Satser inför examination
Lp 1 HT 05

CV 1.6 ML-olikheten (uppskattning av kurvintegraler)

Triangelolikheten:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \qquad \text{där } f(t) \in \mathbb{C}$$

1) $\int_a^b f(t)dt = 0$ OK

2) $\int_a^b f(t)dt \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right| \cdot \underbrace{e^{i\theta}}_{\cos\theta + i\sin\theta}$ där θ är ngt argument

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \underset{\text{konst map } t}{e^{-i\theta}} \int_a^b f(t)dt = \underbrace{\int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt}_{\overset{\vee}{0}} = \mathrm{Re} \int_a^b \underset{u+iv}{e^{-i\theta} f(t)}dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right)dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right| dt = \int_a^b \left|e^{-i\theta}\right| \cdot |f(t)|\,dt \overset{\circledast}{=} \int_a^b |f(t)|\,dt \qquad \circledast\ \left|e^{-i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

ML-olikheten:

$$\left|\int_\gamma u(z)\,dz\right| \leq \overbrace{\max_\gamma |u|}^{M} \cdot \overbrace{\lambda(\gamma)}^{L}$$

↖ längden av γ

Bevis

$$\left|\int_\gamma u(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b u(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \overset{\text{triangel}}{\leq} \int_a^b |u(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \max_\gamma |u| \underbrace{\int_a^b \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}\,dt}_{=\lambda(\gamma)}$$

CV 2.1 Cauchy-Riemanns ekvationer (NV för analyticitet)

Sats

$f: D \to \mathbb{C}, \quad u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f$

f deriverbar i $z_0 \in D$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \; ; \; \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Bevis

$$\exists f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$ Välj $\Delta z = h \in \mathbb{R}$

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)+iv(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{h} =$$

$(z_0 = x_0 + iy_0)$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\,\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}\right) =$$ $[\exists \lim \Rightarrow \exists \lim(\operatorname{Re}), \lim(\operatorname{Im})]$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = f'(z_0)$$

Välj nu istället $\Delta z = ik, \; k \in \mathbb{R}$

$$f'(z_0) = \lim_{k\to 0}\frac{u(x_0,y_0+k)+iv(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{ik} =$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{k\to 0}\frac{u(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)}{k} + \lim_{k\to 0}\frac{v(x_0,y_0+k)-v(x_0,y_0)}{k} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Detta är en stark koppling mellan de partiella derivatorna. Cauchy-Riemanns ekvationer.

CV 2.1 Cauchy-Riemanns ekvationer (T.V för analyticitet)

Sats

$f: D \to \mathbb{C}$, D område, $f = u + iv$ där $u, v \in C^1(D)$ och uppfyller (CR)

$\Rightarrow f$ analytisk i D

Bevis

Vi har $\Delta z = h + ik$

Taylors formel för u, v kring z (t.o.m grad 1)

$$u(x+h, y+k) = u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 \quad \left[\text{där } \underset{,\varepsilon_3, \varepsilon_4}{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0\right]$$

$$iv(x+h, y+k) = iv(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x} h + i\frac{\partial v}{\partial y} k + hi\varepsilon_3 + ki\varepsilon_4$$

Vi har nu

$$(*) \quad f(z+\Delta z) = f(z) + \frac{\partial u}{\partial x} h + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{-\frac{\partial v}{\partial x}} k + i\frac{\partial v}{\partial x} h + i\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial u}{\partial x}} k + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + ih\varepsilon_3 + ik\varepsilon_4$$

Detta ger nu

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} h - \frac{\partial v}{\partial x} k + i\frac{\partial v}{\partial x} h + i\frac{\partial u}{\partial x} k$$

$$\Rightarrow f(z+\Delta z) = f(z) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + ih\varepsilon_3 + ik\varepsilon_4$$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h}{\Delta z}\varepsilon_1 + \frac{k}{\Delta z}\varepsilon_2 \ldots$$

Vi har $0 \leq \left|\frac{h}{\Delta z}\varepsilon_1\right| = \left|\frac{h}{\Delta z}\right| \underbrace{|\varepsilon_1|}_{\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0} \leq |\varepsilon_1| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$

$\left|\frac{h}{\Delta z}\right| = \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{|h|}{\sqrt{h^2}} = 1$ Analogt visas de övriga

$$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \forall z \in D$$

$\Rightarrow f$ analytisk i D

CV 2.3 Cauchys sats (Goursat)

Sats

Låt γ vara en enkel sluten (styckvis) C^1-kurva i $\mathbb{C}$ och låt f vara analytisk i området D, som innehåller γ och dess inre. ~~Antag vidare att f' är kontinuerlig i D.~~ Då gäller att

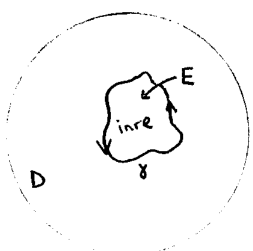
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Bevis

Vi har (för $f' \in C$)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy \quad \text{där} \quad u, v \in C^1(D), \quad D \supset E$$

Vi väljer γ moturs



$\partial E = \gamma$

Greens sats ger nu

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \iint_E \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\equiv 0} dx\,dy + i \iint_E \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\equiv 0} dx\,dy = 0$$

Detta är en följd av Cauchy-Riemanns ekvationer.

