \equiv 0$ för $t<0$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Vi har följande beteckningar

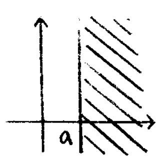
$f \supset \mathcal{L}f$

original bild

$u(t) \supset U(s)$

Om $f(t)$ av exponentiell typ gäller alltså

$\mathrm{Re}\, s > a$



$\mathcal{L}f$ analytisk funktion i halvplanet $\{\mathrm{Re}\, s > a\}$

$\mathcal{L}$ linjär, d.v.s $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$

Vi har även

derivata $\supset$ multiplikation

$\mathcal{L}(f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0)$

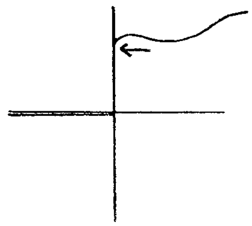
För f:s n:te derivata har vi

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = (\mathcal{L}(f^{(n-1)})')(s) = s(\mathcal{L}f^{(n-1)})(s) - f^{(n-1)}(0) =$$

$$= s(s(\mathcal{L}(f^{(n-2)}))(s) - f^{(n-2)}(0) = \ldots = s^n(\mathcal{L}f)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots$$

$$\ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Vad är $f(0), f'(0), \ldots$?



$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(k)}(t) \quad , \quad t > 0$$

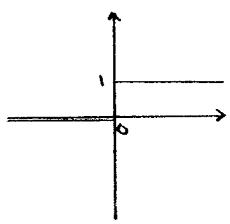
där t representerar tid

Då vi har begynnelsevärdesproblem bakas dessa in i Laplacetransformen

Betrakta nu följande funktion

Heavisides funktion

$$\theta(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



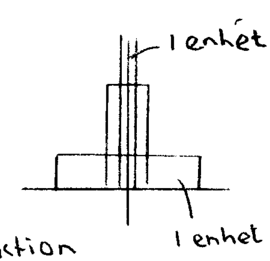
värdet i $t = 0$ saknar betydelse

Vi har Laplacetransform

$$\mathcal{L}\theta(s) = \int_0^\infty 1 e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} \quad , \quad 1 \text{ tabell: } t^n e^{ct} \quad \begin{matrix} n = 0 \\ c = 0 \end{matrix}$$

Då vi har	tolkas som
$f(t)$	$\theta(t) f(t)$
$\sin(t)$	$\theta(t)\sin(t) \quad (\equiv 0 \text{ för } t < 0)$
$\theta(t)$	stegfunktion

Diracs δ-funktion



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad : \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \qquad \text{Impulsfunktion}$$

δ är en distribution (generaliserad funktion)

$$\text{"} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \underbrace{f(t)}_{\text{trevlig funktion}} dt \text{"} \overset{\text{def}}{=} f(0)$$

g — riktig funktion: $g(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\,dt = \dots \quad \forall f \in$ klass

g — distribution: "$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\,dt$"

$t\,\delta(t) = ?$ (underförstått: hur verkar $t\,\delta(t)$ på f ?)

$$\text{"}\int_{-\infty}^{\infty} t\,\delta(t)f(t)\,dt\text{"} = \text{"}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,(t f(t))\,dt\text{"} = 0\cdot f(0) = 0 \Rightarrow t\,\delta(t) \equiv 0$$

Derivatan av δ

$$\text{"}\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)\,dt\text{"} \overset{\text{p.i.}}{=} \underbrace{[\,\delta(t)f(t)\,]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{"}0\text{"}} - \underbrace{\text{"}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f'(t)\,dt\text{"}}_{-f'(0)}$$

Vi har även

$$\langle \delta', f \rangle = -f'(0)$$

$$\langle g', f \rangle \overset{\text{def}}{=} -\langle g, f' \rangle$$

$$(\mathcal{L}\delta)(s) = \text{"}\int_{0\;\left(\substack{-\epsilon \\ -\infty}\right)}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt\text{"} = 1$$

Tenta uppgift 28/10-95

1. Lös $u'' - 2u' + u = e^t + \delta(t-1)$, $t > 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$\text{"}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t)\,dt\text{"} = \begin{bmatrix} x = t-a \\ t = x+a \end{bmatrix} = \text{"}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x+a)\,dx\text{"} = f(a)$$

def $\langle \delta(t-a), f \rangle = f(a)$

$$(\mathcal{L}(\delta(t-1))(s) = \text{"}\int_0^{\infty} \delta(t-1) e^{-st}\,dt = e^{-s} \cdot 1$$

Vi har

$$\supset s^2 U(s) - s\underbrace{u(0)}_{0} - \underbrace{u'(0)}_{1} - 2(sU(s) - \underbrace{u(0)}_{0}) + U(s) = \frac{1}{s-1} + e^{-s}$$

Efter insättning av begynnelsevillkor fås

$$(s^2 - 2s + 1) U(s) = \frac{1}{s-1} + e^{-s} + 1$$

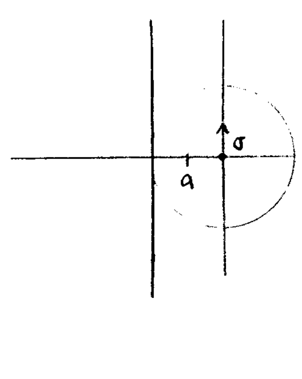
$$U(s) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} e^{-s} \subset \frac{1}{2} t^2 e^t + t e^t + \theta(t-1)(t-1) e^{t-1}$$

$$\Rightarrow \underline{u(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t + t e^t + \theta(t-1)(t-1) e^{t-1}}$$

