Komplex

Bevis

F/kf

sidor: 31

pris: ~~40:~~ 15:-

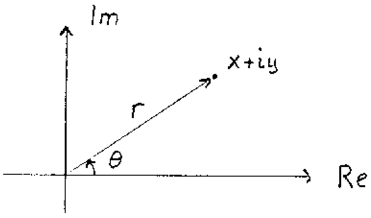
Komplex analys.

1998

Normal form: $z = x + iy$

Polär form: $z = r\{\cos\theta + i\sin\theta\} = re^{i\theta}$

Mångtydighet: $z = r\{\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)\} = re^{i(\theta+2k\pi)}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$



$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Komplexkonjugat: $\bar{z} = x - iy$

Några räkneregler.

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, $e^z = e^{x+iy} = e^x\{\cos(y) + i\sin(y)\}$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2+y^2$, $z + \bar{z} = 2\,Re\{z\} = 2x$, $z - \bar{z} = 2i\,Im\{z\} = 2iy$

$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$$\left.\begin{array}{l} z^n = r^n e^{in\theta} \\ z^{1/n} = r^n e^{i(\theta+2k\pi)/n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z} \\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

$z = 0 \Leftrightarrow r = 0$, $z \to \infty \Leftrightarrow r \to \infty$

Funktioner.

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, u, v reellvärda.

Kontinuitet: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \longleftrightarrow f$ kont. i z_0

Deriverbar: (Analytisk) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$, deriverbar om $f'(z_0)$ existerar.

Cauchy - Riemanns ekv. (C-R)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

(C-R) uppfyllda och $u(z), v(z) \in C^1 \iff f(z)$ deriverbar.

Harmoniska funktioner.

Om $f(z)$ är analytisk (= deriverbar) så är u & v harmoniska.

Omvänt gäller att om man har u (eller v) och denna är harmonisk så kan man bestämma v (u) s.a. $f(z)$ blir analytisk.

sats: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ i $D \iff u$ harmonisk i D.

Givet u fås v ur (C-R).

Derivata i polära koord.: $f'(z) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right\} \{\cos\theta - i \sin\theta\}$

2.4.19 : $|f(z)| = \text{konst} \Leftrightarrow f(z) = \text{konst}$.

Derivata i kart. koord: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

Ord lista.

- Öppen mängd (open set) = enbart inre punkter. Ex $|z| < 1$
- Sluten -"- = öppen + randpunkter. Ex $|z| \leq 1$
- Omgivning (neigbourhood) till z_0: $\{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$
- Punkterad omgivning till z_0: $\{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$
- Sammanhängande : 
- Enkelt sammanhängande : 
- Område (domain) : öppen och sammanhängande mängd.
- Deriverbar i z_0 : f uppfyller (C-R) & $u, v \in C^1$ i z_0
- Analytisk i z_0 : -"- -"- -"- -"- -"- i omgivning till z_0

Logaritmen: def: $\text{Log}(z) = w \iff e^w = z$

expl: $\text{Log}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$

Logaritmen är analytisk om $\arg(z)$ inskränks till att omfatta mindre än ett varv.

Principal logaritm: $\text{Log}(z) = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z)$, $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$

(C-R) i polära koord.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

Potenser: def. $z^{\alpha} = e^{\alpha \log(z)}$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

Potensen är en flervärd funktion.

Trigonometriska och hyp. funktioner.

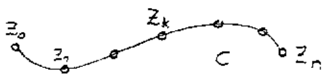
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Alla räkningar/egenskaper faller tillbaka på exp. funktionen.

Integrering.

def. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \xrightarrow[n\to\infty \quad \text{s.a.} \quad \max|\Delta z_k| \to 0]{} \int_C f(z)\,dz$



$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

kurvan parametriseras: $\left\{ C: \begin{vmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{vmatrix} \quad t \in [\alpha, \beta] \right\}$

envariabel integrering: $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_C f(x,y)\,dy = \int_C f(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}\,dt$

tvåvariabel integrering: $f(z) = u + iv$, $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$,

$dz = dx + i\,dy$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx)$$

<u>ML uppskattningen:</u> $\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq M \cdot L$ $\quad M \geq \max |f(z)|$, $z \in C$

L = längden av C

<u>Cauchy - Goursat's sats:</u>

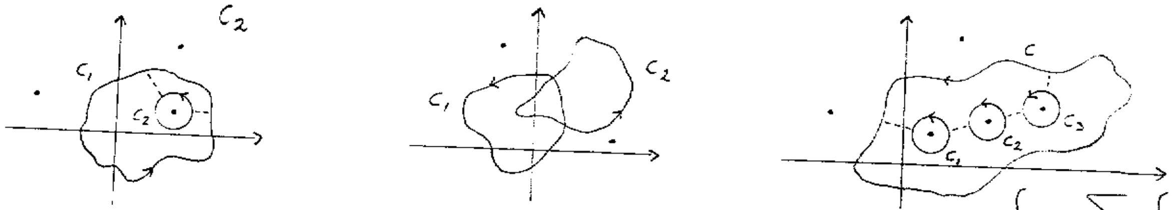
Om C är en enkel, sluten och glatt kurva och f är analytisk innanför och på C så är: $\int_C f(z)\,dz = 0$