CV 2.4 Moreras sats

Sats

D område; $f: D \to \mathbb{C}$

f kontinuerlig i D

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall$ triangel $\gamma \subset D$ tillsammans med sitt inre.

$\Rightarrow f$ analytisk i D

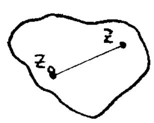
Bevis

Plan: Konstruera F s.a. $F' = f$

$\Rightarrow F$ analytisk $\Rightarrow F \in C^\infty \Rightarrow f$ deriverbar i D, dvs analytisk

Tag $z_0 \in D$

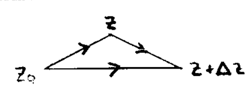
$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ (Obs! Vi vet inte om f är analytisk, dvs om $\int$ är oberoende av vägen)



Längs sträckan från z_0 till z

Vi har $\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| =$

$= \left|\frac{1}{\Delta z}\left(\underset{(*)}{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta} - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta\right) - f(z)\right| =$



$\int_\Delta f = 0$

$(*)\ \int_{z_0}^{z+\Delta z} f = \int_{z_0}^{z} f + \int_{z}^{z+\Delta z} f \quad$ ty $\int_{\text{triangel}} f = 0$

$= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \underline{f(z)}\,d\zeta\right| =$

$= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\,d\zeta\right| \leq \frac{1}{\cancel{|\Delta z|}} \max_{\zeta} |f(\zeta) - f(z)|\,\cancel{|\Delta z|}$

$\boxed{\zeta \in \text{sträckan } z,\, z+\Delta z}$

f kontinuerlig i z, dvs

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \zeta: |\zeta - z| < \delta \qquad |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$

Tag $\varepsilon > 0$

$\Delta z \to 0$

Vi kan nu säga

$\Delta z \to 0 \Rightarrow$ utan inskränkning antag att $|\Delta z| < \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \gamma : |\gamma - z| \le |\Delta z| < \delta \qquad |f(\gamma) - f(z)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \max\limits_{\text{sträckan}} |f(\gamma) - f(z)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall\ |\Delta z| < \delta \qquad \underbrace{\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|}_{\xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0} \Rightarrow F'(z) = f(z)$$

$\Rightarrow$ F analytisk

$\Rightarrow$ f analytisk

CV 2.3 Cauchys integralformel

Sats

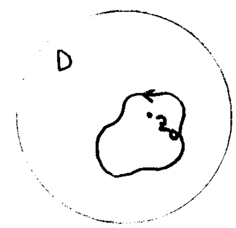
$f: D \to \mathbb{C}$, D område, f analytisk

γ enkel sluten styckvis C^1-kurva. Genomlöps ett varv moturs.

γ tillsammans med sitt inre $\subset D$

$z_0 \in \gamma$:s inre

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$



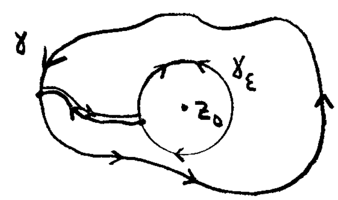
Bevis

$z_0 \in \gamma$:s inre, öppen mängd

$\Rightarrow \exists$ cirkel med medelpunkt i z_0, radie $\varepsilon > 0$ som $\subset \gamma$:s inre

Kalla denna cirkel γ_ε.

$$\overset{?}{} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$



där γ och γ_ε orienterade positivt.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Om vi tar en punkt på } \gamma \\ \qquad \text{en punkt på } \gamma_\varepsilon\end{array}\right\} \exists\, \tilde{\gamma} \text{ som binder ihop dem, ty } D \text{ är}$$

sammanhängande. $\Rightarrow$ γ:s inre sammanhängande

Detta ger att vi kan välja $\tilde{\gamma}$ i γ:s inre.

Vi bildar nu

$$\Gamma: \Gamma = \gamma \cup \tilde{\gamma} \cup (-\gamma_\varepsilon) \cup (-\tilde{\gamma})$$

Eftersom $z_0 \in \gamma_\varepsilon$:s inre

$\Rightarrow z - z_0 \neq 0$ i det område som avgränsas av Γ

$\Rightarrow \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ analytisk på och omkring Γ

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ enligt Cauchy's sats har vi

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0$$

Detta ger

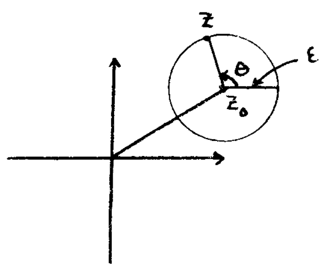
$$\int_{\gamma} + \cancel{\int_{\tilde{\gamma}}} + \int_{-\gamma_\varepsilon} + \cancel{\int_{-\tilde{\gamma}}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = -\int_{-\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Vi har

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Parametrisera γ_ε: $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ där $0 \le \theta \le 2\pi$



