Komplex bevislista

Edvin Davidsson
Teknisk Matematik, Chalmers

Innehåll

1 Uppskattningar för kurvintegraler

Antag att

- $\gamma \in \mathbb{C}$ är en $\mathbb{C}^1$ kurva.
- $f(z) \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$

Då gäller att

$$\left| \int_\gamma f dz \right| \leq \max_\gamma |f| \, |\gamma|$$

Bevis

$$\left| \int_\gamma f dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma} dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\dot{\gamma}| \, dt \leq \max_\gamma |f| \int_a^b |\dot{\gamma}| \, dt$$
$$\leq \max_\gamma |f| \, |\gamma|$$

Detta upprepas för varje kurvstycke.$\blacksquare$ ($|\gamma|$ är längden av γ)

2 Cauchy-Riemanns ekvationer (NV för analyticitet)

Antag att

- $f = u + iv \in \mathcal{A}(D)$, där $u, v \in \mathbb{R}$ & D är ett område.

Då gäller att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Bevis

F är analytisk och där med komplext deriverbar $\Rightarrow \exists f'(z_0)$, tag $h \in \mathbb{R}$.

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \right] =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Tag nu istället $h = ik, k \in \mathbb{R}$.

$$f'(z_0) = \lim_{k \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + k) - u(x_0, y_0)}{ik} + i \frac{v(x_0, y_0 + k) - v(x_0, y_0)}{ik} \right] =$$

$$= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Sätt samman dessa likheter.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = 1/i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

jämför realdelar och imaginär delar för att se likheten$\blacksquare$

3 Cauchy-Riemanns ekvationer (TV för analyticitet)

Antag att

- $f : D \to \mathbb{C}$,D område
- $f = u + iv$ där $u, v \in \mathcal{C}^1(D)$ & uppfyller CR

Då gäller

$$f \in \mathcal{A}(D) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Bevis

Sätt $h = \sigma + i\tau$.
F har kontinuerliga partiella derivator $\Rightarrow f(z_0+h) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma + \frac{\partial f}{\partial y}\tau + O(h^2)$
C.R: $-i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\sigma + i\frac{\partial f}{\partial y}\tau + O(h^2) = \frac{\partial f}{\partial x}h + O(h^2)$$

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + O(h)$$

$$\because \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) existerar\blacksquare$$

4 Cauchys sats

Antag att

- γ är en enkelt sluten (styckvis) $\mathcal{C}^1 \in \mathbb{C}$.
- D är ett område s.a. $\gamma \cup inre(\gamma) \subset D$
- $f \in \mathcal{A}(D)$

Då gäller att

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Bevis

Tag nu ett område $E \subset D$ s.a. $\partial E = \gamma$ Då ger Green's formel att:

$$\int_\gamma f(z)dz = i \iint_E \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dxdy$$

Eftersom $f = u + iv \in \mathcal{A}(E)$ uppfyller u & v CR.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left[\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] =$$

$$= 0 + i * 0 = 0. \blacksquare$$

5 Moreras sats

Antag att

- D område : $f : D \to \mathbb{C}$.
- f kontinuerlig i D.
- $\int_T f(z)dz = 0 \ \forall T \in D$, T är en triangel.

Då gäller att

$$f \in \mathcal{A}(D)$$

Bevis

Antag att D är en cirkelskiva. Tag $z_0, z \in D$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

där jag integrerar över en linje mellan z_0 & z.

Påstående

$F \in \mathcal{A}(D)$ & $F' = f$. $\Rightarrow$ Moreras sats: $F \in \mathcal{A}(D) \Rightarrow F' \in \mathcal{A}(D)$.

Bevis av Påstående

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{\int_{z_0}^{z+h} f(w)dw - \int_{z_0}^{z} f(w)dw}{h} =$$

där punkterna z_0, z & $z+h$ bildar en Triangel i D. Viket enlight antagande 3 ger. $\int_{z_0}^{z+h} = \int_{z_0}^{z} + \int_{z}^{z+h}$.

$$= \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} f(w)dw$$

$$\left| \frac{F(Z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} f(w)dw - \frac{1}{h} \int_{z}^{z} f(z)dw \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \max_{\gamma} |f(w) - f(z)| * |\gamma| \leq \max_{\gamma} |f(w) - f(z)| \underset{h \to 0}{\to} 0$$

Ty f kontinuerlig. Där γ är en linje mellan z & z+h.$\blacksquare$

6 Cauchys integralformel

Antag att

- D är ett område.
- $f \in \mathcal{A}(D)$.
- γ enkel sluten styckvis-$\mathcal{C}^1$ kurva med positiv orientering.
- $\gamma \cup inre(\gamma) \subseteq D$.