<u>Deformationsprincipen:</u>

Om f är analytisk på kurvorna C_1 och C_2, och C_1 är kontinuerligt deformerbar till C_2, utan att f blir icke analytisk på kurvan under deformationen så gäller

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

<u>Ex</u>



$$\int_C = \sum_k \int_{C_k}$$

<u>Cauchys integralformel</u>

Om C är enkel o sluten, f är analytisk på och innanför C och z_0 tillhör C:s inre så är:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z + z_0}\,dz$$

<u>anm.</u> $\longleftarrow$ f känd på C $\Rightarrow$ f känd i C

$$\longrightarrow \int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

<u>Bestämning av $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \ldots$</u>

$$\frac{d}{dx}(x = r\cos\theta) \Rightarrow 1 = \frac{dr}{dx}\cos\theta - r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y = r\sin\theta) \Rightarrow 0 = \frac{dr}{dx}\sin\theta + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dx} = \cos\theta, \qquad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

Cauchys utökade integralformel.

Om C är enkel, sluten och styckvis glatt, z_0 tillhör C:s inre och f är analytisk i och på C så gäller

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Maximumprincipen.

Om f är analytisk i D och kont. på ∂D så gäller att $|f|$ antar sitt största värde på ∂D. Dessutom gäller:

Om f är icke konstant antar $|f|$ maximum endast på ∂D.

Om $f \neq 0$ i D så har $|f|$ också sitt minimum på ∂D

Liouvilles sats.

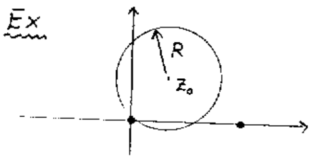
En hel funktion (anal. i hela $\mathbb{C}$) som är begränsad $|f| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$ är en konstant.

Taylorutvecklingar.

$f(z)$ analytisk $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

Konvergensradien R = avst. från z_0 till närmsta punkt där f ej är analytisk

Ex



Potens serier

Om en potensserie är konv. med radie R, så är även derivatan/integralen av serien konv. med radie R.

Geometrisk serie: $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Kvotkriteriet: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_n^{\infty} a_n$ är konv.

Förgreningspunkter till $\log(f(z))$

Förgreningspunkter är alla punkter där $f = 0$ eller $f = "\infty"$. Entydighet kräver att man klipper upp planet mellan dessa punkter på ett sådant sätt att området förblir enkelt sammanhängande.

Analytiska funktioners nollställen.

- Antalet nollställen i z_0 = potensen hos den första term skild från noll i Taylorutvecklingen kring z_0
- z_0 kallas isolerat nollställe till f om $f(z_0)=0$ och $f(z) \neq 0$ i en punkterad omgivning till z_0
- Om en analytisk funktion har ett eller flera icke-isolerade nollställen så är $f \equiv 0$

Entydighets satsen.

Om f och g är analytiska i D och $f \equiv g$ i $M \in D$ samt M innehåller minst en hopningspunkt (= en icke isolerad punkt) så är $f \equiv g$ i D.

Weierstrass' majorantsats.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ likformigt konv} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv då } |f_n(z)| \leq a_n$$

Cauchy's uppskattningar.

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$ där a_n = term i Taylor eller Laurent utvecklingen till $f(z)$.

Laurent utvecklingar.

def. Laurent serie : $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

Konvergens omr. : $r < |z-z_0| < R$

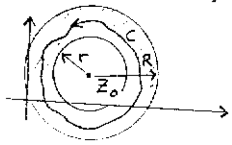
R = konv. radie för $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-z_0)^m$

$\frac{1}{r}$ = konv. radie för $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ där $w = \frac{1}{z-z_0}$

Sats: (Laurent utvecklingar av analytiska funktioner)

f analytisk i $r < |z-z_0| < R \Rightarrow f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

där $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$



Residyer.

Om f är analytisk för $0 < |z-z_0| < R$ så är $\mathrm{Res}\{f, z_0\} = a_{-1}$

Residy kalkyl.

Om f är analytisk för $0 < |z-z_0| < R$, och C är en kurva som ligger i detta omr. och som innesluter z_0, så är:

- $\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\{f, z_0\}$

Residysatsen.

f analytisk på C och i C med undantag för ändligt många ($\Rightarrow$ isolerade) punkter z_k

$$\Rightarrow \int_C f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\{f, z_k\}$$

Isolerade singulariteter.

f analytisk i punkterad omgivn. till z_0 $\Rightarrow$ Laurent utv. finns.

def. z_0 hävbar singularitet $\Leftrightarrow$ inga neg. potenser i L utv.

Ex: $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots$

Residyn: $\mathrm{Res}\{f, z_0\} = 0$

def. z_0 väsentlig singularitet $\Leftrightarrow$ oändligt många neg. potenser i L:utvecklingen.

Ex: $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots$

Residyn: $\mathrm{Res}\{f, z_0\} = a_{-1}$ {L:utv. enda sättet}

def. z_0 pol ordn. m $\Leftrightarrow$ ändligt många neg pot. som börjar i m.