$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}{\cancel{z_0}+\varepsilon e^{i\theta}\cancel{-z_0}}\,\varepsilon e^{i\theta}\cdot i\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

Vi beräknar nu γ_ε

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta - f(z_0)\cdot 1\right| = \quad \text{där } 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \left(f(z_0+\varepsilon e^{i\theta}) - f(z_0)\right) d\theta\right| \le \frac{1}{\cancel{2\pi}} \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left|f(z_0+\varepsilon e^{i\theta}) - f(z_0)\right| \cdot \cancel{2\pi} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

ty f kontinuerlig

$$0 \le \underbrace{\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\right|}_{A} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{ty } A \text{ är oberoende av } \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Def

f kallas hel funktion (entire) om f är analytisk i hela $\mathbb{C}$.

Ex. e^z, $\sin z$, $\cos z$, polynom

Sats

f hel, $|f| \leq M$ i $\mathbb{C}$

$\Rightarrow f \equiv \text{const}$

Bevis

Vi skall visa att $f' \equiv 0$ $(\Rightarrow f \equiv \text{const})$

Cauchys formel för $f'(z)$ ger

$$(*)\quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \qquad R > |z|$$

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta \right| \overset{M.L}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \underbrace{\max|f|}_{\leq M} \max \frac{1}{|\zeta - z|} \leq \frac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\forall R$, ty f hel

Vi gör en modifiering av konturen

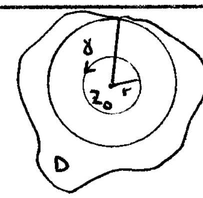
$\cancel{R > |z|}$ Låt integralen i $(*)$ gå över $|\zeta - z| = R$

Detta ger

$\frac{M}{R} \to 0 \Rightarrow |f'| \equiv 0 \Rightarrow f' \equiv 0 \Rightarrow f$ const

CV 2.4 Satsen om Taylorutveckling

Sats



$f : D \to \mathbb{C}$, f analytisk i D

$R : \{z : |z - z_0| < R\} \subset D \qquad (R = \mathrm{dist}(z_0, \partial D))$

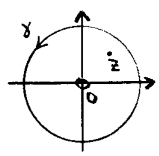
$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad$ i $\{z : |z - z_0| < R\}$

där

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \left(= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)$ där γ är cirkeln med radie $r < R$, medelpkt z_0

Bevis (väsentligt)

(1) Antag att $z_0 = 0$



Cauchys formel ger

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} d\zeta =$ [geometrisk serie] $=$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left(1 + \frac{z}{\zeta} + \frac{z^2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{z^n}{\zeta^n} + \ldots\right) d\zeta =$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \underbrace{\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} \cdot z + \frac{f(\zeta)}{\zeta^3} z^2 + \ldots + \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n + \ldots\right)}_{\text{potensserie}} d\zeta =$ [termvis integration] $=$

$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_\gamma \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta\right)}_{= a_n} z^n$

Bevis $(z_0 \neq 0)$

Utan inskränkning har vi $\gamma = \gamma_r = \{|\zeta - z_0| = r\}$ (deformera konturer)

För $z \in \gamma$:s inre

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)}\,d\zeta =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\,d\zeta}_{(*)} \qquad \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \underbrace{\frac{|z - z_0|}{r}}_{q} < 1 \qquad 0 \leq q < 1$$

Vi har nu följande geometriska serie:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \underbrace{\boxed{1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}}}_{\text{partialsumma}} + \underbrace{\frac{(z - z_0)^{n+1}}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \ldots}_{\text{svans}}$$

Detta ger

$$(*) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}\right) d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{(z - z_0)^{n+1}}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \ldots\right) d\zeta =$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta}}_{a_0} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta}}_{a_1}(z - z_0) + \ldots + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}}_{a_n}d\zeta\,(z - z_0)^n + \underset{n\to\infty}{\text{Rest}(n) \overset{?}{\longrightarrow} 0}$$

Slutligen har vi

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{(z - z_0)^{n+1}}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \ldots\right)\right| d\zeta \leq \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_r}|f|\cdot\frac{1}{r}\cdot 2\pi r \left|\frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right| \leq$$

$$\overset{(**)}{\leq} \max_{\gamma_r}|f|\cdot\frac{q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (**) \text{ Triangelolikheten}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z - z_0)^n$$

Laurentutvecklingar

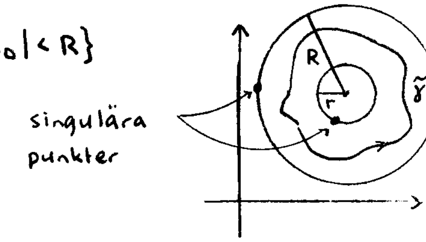
Sats

f analytisk i en cirkelring: $r < |z-z_0| < R$ (Obs! $r=0$, $R=\infty$ tillåtet)

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad i \; \{r < |z-z_0| < R\}$$