Då gäller att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Bevis

Låt $\gamma_\delta = \{|\xi - z| = \delta\}$ positivt orienterad. Cauchys integralsats mellan γ & γ_δ ger

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \because \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Alltså området utan singulära punkter ger inget bidrag. Problemet har reduceras till att undersöka om bidraget från den mycket lilla cirkeln runt z är f(z).

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\gamma_\delta} \left[\frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} \right] |\gamma_\delta| \underset{\delta \to 0}{\to} 0 \blacksquare$$

7 Liouvilles sats

Antag att

- f är hel & bergänsad ($\exists M : |f(z)| \leq M \forall z.$)

Då gäller att

$$f \equiv konstant$$

Bevis

Säg $\frac{f(z) - f(0)}{z} = g(z) \Rightarrow g(z) = \frac{1}{z} \sum_1^\infty a_n z^n = \sum_1^\infty a_n z^{n-1}$ är också en potensserie. $\because g$ hel.

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} \leq \frac{2M}{R}, |z| = R$$

$$g(z) = \{\text{Cauchys integralformel}\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

vill $g \equiv 0$.

$$|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|\zeta|=R} \frac{g(\zeta)}{|\zeta - z|} * 2\pi R \leq 2M \max_{|\zeta|=R} \frac{1}{|\zeta - z|} \leq \frac{2M}{R - |z|} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

$$\because g(z) \equiv 0 \ \& \ f(z) \equiv f(0)_{\blacksquare}$$

8 Satsen om Taylorutveckling

Antag att

- D är ett område
- $f \in \mathcal{A}(D)$
- $\{|z - z_0| \leq \ r\} \subseteq D.$

Då gäller att

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n, a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Bevis

tag z_0 $s.a.$ $|z - z_0| = s < r$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \frac{d\xi}{\xi - z_0}$$

Men $\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi - z_0}} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^\infty w^n$ ty $|w| = \frac{|z-z_0|}{|\xi - z_0|} = \frac{s}{r} < 1$

$$\because f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} f(\xi) \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \frac{d\xi}{\xi - z_0} \underset{\text{ty likformig konvergens}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} f(\xi) \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ , \ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \blacksquare$$

9 Satsen om Laurentutveckling

Antag att

- $f \in \mathcal{A}(\{z; r < |z - z_0| < R\}).(r = 0 \ \& \ R = \infty$ är tillåtet)

Då gäller att

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in \{r < |z - z_0| < R\}$$

Som även kan skrivas som

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = f_1(z) + f_2(z)$$

Bevis

Tag r_1 & R_1 s.a. $r < r_1 < |z| < R_1 < R \ \ (z_0 = 0)$.

$$\Rightarrow f(z) \underset{\text{Cauchys integralformel}}{=} \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|w| = R_1} \frac{f(w)dw}{w - z} - \int\limits_{|w| = r_1} \frac{f(w)dw}{w - z} \right) = f_1 + f_2$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = R_1} \frac{f(w)}{1 - \frac{z}{w}} \frac{dw}{w}$$

men $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{R_1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w} \right)^n$

$$\Rightarrow f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = R_1} f(w) \frac{z^n}{w^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = R_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

$$-f_2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = r_1} \frac{f(w)}{w - z} dw, \ \left[\frac{1}{-z \left(1 - \frac{w}{z}\right)}, \ \left| \frac{w}{z} \right| = \frac{r_1}{|z|} < 1 \right]$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{|w| = r_1} f(w) \frac{w^n}{z^{n+1}} dw = \sum_{-1}^{-\infty} a_n z^n, \ a_n = \int\limits_{|w| = r_1} f(w) w^{-(n-1)} dw \blacksquare$$

10 En analytisk funktions nollställen

Antag att

- $f : D \to \mathbb{C}$.
- $f \in \mathcal{A}(D)$.
- $z_0 \in D,\ f(z_0) = 0$.

Då gäller att

$$\exists \varepsilon > 0 : f(z) \neq 0\ \forall z \in \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Bevis

Taylorutveckla $f(z)$ kring $z_0,\ m \geq 1$.