Ex: $\frac{1}{1-z} = -1 \cdot \frac{1}{z-1}$

Residyn:

$$f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + \dots$$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\} = (m-1)!\, a_{-1} + \dots$$

$$z = z_0 \Rightarrow \mathrm{Res}\{f, z_0\} = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}\Big|_{z=z_0}$$

Sats

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \begin{cases} \neq \infty \Rightarrow \text{hävbar sing.} \\ = \infty \Rightarrow \text{pol} \\ \text{existerar ej} \Rightarrow \text{väsentlig sing.} \end{cases}$$

Sats $0 < \left| \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) \right| < \infty \Rightarrow$ pol ordn. m

Primitiv funktion.

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \Big[F(z) \Big]_{z_1}^{z_2} \quad \text{om } f(z) \text{ analytisk på } C_1$$

Approximering vid residyberäkning.

Ex $\quad f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z} \qquad \mathrm{Res}\{f, 0\} = ?$

- $\sin z \approx z \quad \Rightarrow f \approx \dfrac{e^z}{z} \quad \Rightarrow \mathrm{Res}\{f,0\} = e^0 = 1$

Beräkning av reell integral med residykalkyl.

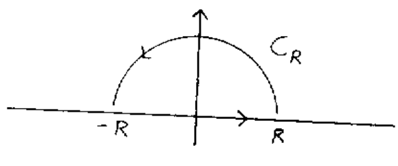
I, $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\text{funktion av } \sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$

$C: |z| = 1 \qquad z = e^{i\theta} \qquad d\theta = \dfrac{1}{iz} dz$

$\cos\theta = \dfrac{z + 1/z}{2} \qquad \sin\theta = \dfrac{z - 1/z}{2i}$

$$\Longrightarrow \int_{|z|=1} \left(\text{funktion av } \frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\right) \frac{1}{iz}\, dz$$

II, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \qquad P, Q$ polynom



$\Gamma = [-R, R] \cup C_R$

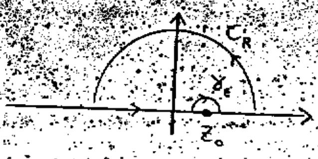
Om man kan visa att $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \to 0$

Så är $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{z_k} \mathrm{Res}\left\{\frac{P}{Q}, z_k\right\}$

z_k = singularitet i övre halvplanet.

Integraler (reella) singulära på x-axeln.

typ III, $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}\, dz$



$\gamma_3: \; z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$

$$\int_{-R}^{z_0-\varepsilon} + \int_{\gamma_3} + \int_{z_0+\varepsilon}^{R} + \int_{C_R} = \int_{\Gamma} = 2\pi i \cdot \sum \text{Res}$$

$\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)dz$ kan vara besvärlig $\Rightarrow$ dela upp f i singulär (polerna) och analytisk del: $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ φ anal.

Taylorutv. $\varphi \Rightarrow \varphi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$

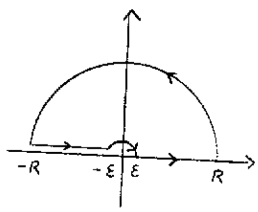
alla termer med potens $\geq m$ blir försumbara då $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow$ Beräkna $a_0, \ldots, a_{m-1}$ och $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{(z-z_0)^{k+1}}$

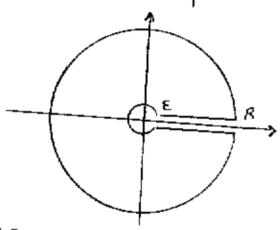
{Mycket lätt om $m=1$.}

typ IV, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x \, dx$

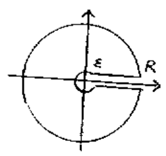
Jämn integrand $\Rightarrow$ $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \text{Log}(z)$



Annars $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} (\text{Log}(z))^2$



typ V, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\beta}{P(x)} dx$ $\quad f(z) = \dfrac{e^{\beta \log z}}{P(z)}$



$0 < \arg z < 2\pi$

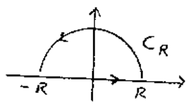
III, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \left\{ \begin{matrix} \sin ax \\ \cos ax \end{matrix} \right\} dx = I$

<u>sätt:</u> $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$

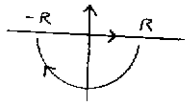
$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax = Im\{f(x)\}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax = Re\{f(x)\}$$

<u>$a \geq 0$</u>



<u>$a < 0$</u>



<u>Visa:</u> $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz \longrightarrow 0$ då $z \to \infty$

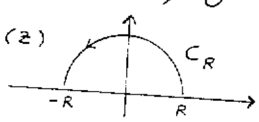
$$\Longrightarrow \quad I = \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{z_k} Res\{f, z_k\}$$

z_k = singularitet i aktuellt halvplan.

Jordans lemma

Om $|f(z)| \leq \dfrac{\mu}{|z|^k}$ $\quad k > 0 \quad \forall z : |z| \geq R_0$ som tillhör övre halvplanet så gäller

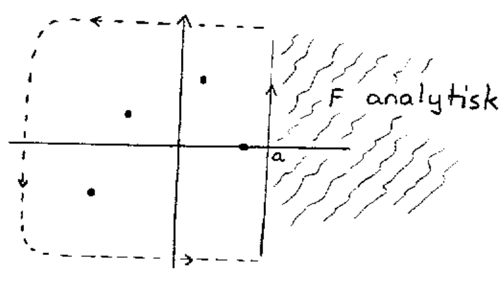
$$\int_{C_R} f(z) e^{-itz} dz \;, \quad t \geq 0 \longrightarrow 0 \quad \text{då} \quad R \longrightarrow \infty$$



Laplace transform.