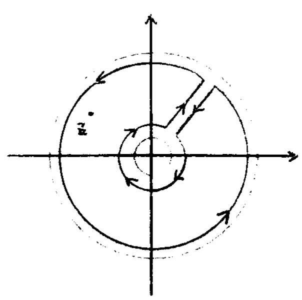
$$\text{där } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (\neq \text{derivator}) \quad n \in \mathbb{Z}$$

r, R kan väljas så att närmsta singularitet nås. $\tilde{\gamma}$ enkel sluten, ett varv moturs kring $z_0 \subset \{r < |z-z_0| < R\}$



Bevis

Tag r, R så att $r < r_1 < R_1 < R$



Vi har

$\Gamma = \{|z-z_0| = R_1\}$ moturs

$\gamma = \{|z-z_0| = r_1\}$ moturs

$\pm$ snitt

$C = \Gamma \cup \{\text{snitt}\} \cup (-\gamma) \cup \{-\text{snitt}\}$

f analytisk på och innanför C.

$\Rightarrow$ <u>Om z innanför C</u>, så gäller att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\Gamma + \cancel{\int_{\text{snitt}}} + \int_{-\gamma} + \cancel{\int_{-\text{snitt}}} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

På nästa sida följer beräkningarna av dessa integraler

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}\,d\zeta = \left[\,\Gamma : R_1 = |\zeta - z_0| > |z-z_0|\,\right] = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\,d\zeta =$$

$$\boxed{\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R_1} < 1}$$

Summan av en geom. serie

$$= \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(\zeta-z_0)^2} + \dots\right)d\zeta =$$

= [Termvis integration] =

$$= \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta + \left(\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta\right)(z-z_0) + \dots + \left(\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-z_0)^n + \dots =$$

$= 2\pi i\left(a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots\right)$ Detta fås för att vi kan deformera konturen.

Nu återstår integralen över γ:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}\,d\zeta = -\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{-\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)+1} = \left[\,\text{På } \gamma : r_1 = |\zeta-z_0| < |z-z_0|\,\right] =$$

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$$

$$= -\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{z-z_0}\,d\zeta\left(1 + \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} + \frac{(\zeta-z_0)^2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots\right)d\zeta = [\text{Termvis integration}] =$$

$$= -\left(\left(\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta\right)(z-z_0)^{-1} + \left(\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-z_0)\,d\zeta\right)(z-z_0)^{-2} + \dots + \left(\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}\,d\zeta\right)(z-z_0)^{-n} + \dots\right) =$$

$$= [\text{sätt } m=-n] = -\left(\left(\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta\right)(z-z_0)^{-1} + \dots + \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,d\zeta\,(z-z_0)^m + \dots\right)$$

Vi deformerar nu γ till $\tilde{\gamma}$, erhåller koefficienter a_n

Tag $z \in \{r < |z-z_0| < R\}$

$\exists\, r_1, R_1 : r < r_1 < |z-z_0| < R_1 < R$

Därmed är satsen bevisad.

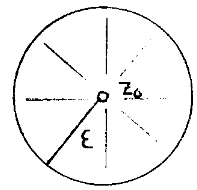
CV 3.1 Satsen om analytiska funktioners nollställen

Sats

Analytiska funktioners nollställen är isolerade

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, f analytisk i D

$z_0 \in D$, $f(z_0)=0$



$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f \neq 0$ i $\{0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$

Bevis

Taylorutveckla $f(z)$ kring z_0

$$f(z) = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots \overset{m \geq 1}{=} (z-z_0)^m \underbrace{\left(\overset{\neq 0}{a_m} + a_{m+1}(z-z_0) + \ldots\right)}_{\varphi(z)}$$

φ analytisk i en omgivning till z_0.

$\varphi(z_0) = a_m \neq 0$

$\Rightarrow \varphi \neq 0$ i en omgivning till z_0 (kontinuitet)

$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^m \underbrace{\varphi(z)}_{\neq 0}$ i $\{|z-z_0| < \varepsilon\}$

Tag z_1: $0 < |z_1 - z_0| < \varepsilon$, $f(z_1) = \underbrace{(z_1-z_0)^m}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\varphi(z)}_{\neq 0} \neq 0$

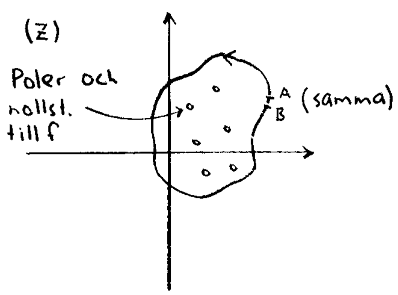
$\Rightarrow f \neq 0$ i $\{0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$

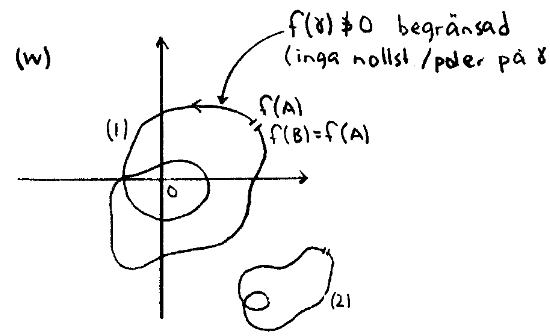
LV 3.1 Argumentprincipen

Sats

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\gamma \arg f(z) \;(= N - P)$$