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + ... =$$

$$(z - z_0)^m \underbrace{(\overbrace{a_m}^{\neq 0} + a_{m+1}(z - z_0) + ...)}_{\varphi(z)}$$

$\varphi \in \mathcal{A}(\{|z - z_0| < \varepsilon\})$ & $\varphi(z_0) = a_m \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq 0$ i en omgivning till z_0 (kontinuitet). $\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^m * \underbrace{\varphi}_{\neq 0}$ i $\{|z - z_0| < \varepsilon\}$. Tag $z_1 :\ 0 < |z_1 - z_0| < \varepsilon,\ f(z_1) = \underbrace{(z_1 - z_0)^m}_{\neq 0} \underbrace{\varphi(z_1)}_{\neq 0} \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) \neq 0\ \forall z \in \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}\blacksquare$$

11 Karakterisering av singulariteter och poler

11.1 Hävbara

Definiton

f(z) är bergänsad när $z \to z_0$.

Riemanns sats

Antag att $f \in \mathcal{A}(\{0 < |z - z_0| < r\})$ & f begränsad. ($|f| \leq M$).
Då kan man definiera $f(z_0)$ s.a. $f \in \mathcal{A}(\{|z - z_0| < r\})$

Bevis

Tag $z_0 = 0$ sätt $g(z) = z^2 f(z),\ 0 < |z| < r,\ g(0) = 0,\ g \in \mathcal{A}(\{0 < |z| < r\})$

$$g'(0) \underbrace{=}_{Def.} \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} h f(h) \underbrace{=}_{|f| \leq M} 0$$

$$\because g \in \mathcal{A}(\{|z| < r\}) \ \&\ g(0) = g'(0) = 0$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \overbrace{=}^{a_0 = a_1 = 0} \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = z^2 h(z),\ h = a_2 + a_3 z + ... \Rightarrow h \in \mathcal{A}(\{|z| < r\})\ (h(z) = f(z))$$

$$\because f(z) \in \mathcal{A}(\{|z| < r\}) \blacksquare$$

11.2 Isolerade singulariteter

Definiton

$|f(z)| \underset{z \to z_0}{\to} \infty.$

Påstående

Om $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty,\ \exists m > 0\ \&\ h \in \mathcal{A}(\Delta(z_0, \delta))$ s.a. $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}$
($\Delta(z_0, r)$ är en disk i z_0 med radie δ.) Då har f en pol av ordning m i z_0.

Bevis av påstående

Antag att $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ låt $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{A}(\dot{\Delta}(z, \delta),\ \delta > 0.$
$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$. Riemann $\Rightarrow g \in \mathcal{A}(\Delta(z_0, \delta)),\ g(z_0) = 0$. Säg g har nollställe av ordning m. $\Rightarrow g(z) = (z - z_0)^m k(z),\ k \in \mathcal{A}(\Delta(z_0, \delta)),\ k(z_0) \neq 0$

$$f = \frac{1}{g} = \frac{\frac{1}{k(z)}}{(z - z_0)^m} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m},\ h(z_0) \neq 0 \blacksquare$$

11.3 Väsentlig singularitet

Definiton

om f varken är varken hävbar eller isolerad singularitet så är den en väsentlig singularitet.

Exempel

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ då ser vi att $|f(x)| \to 0^+ = \infty$ men $|f(x)| \to 0^- = 0$ $x \in \mathbb{R}$.

12 Beräkning av residyer

antag att

- f har en pol av ordning m i z_0.
- $f \in \mathcal{A}(D)$, D är ett område.

Då gäller att

$$Res(f; z_0) = c_{m-1} = \frac{H^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

om m=1 & $f = \frac{F}{G}$.

$$Res(f; z_0) = \frac{F(z_0)}{G'(z_0)}$$

Bevis

Om f har en pol av ordning m att det finns en funktion $H \in \mathcal{A}(\{|z - z_0| < r\}$ för ett litet r, s.a.