<u>def:</u> $\displaystyle F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$

<u>sats:</u> $\displaystyle f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)\, e^{st} ds$



Stabilitet:

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{svart låda}} \longrightarrow y(t)$

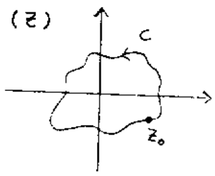
def. systemet stabilt omm $x(t)$ begr. $\Rightarrow$ $y(t)$ begr.

Om sambandet mellan x & y är en ODE så är

$Y(s) = F(s)X(s)$ där $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ P, Q polynom.

Sats:
- Systemet är stabilt om alla F:s poler är i det vänstra halvplanet.
- Systemet är marginellt instabilt om F har enkelpoler på Im-axeln och övriga poler i vhp.
- I annat fall är systemet instabilt.

Argumentprincipen.



C enkel, sluten, styckvis glatt

f analytisk och $\neq 0$ på C

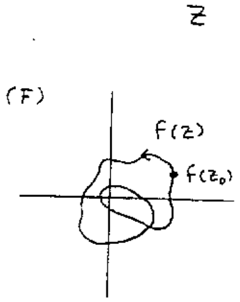
f anal i C undantaget ändligt många poler

$$\Rightarrow \quad N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(z)$$

där N = antal nollställen med multiplicetet som f har i C:s inre

P = antal poler med mult. i C:s inre

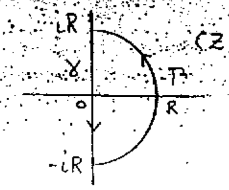
$\Delta_c \arg f(z)$ = ändringen i f:s argument då z genomlöper C ett varv.



Nyquist

Hur många nollställen har $f(z)$ i hhp ?

tag C:



rita $f(C) \Rightarrow$ antal varv kring origo $= N - P$

Ex $\quad f(z) = z^2 + 2z + 4$

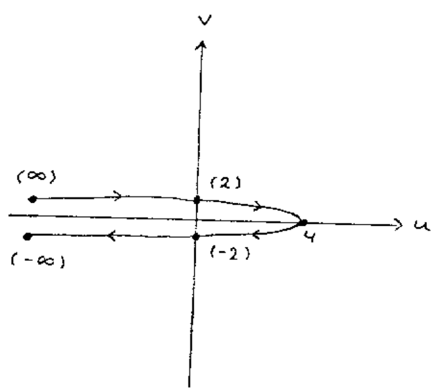
γ: $\quad z = iy \Rightarrow f = -y^2 + 2iy + 4 \Rightarrow \quad u = 4 - y^2$
$\qquad v = 2y$

$u = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

$v = 0 \Rightarrow y = 0$

y	$-\infty$	$-R$	-2	0	2	R	∞
u	$-\infty$ störst	$-$	$-0+$	4	$+0-$	$-$	$-\infty$ störst
v	$-\infty$	$-$	$-$	$-0+$	$+$	$+$	∞

$\longleftarrow$

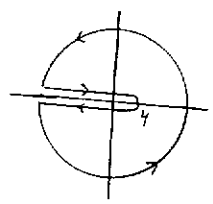


Γ: $\quad f(z) = z^2\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2}\right)$

$\arg f(z) = \arg z^2 + \arg\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2}\right) \approx \{R \to \infty\} \approx$

$\approx \arg z^2 = 2 \arg z$

13.



$\Rightarrow$ noll varv $\Rightarrow$ inga nollst. i hhp.

$f(z) - b = 0$ har nollst i hhp om $b > 4$

Rouches' sats

C enkel, sluten, styckvis glatt

f, g analytiska på och i C

På C är $|f| > |g|$

$\Rightarrow$ f+g och f har lika många nollställen

Konforma avbildningar.

def. En konform avbildning avbildar vinklar till storlek och riktning

sats f analytisk i z_0, $f'(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ f konform avbildning i z_0

(bevarar vinklar med spets i z_0)

$\mathcal{Z}$-transform.

Löser differensekvationer p.s.s. som Laplace transform löser differential ekv.

def. $F(z) = \mathcal{Z}\{f(n)\} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \dots + \frac{f(k)}{z^k} + \dots$

Sats: $\mathcal{Z}\{f(n+k)\} = z^k\,\mathcal{Z}\{f(n)\} - z^k f(0) - z^{k-1} f(1) - \dots - z f(k-1)$

Invers $\mathcal{Z}$-transform.