Bevis





Vi har

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma (\overset{?}{\log} f(z))'\,dz$$

$$\log_* f(z) = \ln|f(z)| + i\arg_* f(z)$$

$$\log f(B) - \log f(A) = \underbrace{\ln|f(B)| - \ln|f(A)|}_{\substack{=0 \\ \text{ty } f(B)=f(A)}} + i\underbrace{(\arg_* f(B) - \arg_{**} f(A))}_{\text{behöver ej vara } 0}$$

i fall (1) ovan:

arg: $2\cdot 2\pi$ (ty två varv runt origo)

i fall (2)

arg: 0 (ty inget varv runt origo.)

CV 3.1 Rouchés sats

Sats

f, g analytiska på och innanför γ (enkel sluten)

$|f| > |g|$ på γ, d.v.s $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \gamma$

$\Rightarrow f$ och $f+g$ har lika många nollställen innanför γ

(räknade med multiplicitet)

Bevis (metod: homotopi)

$|g| < |f|$ på $\gamma \Rightarrow |tg| < |f|$ på $\gamma \quad \forall t \in [0,1]$

Varken f eller $f+tg$ kan ha nollställen på γ, ty

om $f(z_0) = 0$, så $|f(z_0)| = 0 \not> |g(z_0)|$

om $f(z_0) + tg(z_0) = 0$, så $|f(z_0)| \underset{\not>}{=} |tg(z_0)|$

Den logaritmiska indikatorn för $f+tg$:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f' + tg'}{f+tg}}_{\text{kontinuerlig funktion av } t} dz = N(t) \quad \text{antal nollställen för } f+tg \text{ innanför } \gamma$$

Vi har för kontinuerliga funktioner med heltalsvärden

$\Rightarrow N(t) \equiv \text{const} \; ; \; [0,1]$

$\Rightarrow N(0) = N(1)$

där $N(0)$ är antal nollställen till f och $N(1)$ är antal nollställen till $f+g$ innanför γ.

CV 3.1 Rouchés sats [2]

Sats

$f, g : D \to \mathbb{C}$ analytiska

γ enkel sluten, tillsammans med sitt inre $\subset D$

$|f+g| < |f|$ på γ

$\Rightarrow$ f och g har lika många nollställen innanför γ

Bevis (med argumentprincipen)

$f \neq 0$ på γ ty $0 \not> |f+g|$

$g \neq 0$ på γ ty annars $|f| < |f|$

Bilda $h(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)} \neq 0$ på γ omöjligt

ej singulära på γ

$\Rightarrow$ Vi kan använda argumentprincipen för h

$N_f, N_g, P_f = 0 = P_g, \; N_h = N_g, \; P_h = N_f$

(ev. gemensamma faktorer förkortade i $\frac{g}{f}$)

$\Rightarrow N_h - P_h = N_f - N_g = \dfrac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg h(z)$

Men:

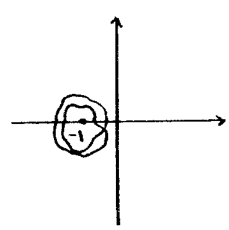
$|f+g| < |f|$ på $\gamma \; \Big| : \dfrac{1}{|f| \neq 0}$

$\Rightarrow \left| \dfrac{g}{f} + 1 \right| < 1$ på γ

$\Rightarrow |h(z) + 1| < 1$ på γ

hela $h(\gamma) \subset$ cirkelskiva runt -1 med radie 1

$\Rightarrow \Delta_\gamma \arg h(z) = 0 \Rightarrow N_g = N_f$



CV 3.1 Algebrans fundamentalsats

Sats

$P(z)$ polynom

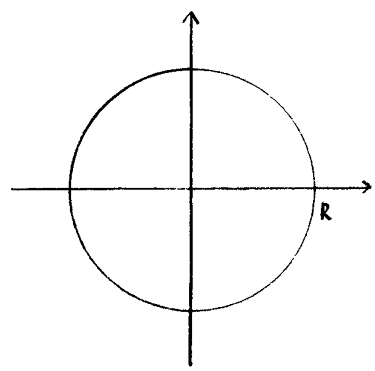
$\deg P = n \quad (n \geq 1)$

$\Rightarrow$ P har exakt n st. nollställen i $\mathbb{C}$, räknade med multiplicitet.

Bevis

$$P(z) = \underbrace{\underset{\neq 0}{a_n} z^n}_{f} + \underbrace{a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}_{g} \qquad n \geq 1$$

dominant



för R tillräckligt stort

$$|a_n z^n| = |a_n| R^n > |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|$$

på $\{|z| = R\}$

$\Rightarrow$ $a_n z^n$ och $P(z)$ har lika många nollställen i $\{|z| < R\}$, d.v.s $\underline{n}$ st

P har inga nollställen utanför, d.v.s $\{|z| \geq R\}$

ty $P(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} \infty$

$\neq 0$ för R tillräckligt stort.