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{h(z)} = \frac{H(z)}{(z - z_0)^m}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \ |z - z_0| < r \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{z - z_0} + c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \cdots .$$

Cauchys sats säger att $j \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=s} (z-z_0)^j dz = \begin{cases} 1 & if \ j=-1 \\ 0 & if \ j \neq -1 \end{cases}$$

Alltså beräknas Residy enligt:

$$Res(f;z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0|=s} f(\xi) d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-m}^{\infty} \int\limits_{|\xi - z_0|=s} c_{k+m}(\xi - z_0)^k d\xi = c_{m-1} = \frac{H^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Vilket också kan skrivas på formen

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z))$$

Och i special fallet m=1 ger att $f = \frac{F}{G}$ där $G(z_0) = 0,\ \&\ G'(z_0) \neq 0$.

$$\Rightarrow Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{F}{G} = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z)}{\frac{G(z)-G(z_0)}{(z-z_0)}} = \frac{F(z_0)}{G'(z_0)} \blacksquare$$

13 Argumentprincipen

Antag att

- $\gamma(t),\ a \leq t \leq b,\ \gamma(a) = \gamma(b)$ är en enkelt sluten kurva.
- $h \in \mathcal{A}(inre(\gamma) \setminus \{z_0, ..., z_p\}),\ z_0, .., z_p$ är poler.
- N är antalet nollställen & P antalet poler innanför γ inkl. multipliciteter till h.

Då gäller att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg h(z) = N - P$$

Bevis

Säg att h har nollställe av ordning m i z_0 dvs. $h(z) = (z-z_0)^m g(z),\ g(z_0) \neq 0$.

$$\frac{h'}{h} = \frac{m(z-z_0)^{m-1}g + (z-z_0)^m g'}{(z-z_0)^m g} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{g'}{g}$$

Om istället h har en pol av ordning m i z_0 dvs. $h(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},\ g(z_0) \neq 0$.

$$\frac{h'}{h} = \frac{(z-z_0)^{-m}g' - m(z-z_0)^{-m-1}g}{(z-z_0)^{-m}g} = \frac{-m}{z-z_0} + \frac{g'}{g}$$

$\because$ Nollställe av ordning m i $z_0 \Rightarrow Res(\frac{h\prime}{h}, z_0) = m$ & Pol av ordning m i $z_0 \Rightarrow Res\left(\frac{h\prime}{h}, z_0\right) = -m$. Residysatsen ger nu.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \sum_{z_j \in inre(\gamma)} Res\left(\frac{h'}{h}, z_j\right) = \sum_{noll} + \sum_{poler} = N - P$$

För sista likheten gör vi substiutionen $\frac{d}{dt}\left(\log h(\gamma(t))\right) = \frac{h'}{h}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$.

$$\because \int_\gamma \frac{h'}{h}dz = \int_a^b \frac{h'}{h}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \log h(\gamma(b)) - \log h(\gamma(a)) =$$

$$= \underbrace{\log|h(\gamma(b)| - \log|h(\gamma(a)|}_{=0,\ ty\gamma(a)=\gamma(b)} + i\left(\arg h(\gamma(b)) - \arg h(\gamma(a))\right)$$

$$\because \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg h(z) \blacksquare$$

14 Rouchés sats

Antag att

- γ är en enkel sluten kurva.
- $f, g \in \mathcal{A}(\gamma \cup inre(\gamma))$.
- $|f(z)| > |g(z)|\ \forall z \in \gamma$.

Då gäller att

f och f+g har lika många nollställen innanför γ inkl.multiplicitet.

Bevis

$|g| < |f|$ på $\gamma \Rightarrow |tg| < |f|$ på $\gamma \ \ t \in [0,1]$. Varken f eller f+tg kan ha nollställen på γ, ty antag om $f(z_0) = 0 \Rightarrow |f(z_0)| = 0 \not> |g(z_0)|$ eller om $f(z_0) + tg(z_0) = 0 \Rightarrow |f(z_0)| \underset{\not>}{=} |tg(z_0)|$. Argumentprincipen för h=f+tg ger nu:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f' + tg'}{f + tg}dz = N(t)$$

där N(t) är antalet nollställen för f+tg innan för γ. N(t) är en kontinuerlig funktion med heltals värden. $\Rightarrow N(t) \equiv const \ t \in [0,1] \Rightarrow N(0) = N(1)$. Där N(0) är antalet nollställen till f och N(1) är antalet nollställen till f+g innanför $\gamma$$\blacksquare$.