Laurent utveckla F(z) kring $z_0 = 0$

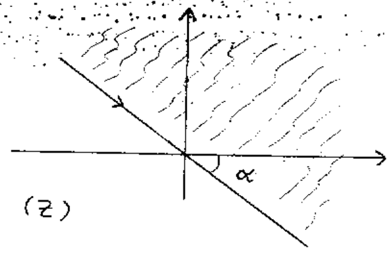
$\Rightarrow F(z) = \dots + \frac{a_{-k}}{z^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l + \dots$

saknas positiva potenser så finns f(n) och

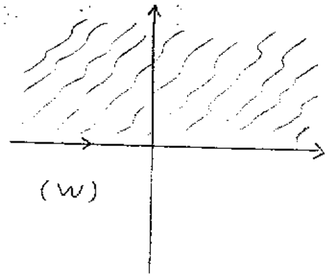
$f(n) = a_{-n} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

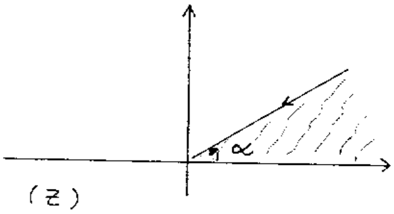
$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z)\, z^{n-1}\, dz$$

Några konforma avbildningar.

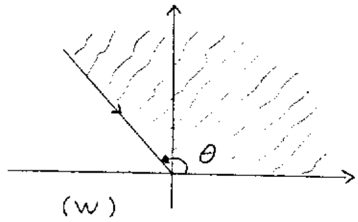


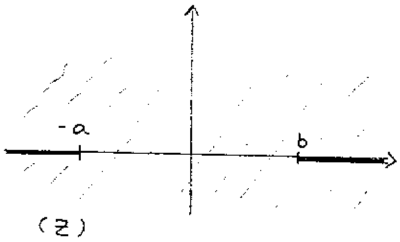
$w = e^{i\alpha} \cdot z$





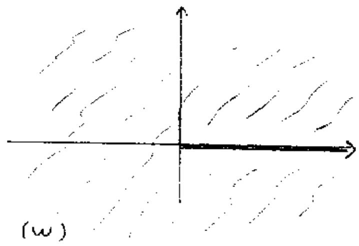
$w = z^{\theta/\alpha}$

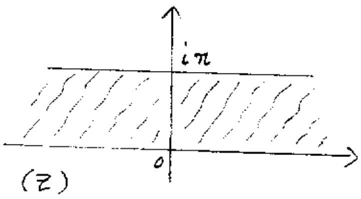




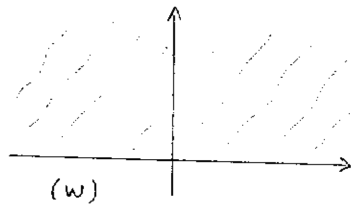
$w = \dfrac{z-b}{z+a}$

specialfall av möbius





$w = e^{z}$



Möbius $\quad w = \dfrac{az+b}{cz+d} = K\,\dfrac{z-p}{z-q}$

avbildar

cirkel → cirkel		rand → rand
cirkel → linje		inre pnkt → inre pnkt
linje → cirkel		
linje → linje		

Bestäm hur 3 punkter ska avbildas ⇒

⇒ K, p, q bestämda.

Examination:

Tentamensskrivningen innehåller fem problemuppgifter (tillsammans 35 p) samt tre teoriuppgifter (tillsammans 15 p). För "godkänd" krävs minst 20 p, varav minst 10 p på problemdelen samt minst 5 p på teoridelen. Minst 10 av teoriuppgifternas 15 p hämtas från nedanstående lista:

1. 2.3-10, CVA s. 61
2. Theorem 3, CVA s. 62 (samt stencil)
3. 4.2-16, CVA s. 156
4. Theorem 2, CVA s. 162
5. Morera's theorem, CVA uppgift 11, s. 168 (samt stencil)
6. Theorem 7, CVA s. 182
7. Theorem 8, CVA s. 185
8. Theorem 13, CVA s. 194
9. Theorem 15, CVA s. 236
10. Theorem 19, CVA s. 279
11. 7.1-9, CVA s. 418
12. Sats 3.2, KH s. 16
13. B5-7, CVA s. 300 z-transf
14. B5-18, CVA s. 304 z-transf
15. Theorem 5, CVA s. 450
16. Theorem 6, CVA s. 458
17. Rouché's theorem, uppgift 8, CVA s. 463
18. The Fundamental Theorem of Algebra, CVA uppgift 9, s. 463
19. Theorem 1, CVA s. 494

Tillåtna tentamenshjälpmedel är endast de formelblad (tabeller för Laplacetransform & z-transform) som delas ut på föreläsningarna samt vid tentamenstillfället.

En inlämningsuppgift (med anknytning till kursen i Passiva och aktiva elnät) samt tre datorlaborationsuppgifter (i vilka Matlab används för att illustrera delar ur kursen) delas ut under läsvecka 5. Laborationerna och inlämningsuppgiften är ej obligatoriska och ger tillsammans maximalt 2 bonuspoäng. Bonuspoängen gäller t.o.m. omtentamensperioden i augusti 1999.

Bevis sammanfattningar.

1. **Sats:** Om $f'(z_0)$ existerar så är C-R uppfyllda i z_0

Bevis: $f'(z_0) = \lim_{dz \to 0} \frac{f(z_0+dz)-f(z_0)}{dz}$

1, $dz = dx \Rightarrow f_1'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

2, $dz = i\,dy \Rightarrow f_2'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

$f_1' = f_2' \Rightarrow$ C - R

---

2. **Sats:** C-R uppfyllda, $u,v \in C^1 \Longrightarrow f'(z_0)$ existerar

Bevis: $u,v \in C^1 \Longrightarrow$ 1:a ordningens Taylorutveckling finns.