CV 5.3 Satsen om konforma avbildningar

Sats (lokal formulering)

f analytisk i z_0 (deriverbar i en omgivning till z_0)

$f'(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow f$ är konform i punkten z_0

Bevis

γ_1, γ_2 kurvor genom z_0

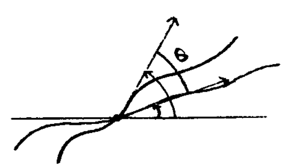
$\Gamma_1, \Gamma_2 = f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ genom $w_0 = f(z_0)$

$\theta =$ vinkeln mellan γ_1 och γ_2 i z_0

$\overset{\text{def}}{=}$ vinkeln mellan tangentvektorerna till γ_1 och γ_2 i z_0

Vi har

$z_{1,2}(t)$, $t \in [a,b]$, $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ för något t_0



Vi har $\theta = \arg \dot{z}_2(t_0) - \arg \dot{z}_1(t_0)$ för lämpligt valda argument

$\theta_w = \arg \dot{w}_2(t_0) - \arg \dot{w}_1(t_0)$

$w = f(z)$

Kurva: $w(t) = f(z(t))$, tangent: $\dot{w}(t) = f'(z(t)) \cdot \dot{z}(t)$ kedjeregeln

$$\dot{w}(t_0) = f'(z_0)\dot{z}(t_0) \Rightarrow \begin{cases} |\dot{w}(t_0)| = |f'(z_0)||\dot{z}(t_0)| \\ \arg w(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}(t_0) \end{cases}$$

lokalt: skalning + rotation

för lämpligt valda arg

Detta ger slutligen

$$\theta_w = \arg \dot{w}_2(t_0) - \arg \dot{w}_1(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \dot{z}_2(t_0) - \arg f'(z_0) - \arg \dot{z}_1(t_0) = \theta$$

cv 5.3 Laplacetransform av derivator

Sats

$$(\mathcal{L}u^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}u(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$$

Härledning av fallet u''

$$(\mathcal{L}u'')(s) = \int_0^\infty u''(t)e^{-st}dt \overset{p.i}{=} \left[u'(t)e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty u'(t)\cdot \underset{(*)}{(+s)}e^{-st}dt =$$

$$\overset{p.i}{=} -u'(0) + \left[u(t)se^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty u(t)\, s\underset{(*)}{(+s)}e^{-st}dt = -u'(0) - su(0) + s^2\mathcal{L}u(s)$$

(*) Flytta ut (-) ur integranden.

LV 5.5 Z-transform av faltning

Sats

$\{x(n)\}\{y(n)\}$ diskreta talföljder

$$\{x(n)\} * \{y(n)\} = \{\sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}(\{x(n)\} * \{y(n)\}) = \mathcal{Z}(\{x(n)\})\,\mathcal{Z}(\{y(n)\})$$

Bevis

$$\mathcal{Z}(\{x(n)\}) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{z^n} = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots \frac{x_n}{z^n} + \dots$$

$$\mathcal{Z}(\{y(n)\} \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y(n)}{z^n} = y_0 + \frac{y_1}{z} + \frac{y_2}{z^2} + \dots \frac{y_n}{z^n} + \dots$$

Vi visar nu att h.l = v.l

$$\mathcal{Z}(\{x(n)\})\,\mathcal{Z}(\{y(n)\}) = \left(x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots\right)\left(y_0 + \frac{y_1}{z} + \frac{y_2}{z^2} + \dots\right) =$$

$$= (x_0 y_0 + (x_1 y_0 + x_0 y_1) z^{-1} + (x_2 y_0 + x_1 y_1 + x_0 y_2) z^{-2} + \dots)$$

$$= \sum_{k=0}^{0} x_{-k} y_k + \left(\sum_{k=0}^{1} x_{1-k} y_k\right) z^{-1} + \left(\sum_{k=0}^{2} x_{2-k} y_k\right) z^{-2} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k\right) z^{-n}$$

Detta är enligt definition lika med

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k\right)$$

Vilket i sin tur är enl. definition lika med

$$\mathcal{Z}(\{x(n)\} * \{y(n)\})$$

<V 5.5 Satsen om shifting (Z-transform)

Sats

Om talföljden $\{a_j\}$ är förskjuten ett steg till den nya talföljden $\{b_j\}$

där $b_j = a_{j+1}$, $j = 0,1,2\ldots$ gäller

$$\mathcal{Z}(\{b_j\}) = z[\mathcal{Z}(\{a_j\}) - a_0]$$

Bevis

$$\mathcal{Z}(\{b_j\}) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots = a_1 + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z^2} + \ldots =$$

$$= z\left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots - a_0\right] = z\left[\mathcal{Z}(\{a_j\}) - a_0\right]$$

Mer generellt:

Om $\underline{\underline{N}}$ är ett fixt positivt heltal och

$b_j = a_{j+N}$, $j = 0,1,2\ldots$

så är

$$\mathcal{Z}(\{b_j\}) = z^N\left[\mathcal{Z}(\{a_j\}) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i}{z^i}\right]$$

Maximumprincipen

Sats

f analytisk i D

$f \not\equiv \text{const}$

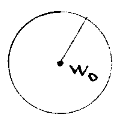
$\Rightarrow |f|$ kan inte ha lokalt maximum i D

Bevis

Antag motsatsen, d.v.s $|f|$ har lok. max i $z_0 \in D$

$f(z_0) = w_0$

en hel omgivning till $w_0 \subset f(D)$



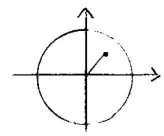
$\exists$ punkter i omgivningen med $|f(\dots)| > |w_0|$

motsägelse!