15 Algebrans fundamentalsats

Antag att

- $P(z) = \text{polynom} = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + .. + a_1 z + a_0, \ n \geq 1.$

Då gäller att

$$\exists z_0 \in \mathbb{C} \ s.a. \ p(z_0) = 0.$$

Bevis

$$|P(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \geq |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| \underset{|z|=R>>1}{\geq}$$

$$\geq R^n - |a_{n-1}R^{n-1} - \cdots - |a_0| \geq \frac{1}{2}R^n$$

Antag att $P(z) \neq 0 \ \forall z$. Sätt$f(z) = \frac{1}{P(z)} \underset{|z|>>1}{\Rightarrow} |P(Z)| \geq \frac{1}{2}R^n \because |f(z)| \leq \frac{2}{R^n}$. f kontinuerlig $\Rightarrow |f| \leq M$ om $|z| \leq R_0 \because$ f hel & bergänsad. Liouville $\Rightarrow$ f konst $\Rightarrow$ P konst (grad(P)=0)$\blacksquare$

16 Satsen om konforma avbildningar

Antag att

- $f \in \mathcal{A}(\{|z - z_0| < r\})$
- $f'(z_0) \neq 0$

Då gäller att

F är konform i z_0.

Bevis

Låt $\gamma_1 \ : \ z_1(t) \ a \leq t \leq b \ \& \ \gamma_2 \ : \ z_2(s) \ c \leq s \leq d$. vara två godtyckligt deriverabara kurvor s.a. $z_0 = z_1(t_0) = z_2(s_0)$ och $z_1'(z_0) \neq 0 \& z_2'(s_0) \neq 0$.
Låt nu $\Gamma_1 \ : \ w_1(t) = f(z_1(t)) \ a \leq t \leq b \ \& \ \Gamma_2 \ : \ w_2(s) = f(z_2(s)) \ c \leq s \leq d$.
Då f analytisk gäller att

$$\begin{cases} w_1'(t_0) = f'(z_0) z_1'(t_0) \neq 0 \\ w_2'(s_0) = f'(z_0) z_2'(s_0) \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \arg w_2'(s_0) - \arg w_1'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(s_0) - \arg f'(z_0) - \arg z_1'(t_0) = \arg z_2'(s_0) - \arg z_1'(t_0) \blacksquare$.

17 Laplacetransform av derivator

Antag att

- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ u \in \mathcal{C}^1$.
- $|u(t)^{(n)}| \leq Me^{at}, \ t > 0, \ n \geq 0$
- $Re \ s > a$

Då gäller att

$$\left(\mathscr{L} u^{(n)}\right)(s) = s^n (\mathscr{L} u)(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$$

Bevis

$$(\mathscr{L} u')(s) \underset{\text{per def.}}{=} \int_0^\infty u'(t) e^{-st} dt \underset{P.I.}{=} \left[u(t) e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt =$$
$$= -u(0) + s \mathscr{L} u(s).$$

På samma sätt fås

$$(\mathscr{L} u'')(s) \underset{\text{per def.}}{=} \int_0^\infty u''(t) e^{-st} dt \underset{P.I.}{=} \left[u(t)' e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^\infty u(t)' e^{-st} dt =$$
$$= -u(0)' + s \mathscr{L} u'(s) = -u'(t) - su(t) + s^2 \mathscr{L} u(s).$$

Genom att beräkna $\left(\mathscr{L} u^{(k)}\right)(s), \ k = 1, 2, 3, \cdots, n$ på samma sätt erhålles formeln.$\blacksquare$

18 z -transform av faltning

Definiton

om $\{a_j\}, \{b_j\}$ är serier av komplexa tal. Då är $\{a_j\} * \{b_j\} = \{c_j\}$ (faltningen) given som:

$$\{a_j\} * \{b_j\} = \{c_n\}, \ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \ n = 0, 1, 2 \cdots$$

Antag att

- $|a_j|, |b_j| \leq M r_0^j, \ M, r_0 > 0, \ j = 0, 1, 2, \cdots$
- $\{c_n\} = \{a_j\} * \{b_j\}$

Då gäller att

$$Z(\{c_n\}) = Z(\{a_j\}) Z(\{b_j\})$$

Bevis

Börja med att notera $|c_n| \leq MM'(n+1) r_0^n < M'' r^n$. Alltså är $Z(\{c_n\})$ definierad. Nu undersöker vi HL.

$$Z(\{a_j\}) Z(\{b_j\}) \underset{def.}{=} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{z^j} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \right) \underset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = Z(\{c_n\})$$

* kommer från satsen om multiplication av potensserier.$\blacksquare$.