$\Delta z = h+ik$

$$u(x_0+h, y_0+k) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

$$v(x_0+h, y_0+k) = v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k + \varepsilon_3 h + \varepsilon_4 k$$

Byt $\frac{\partial u}{\partial y}$ mot $-\frac{\partial v}{\partial x}$ och $\frac{\partial v}{\partial y}$ mot $\frac{\partial u}{\partial x}$ $\Longrightarrow$

$$f(z_0+\Delta z) = f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta z + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta z + (\varepsilon_1+\varepsilon_3)h + (\varepsilon_2+\varepsilon_4)k$$

$$\Longrightarrow \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h}{\Delta z}(\varepsilon_1+\varepsilon_3) + \frac{k}{\Delta z}(\varepsilon_2+\varepsilon_4)$$

Men $\left|\frac{h}{\Delta z}\right| = \frac{|h|}{|h+ik|} < 1$ och $\varepsilon_i \to 0$ då $\Delta z \to 0$ enl. medelvärdessatsen

$$\Longrightarrow f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

existerar ty C^1

3. ML olikheten

Sats: $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$ där $\begin{cases} M \ge \max_{z \in C} |f(z)| \\ L \ge \text{kurvans längd} \end{cases}$

Bevis: $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \{\text{Swarts olikhet}\} \le \int_C |f(z)| \cdot |dz| \le$

$\le \int_C M \cdot |dz|$

Enligt integralens def. $\int_C M \cdot |dz| = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{s.a. } |\Delta z_k| \to 0}} \sum_{l=1}^{n} M \cdot |\Delta z_l|$

där $\Delta z_n = z_n - z_{n-1}$

$\Longrightarrow \int_C M \cdot |dz| = M \cdot \sum_{l=1}^{n} |\Delta z_l| \le M \cdot L$

---

4. Cauchys integralsats (C-G)

Sats: $\left.\begin{array}{l} C \text{ enkel, sluten och styckvis glatt.} \\ f \text{ analytisk på och innanför } C \end{array}\right\} \Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$

Bevis:

$dz = dx + i\,dy$
$f = u + iv$

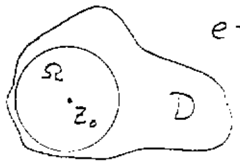
$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i \int_C v\,dx + u\,dy = \{\text{Greens sats}\} =$$

$$= \int_E \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ enl. C-R}} dx\,dy + i \int_E \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ enl. C-R}} dx\,dy = 0$$

5. Moreras sats.

<u>Sats.</u> f kontinuerlig i D och $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för alla trianglar γ som ligger tillsammans med sitt inre i D. D är ett öppet område. $\Longrightarrow$ f analytisk i D

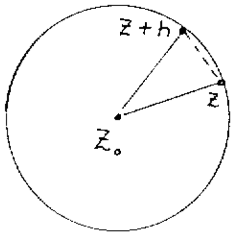
<u>Bevis:</u>



Varje punkt z_0 i D har en omgivning i D eftersom D är ett öppet område.

f analytisk i alla sådana omgivn. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f analytisk i D.

Givet z_0 definiera $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ där integrering sker längs sidan på en triangel.



$$\Rightarrow \quad F(z+h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\,d\zeta$$

ty integralen runt triangeln $= 0$

$$\Longrightarrow \quad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} \{f(\zeta) - f(z)\}\,d\zeta$$

H.L $= 0$ $\Rightarrow$ F analytisk i triangeln (godtycklig) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f analytisk i Ω

f kontinuerlig $\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ s.a. $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ om $|\zeta - z| < \delta$. $|\zeta - z| \le h$ $\Rightarrow$ $h < \delta$

ML olikheten ger: $\left| \int_{z}^{z+h} \{f(\zeta) - f(z)\} \right| \le \varepsilon \cdot |h|$ för $h < \delta$

$$\Longrightarrow \quad \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| \le \varepsilon$$

ε godtyckligt $\Rightarrow$ $f(z) = \dfrac{F(z+h)-F(z)}{h}$ $\quad \forall h < \delta$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ F analytisk $\Rightarrow$ f analytisk

6. Cauchys integralformel:

Sats: Om C är en sluten kurva i D och f är analytisk i D samt z_0 tillhör D:s inre så gäller:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Bevis: C_0 är en cirkel med radie r och medelpunkt z_0. C_0 tillhör D.