CV 3.2 **Schwarz lemma**

Lemma

f analytisk i $\{|z|<1\}$



$f(0)=0$

$|f(z)|\leq 1 \quad \forall z\in\{|z|<1\}$

$\Rightarrow |f(z)|\leq |z| \quad \forall z\in\{|z|<1\}$

om "=" i ngn pkt, så $f(z)=\lambda z$, där $|\lambda|=1$

Bevis

Betrakta $g(z)=\frac{f(z)}{z}$ analytisk i $\{|z|<1\}$ (förkorta z i $f(z)$:s Taylor utv.

På $|z|=r$: ($r>0$)

$$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}=\frac{|f(z)|}{r}\leq\frac{1}{r}$$

maximumprincipen ger nu

$|g(z)|\leq\frac{1}{r} \quad \forall z: |z|\leq r$; låt $r\to 1 \Rightarrow |g(z)|\leq 1$ i $\{|z|<1\}$

$\Rightarrow |f(z)|\leq |z|$ i $\{|z|<1\}$

$|g|=1$ i z_0: $|g|$ har lok. max i z_0

$\Rightarrow |g|\equiv \text{const}=1 \Rightarrow g\equiv\text{const}=\lambda$ med $|\lambda|=1$

$\Rightarrow f(z)=\lambda z$

Sats 3.2, Kjell Holmåker

Sats

g analytisk i $\mathbb{C}$, utom i ändligt många punkter $s_1, s_2, \ldots, s_k$

$g(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ g är Laplacetransformen av funktionen

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{s_j} \left(g(s)e^{st}\right) \quad \text{och}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(s)e^{st}\,ds = \lim_{\Omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st}\,ds = \begin{cases} f(t) & \text{för } t>0 \\ 0 & \text{för } t<0 \end{cases}$$

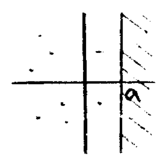
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \int_{-M}^{N} \right)$$

oberoende

där $a > \operatorname{Re} s_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k$

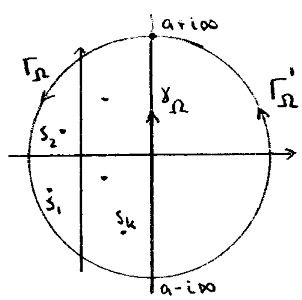
Bevis

g uppfyller de nödvändiga villkoren:



$\exists a > \operatorname{Re} s_j \quad \forall j = 1, \ldots, k$

g analytisk i $\{\operatorname{Re} s > a\}$, $\quad g \xrightarrow[\operatorname{Re} s\to\infty]{} 0 \quad$ ty $g \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$



$g(s)e^{st}$ analytisk utom i ändligt många isolerade singulariteter

$\Rightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{s_j} \left(g(s)e^{st}\right)$ väldefinierad

? f är av exponentiell typ

Inför $C = \gamma_\Omega \cup \Gamma_\Omega$ (moturs)

för Ω tillräckligt stort ligger $s_1, \ldots, s_k$ innanför C

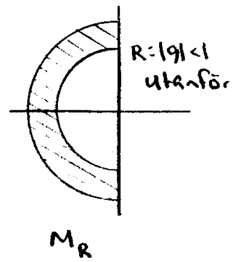
⇒ enl. residylsatsen $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(s)\, e^{st}\, ds$

$|f(t)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C g(s)e^{st}ds\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_C |g(s)||e^{st}||ds| \le$ $\int_C |ds|$ = längden

$\le \frac{1}{2\pi}\max_C |g|\, e^{\overset{a}{\cancel{\mathrm{Re}\, s}}\, t}\cdot \ell_C \le C_1 \cdot M_C \cdot e^{at}$

$(a \ge \mathrm{Re}\, s)$

$M_C = \max_C |g| \le M$ ty $g \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$, $|g|$ begränsat på C



⇒ f är av exponentiell typ (a i e^{at} är
just $a > \mathrm{Re}\, s_j$; $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$)

⇒ f har Laplacetransform

? $\mathcal{L}f = g$

Tag z s.a $\mathrm{Re}\, z > a$; Ω så stort att $|z-a| < \Omega$

$(\mathcal{L}f)(z) = \underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt}_{=g(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left(\int_C g(s)e^{st}ds\right)e^{-zt}dt =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_C g(s)\left(\int_0^\infty e^{st-zt}dt\right)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(s)\left(\int_0^\infty e^{(s-z)t}dt\right)ds =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_C g(s)\frac{1}{s-z}\left[e^{\overset{\mathrm{Re}<0}{(s-z)}t}\right]_0^\infty ds =$

$\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, s\big|_C$ ty z till höger om $x=a$, C på och till vänster

$= -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(s)}{s-z}ds$ (Byte av integrationsordning är här ok!, Fubinis sats.