19 Theorem on Shifting

Antag att

- $\{a_j\}$ är en serie av komplexa tal. som uppfyller $|a_j| \leq M r_0^j, \ M, r_0 > 0, \ j = 0, 1, 2, \cdots$.
- Att serien $\{b_j\}$ bestämms av $b_j = a_{j+1}, \ j = 0, 1, 2. \cdots$.

Då gäller att

$$Z(\{b_j\}) = z\,[Z(\{a_j\}) - a_0]$$

mer generelt ($b_j = a_{j+N},\ N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

$$Z(\{b_j\}) = z^N \left[Z(\{a_j\}) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i}{z^i} \right]$$

Bevis

$$Z(\{b_j\}) \underset{def}{=} b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots =$$

$$a_1 + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z^2} + \cdots = z\left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots - a_0\right] = z[Z(\{a_j\}) - a_0].\blacksquare$$

Det mer generella fås genom iteration.

20 Maximumprincipen

Antag att

- $D \subset \mathbb{C}$ område.
- $f \in \mathcal{A}(D)$
- $f \neq const$ i D

Då gäller att

$|f|$ kan inte ha lok.max i D.

Bevis

Antag motsatsen: $z_0 \in D$ lok.max för $|f| \Rightarrow \exists R > 0$ s.a. $|f(z_0)| \geq |f(z)|\ \forall z \in \{|z - z_0| < R\}$. Låt nu $0 < r < R$.

$$|f(z_0)| \overset{m.v.e.}{=} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta \leq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

Om $|f(z_0)|$ är ett lok.max

$$\Rightarrow |f(z_0)| = \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

men f är kontinuerlig $\Rightarrow |f(z_0)| = |f(z_0 + re^{i\theta})|,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Då $r < R$ är godtyckligt $\Rightarrow |f(z_0)| = |f(z)|\ \forall z \in \{|z - z_0| < R\} \because |f| = const$ på $\{|z - z_0| < R\} \Rightarrow f = const$ på $\{|z - z_0| < R)$
$g(z) = f(z) - const \in \mathcal{A}(D),\ g^{(k)}(z_0) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \cdots \Rightarrow g(z) = 0$ på $D \Rightarrow f(z) = const$ på D. Motsägelse!$\blacksquare$.

21 Schwarz lemma

Antag att

- $f \in \mathcal{A}(\Delta)$ Δ är enhetsskivan.
- $f(0) = 0$ & $|f(z)| \leq 1\ \forall z \in \Delta$

Då gäller att

$|f(z)| \leq |z|$. Om likhet för något $z \neq 0$ gäller att $f(z) = \lambda z,\ |\lambda| = 1$

Bevis

$$|f(z)| \leq |z| \Leftrightarrow \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$$

. Låt $g(z) = \frac{f(z)}{z} \in \mathcal{A}(\Delta)$, ty $f(0) = 0$. Betrakta g i $\{z : |z| < r\},\ r < 1$.

$$|g(z)| \underset{Max.princ.}{\leq} \max_{|z|=r} |g| \leq \max_{|z|=r} \frac{|f|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \text{ om } |z| < r$$

Låt $r \to 1 \Rightarrow |g(z)| < 1$ om $|z| < 1$, dvs $|f| \leq |z|$ om likhet någonstans så är $g \equiv const\ \& f = \lambda z,\ |\lambda| = 1$$\blacksquare$

22 Residy satsen

Antag att

- D är ett enkelsammanhängade område & $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$
- $f : \mathbb{C} \to D$ med singulära punkter i $z_0, ...z_n$.

- $f \in \mathcal{A}(D \setminus \ \{z_0, ..., z_n\})$
- γ enkelt sluten kurva i D. $\gamma : z_0, ...z_n \notin \gamma$.

Då gäller att

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i \in inre(\gamma)} Res(f, z_i)$$

Bevis

Låt $\gamma_j, \ j = 1, ..., p$ vara små cirklar $\{z : |z - z_j| < \delta_j\}$ Cauchys integral sats tillämpad på $inre(\gamma) - \bigcup_j inre(\gamma_j)$

$$\int_{\gamma - \gamma_1 - ... - \gamma_p} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma - \sum_{j=1}^{p} \int_{\gamma_j} = 0$$

$$\because \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{p} \int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{p} Res(f, z_j) \blacksquare$$

.