Bromwichintegralen

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} U(s) e^{st}\,ds$$

Krav: $\sigma > a$



a konstanten från u:s exp. uppskattning

Z-transform

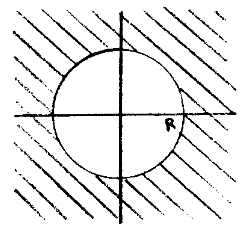
diskret Laplacetransform

$\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\} \overset{\text{def}}{\supset} a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}$ Laurentserie

funktion definierad i $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$w = \frac{1}{z} \rightsquigarrow$ potensserie $a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots$

som är konvergent i $\underbrace{|w|}_{\frac{1}{z}} < R^{-1}$



$\Rightarrow$ Laurentserien konvergent $\{|z| > R\}$

$f(n) \supset F(z) \qquad |z| > R, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Z-transformen är linjär

$$\alpha f(n) + g(n) \supset \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha f(k) + g(k)}{z^k} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(k)}{z^k}$$

$f(n+1) \supset z F(z) - z f(0)$

Vi härleder detta

$$zF(z) = zf(0) + \frac{\cancel{z} f(1)}{\cancel{z}} + \frac{\cancel{z} f(2)}{z^{\cancel{2}}} + \ldots$$

$$zF(z) - zf(0) = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \ldots = \mathcal{Z}\left(f(n+1)\right)$$

Invertera Z-transformen?

$? \supset F(z)$ Laurentutveckla i $\{|z| > R\}$

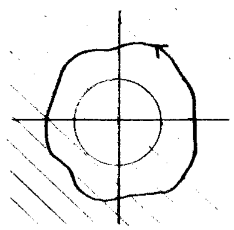
där R är beloppet av F:s "största" singularitet

Vi har

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

$$f(n) = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(z)}{(z-0)^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) z^{n-1} dz$$

formler för Laurentseriens koefficienter.



Föreläsning 23

Inversen till Laplacetransformen

$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\xi)$

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$

$f(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z)$

[Summering av konstaterade resultat]

$f' \longrightarrow$ produkt

$f(n+1) \approx \xi \hat{f}$

$\approx z F(z)$

DE $\longrightarrow$ algebraisk ekv.

lösa

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

$(\mathbb{R}^n)$ bijektion $(\mathbb{R}^n)$

Om $\mathcal{L}f = F$, så ges $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st} ds$

Givet F finns det $f: \mathcal{L}f = F$?

(när man löser: Om $\exists$ en lösning som kan transformeras, så uppfyller den...)

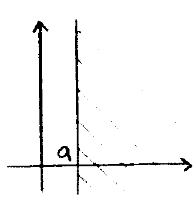
$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$

krav: f måste vara av exponentiell typ, d.v.s

$\exists a, C: \ |f(t)| \leq Ce^{at}, \ \forall t \geq 0$

($f \equiv 0$ för $t < 0$)

$\Rightarrow \exists \mathcal{L}f$, $F(s) = (\mathcal{L}f)(s)$ analytisk för $\operatorname{Re} s > a$

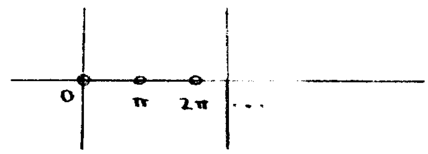


Om F ej är analytisk i $\operatorname{Re} s > a$ för något $\underline{\underline{a}}$, så

$\nexists f$ av exponentiell typ: $\mathcal{L} f = F$

Ex

$$F(s) = \frac{1}{\sin s}$$



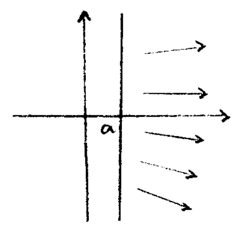
ej $\mathcal{L} f$ för något tillåtet f.

Sats

$\exists a, C: \quad |f(t)| \leq C e^{at}, \quad \forall t \geq 0$

$F = \mathcal{L} f$

$$\Rightarrow F(s) \underset{\operatorname{Re} s \to \infty}{\longrightarrow} 0$$



Bevis

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| |e^{-st}| dt \leq C \int_0^\infty e^{at} e^{-\operatorname{Re} s \cdot t} dt =$$

$$= C \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Re} s - a)t} dt = C \left[-\frac{1}{\operatorname{Re} s - a} e^{-(\operatorname{Re} s - a)t} \right]_0^\infty = \frac{C}{\operatorname{Re} s - a} \underset{\operatorname{Re} s \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Om $F \underset{\operatorname{Re} s \to \infty}{\not\to} 0$, så $\nexists f$ av exponentiell typ s.a. $\mathcal{L} f = F$

Men: $\mathcal{L} \delta = 1 \not\to 0$

1 ej $\mathcal{L}$ av någon funktion i klassisk mening, men 1 är $\mathcal{L}$ av en distribution (δ)