Vi har nu

$\int_C = \int_{\gamma_\Omega} = \int_{\Gamma_\Omega}$

$C' = \Gamma'_\Omega \cup \{-\gamma_\Omega\}$ g analytisk på och innanför C' enkel sluten
moturs

$\Rightarrow$ enl. Cauchys integralformel

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{g(s)}{s-z}\,ds = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\Omega} \frac{g(s)}{s-z}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_\Omega} \frac{g(s)}{s-z}\,ds$$

$$\left|(\mathcal{L}f)(z) - g(z)\right| = \left| \cancel{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\Omega}\frac{g(s)}{s-z}\,ds} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\Omega}\frac{g(s)}{s-z}\,ds + \cancel{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\Omega}\frac{g(s)}{s-z}\,ds} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_\Omega}\frac{g(s)}{s-z}\,ds \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-a|=\Omega}\frac{g(s)}{s-z}\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\max_{\Gamma_\Omega \cup \Gamma'_\Omega}|g|\, 2\pi\Omega \frac{1}{\Omega - |z-a|} \xrightarrow[\Omega\to\infty]{} 0$$

$$\left|\frac{\cdots}{s-z+a-a}\right| = \left|\frac{\cdots}{(s-a)-(z-a)}\right| \leq \frac{}{\Omega - |z-a|}$$

$$\underbrace{\left|\mathcal{L}f(z) - g(z)\right|}_{\text{oberoende av } \Omega} \xrightarrow[\Omega\to\infty]{} 0 \Rightarrow (\mathcal{L}f)(z) = g(z)$$

Nödvändiga tips och satser

Cauchy's formler för derivatorna

Sats

γ enkel sluten kurva, ett varv moturs

f analytisk på och innanför γ.

$\Rightarrow$ f är oändligt deriverbar på och innanför γ och

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad \forall z_0 \text{ i } \gamma\text{:s inre}$$

Bevis (Icke-formellt)

Låt $n=1$ (Analogt visas $\forall n>1$)

Vi har $\left(? \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0\right)$

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| \overset{\text{C.I.F}}{=}$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta z}\left(\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}\,d\zeta - \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\cancel{\Delta z}}\int_\gamma f(\zeta)\cdot\frac{\cancel{\zeta}-\cancel{z}-\cancel{\zeta}+\cancel{z}+\cancel{\Delta z}}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\frac{\cancel{\zeta}-\cancel{z}-\cancel{\zeta}+\cancel{z}+\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\right|\cdot|\Delta z|\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| \overset{\text{M.L}}{\leq}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}|\Delta z|\max_\gamma\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\right|\underbrace{l_\gamma}_{\text{fixt tal}} = \frac{l_\gamma}{2\pi}|\Delta z|\max_{\zeta\in\gamma}\frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|\zeta-(z+\Delta z)|}_{\geq \frac{d}{2}}\underbrace{|\zeta-z|^2}_{\geq d}} \leq$$

$$\leq \frac{l_\gamma}{2\pi}|\Delta z|\frac{\max_\gamma |f|}{\frac{d}{2}\cdot d^2}$$

Vi ser att detta led är begränsat och således fås

$$\frac{l_\gamma}{2\pi}\underbrace{|\Delta z|}_{0}\frac{\max_\gamma|f|}{\frac{d}{2}\cdot d^2} \longrightarrow 0 \text{ då } \Delta z \to 0$$

KH s.7 Jordans lemma

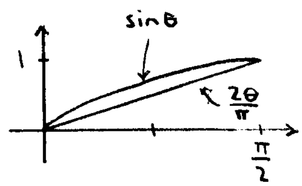
(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta < \frac{\pi}{2aR}, \quad a>0$

(b) Antag att $f(z)$ är analytisk i $\operatorname{Im} z \geq 0$, $|z|>R_0$ för något R_0 och att $f(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i öhp. Om $a>0$, så är

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz = 0$$

Bevis

(a) Av nedanstående figur framgår det att $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ för $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



Detta ger

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\left(\frac{2\theta}{\pi}\right)}\,d\theta < \int_0^{\infty} e^{-2aR\theta/\pi}\,d\theta = \frac{\pi}{2aR}$$

(b) Antag $R>R_0$ och låt igen $M_R = \max\limits_{z\in C_R} |f(z)|$. Förutsättningen att $f(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$ i öhp innebär att $M_R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Vi uppskattar integralen över C_R och utnyttjar (a):

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leq \left[z=Re^{i\theta},\ 0\leq\theta\leq\pi\right] \leq M_R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} R\,d\theta =$$

$$= \left[\sin\theta \text{ är jämn kring } \theta=\tfrac{\pi}{2}\right] = 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta < 2RM_R \cdot \frac{\pi}{2aR}$$

$$= \frac{\pi}{a} M_R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$