Deformationsprincipen $\Longrightarrow \int_C \cdots = \int_{C_0} \cdots$

$\Longrightarrow$ satsen bevisad om $\int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i\, f(z_0) = 0$

$$\left| \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - 2\pi i\, f(z_0) \right| = \left| \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} \cdot f(z_0) \right| =$$

$$= \{ f(z_0) = \text{konst} \} = \left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq M \cdot L = M \cdot 2\pi r$$

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq M$$

ε, δ: $f(z)$ analytisk $\Rightarrow$ $f(z)$ kontinuerlig $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ s.a. $|z - z_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Välj C_0 så att $r = |z - z_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow M = \frac{\varepsilon}{r}$

$$\Longrightarrow \left| \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Longrightarrow \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i \cdot f(z_0) = 0 \quad \blacksquare$$

7. Utökning av Cauchys integralformel.

Sats: samma förutsättningar $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

Visa att: $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$

Bevis: $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Anv. Cauchys integralformel och sätt på gemensamt bråkstreck.

$$\Longrightarrow f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(w)\,dw}{(w-(z_0+\Delta z))(w-z_0)}$$

Om integralen är likformigt konv. kan gränsvärdet flyttas in, men att kolla likformig konv. är mer arbetskrävande än att visa att:

$$\left| \int_c \frac{f(w)\,dw}{(w-(z_0+\Delta z))(w-z_0)} - \int_c \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^2} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{gemensamt} \\ \text{bråkstreck} \end{array} \right\} =$$

$$= \Delta z \left| \int_c \frac{f(w)\,dw}{(w-(z_0+\Delta z))(w-z_0)^2} \right| \to 0 \text{ då } \Delta z \to 0$$

Vilket ger påståendet. $\square$

8. Liouvilles sats.

Sats: $f(z)$ är en hel funktion. $|f(z)| \le M \;\; \forall z \in \mathbb{C}$
$\Longrightarrow f \equiv \text{konst.}$

Bevis: Låt C_0 vara en cirkel med medelpunkt z_0 och radie R.

Cauchys integralformel $\Rightarrow f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$

ML uppskattningen $\Rightarrow |f'(z_0)| \le \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \dfrac{M}{R}$

R godtycklig $\Rightarrow f'(z_0) = 0$

z_0 godtycklig $\Rightarrow f'(z) = 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f \equiv \text{konst}$ $\square$

9. Taylor utveckling.

Sats: f analytisk för $|z-z_0| < R \Rightarrow f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

med konvergensradie R.

Bevis: Låt C_0 vara en cirkel med medelpunkt z_0 och radie $b \le R$.

Cauchys int. formel: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_0} \frac{f(w)}{w-z}\, dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)\cdot dw}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\, dw =$$

$$= \{\text{Geometrisk summa}\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(w)}{w-z_0} \left(1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2 + \dots\right) dw =$$

$$= \{\text{Byt plats på } \textstyle\int \text{ och } \Sigma\} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_0} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n =$$

$$= \{\text{Cauchys int. formel}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$\square$

10. **Isolerade nollställen.**

Sats: Analytiska funktioner f har antingen isolerade nollställen, inga nollställen eller också är $f \equiv 0$.

Bevis: Låt z_0 vara ett nollställe.

f analytisk $\Rightarrow$ Taylorutveckling finns.

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

$z_0 =$ nollställe $\Rightarrow a_0 = 0$

$f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, a_m \neq 0$ s.a. $f(z) = a_m(z-z_0)^m + \dots =$

$$= (z-z_0)^m (a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots) = (z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$$

$a_m \neq 0 \Rightarrow \varphi(z_0) \neq 0$

f anal $\Rightarrow \varphi$ anal $\Rightarrow \varphi$ kont $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.a.

$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \varepsilon$ då $|z-z_0| < \delta$

Välj $\varepsilon = \dfrac{|\varphi(z_0)|}{2} \Rightarrow \varphi(z) \neq 0$ då $|z-z_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ issolerat nollställe.

---

11. **Laplace transformen av derivator** (L07)

sats:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - \underbrace{s^0}_{=1} f^{(n-1)}(0)$$

Bevis:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt \quad \text{per definition.}$$

$n \in \mathbb{N}$

induktion

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = \int_0^\infty \underset{\uparrow}{f^{(n)}(t)}\, \underset{\downarrow}{e^{-st}}\, dt = \{PI\} = \left[f^{(n-1)}(t) e^{-st}\right]_0^\infty +$$

$$+ \int_0^\infty f^{(n-1)}(t)\, s e^{-st}\, dt = -f^{(n-1)}(0) + s\,\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\}$$

slutsats

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = -f^{(n-1)}(0) + s\,\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\} = -f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) +$$

$$+ s^2 \mathcal{L}\{f^{(n-2)}(t)\} = \dots = \text{påst.}$$

Invers Laplacetransform.

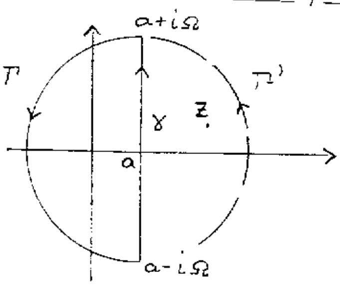
Sats Om $g(s)$ är analytisk i hela $\mathbb{C}$, undantaget ändligt många singulära punkter s_k och $g(s) \to 0$ då $s \to \infty$ så är $g(s)$ Laplacetransformen av:

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}\{ g(s)e^{st}, s_k \}$$

Dessutom gäller att om $\operatorname{Re}\{s_k\} < a \quad \forall k$ så är

$$\lim_{\Omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s) e^{st} ds = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Bevis 1) Har f en Laplacetransform ?



$C = \gamma \cup \Gamma$

$D = \Gamma \cup \Gamma'$

för tillräckligt stora a o Ω tillhör s_k C:s inre $\forall k$

Residysatsen baklänges $\Rightarrow \quad f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C g(s) e^{st} ds \qquad (1)$

$$\Rightarrow \quad |f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C |g(s)| \cdot e^{\operatorname{Re}\{s\} \cdot t} |ds| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{M_\Omega L_\Omega}_{\text{konst.}} e^{at} = C \cdot e^{at}$$

$\Rightarrow$ Laplacetransform finns.

2) Är den $g(s)$?

$$g(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{stoppa in } f \text{ enl. (1)} \\ \text{byt integrationsordn.} \\ \text{dela upp } C \text{ i } \gamma \text{ o } \Gamma \end{array} \right\} = \left\{ \int_0^\infty e^{-(z-s)t} dt = \frac{1}{z-s} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(s)}{s-z} ds \qquad (2)$$

12 forts.

$$g(z) = \{\text{Cauchys int. formel}\} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(s)}{s-z}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{g(s)}{s-z}\,ds \quad (3)$$

$$(2) \text{ o } (3) \Rightarrow \quad g(z) - \int_0^\infty f(t)e^{-zt} = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{g(s)}{s-z}\,ds$$

$$ML + g(s) \to 0 \text{ då } \underset{(\Omega\to\infty)}{s\to\infty} \Rightarrow \quad g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad g(z) = \mathcal{L}\{f\}(z)$$ $\left\{\begin{array}{l}\text{för } t>0 \text{ ty det var i} \\ \text{detta omr. vi integrerade}\end{array}\right.$

3, Integralen.

- För $t>0$ gäller att:

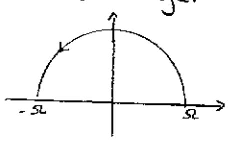
$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}\{g(s)e^{st}, s_k\} = (1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(s)e^{st}\,ds$$

där $\int_{\Gamma} \to 0$ enl. Jordans lemma. $\left\{\begin{array}{l} z = -i(s-a) \\ \Rightarrow s = iz + a\end{array}\right.$

- För $t<0$: $\quad \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma' \cup (-\gamma)} g(s)e^{st}\,ds = \{C-G\} = 0$

Variabelsubstitutionen $w = i(s-a)$ ger

$\int_{\Gamma'} \rightsquigarrow \int_{\Gamma''}$ där $\Gamma'' =$



$$\int_{\Gamma'} g(s)e^{st}\,dt = -i\int_{\Gamma''} g(a-iw)e^{(a-iw)t}\,dw \to 0$$

enl. Jordans lemma $\left\{\begin{array}{l}\text{där } t<0 \\ \Rightarrow -t>0\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_{a-i\Omega}^{a+i\Omega} g(s)e^{st}\,ds \to 0 \quad \text{då } \Omega\to\infty$$

13. $\mathcal{Z}$-transform av $f(n+1)$

Sats: $$\mathcal{Z}\{f(n+1)\} = z \cdot \mathcal{Z}\{f(n)\} - z \cdot f(0)$$

Bevis:

def. $$\mathcal{Z}\{f(n)\} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{f(n+1)\} = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \dots =$$

$$= z \cdot \left(\frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \dots \right) = z \cdot \mathcal{Z}\{f(n)\} - z \cdot f(0)$$

---

14. Invers $\mathcal{Z}$-transform av en produkt.

Sats: $$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z) \cdot G(z)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) g(n-k)$$

Bevis:

- $$\mathcal{Z}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f(k) g(n-k) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(k) g(n-k) \right) z^{-n}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(k) = a_k \\ g(k) = b_k \\ a_k, b_k = 0 \text{ om } k < 0 \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^{-n}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

$$G(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{-l}$$

- $$F(z) \cdot G(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots) =$$

$$= \text{Cauchy's regel} = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{-1} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^{-n}$$

15. **Vilkor för stabilitet.**

Sats $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ överföringsfunktion P, Q polynom

- Om F har alla poler i vhp så är systemet stabilt
- Om F har enkelpoler på Im-axeln och övr. poler i vhp så är syst. marginellt instabilt.
- I övriga fall så är systemet instabilt.

Bevis

F är singulär då $Q = 0$ (poler)

Q polynom $\Rightarrow Q = A(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (s-s_N)^{n_N}$

Viktiga biten

$$f(t) = \sum_k \mathrm{Res}\{F(s)e^{st}, s_k\}$$

$$\mathrm{Res}\{F(s)e^{st}, s_1\} = C \frac{d^{n_1-1}}{ds^{n_1-1}}(s-s_1)^{n_1} F(s)e^{st}\Big|_{s=s_1} \sim$$

$\sim$ Linjär komb. av $e^{s_1 t}, \ldots, t^{n_1-1}e^{s_1 t}$

$\Rightarrow$ Stabil om $\mathrm{Re}\{s_1\} < 0$ eller $\mathrm{Re}\{s\} = 0$ och $n_1 = 1$

Instabil om $\mathrm{Re}\{s_1\} > 0$

$s_2, \ldots, s_N$ p.s.s

Fallet $\mathrm{Re}\{s_1\} = 0$, $n = 1$ kan gå över i en instabilitet om insignalen också har s_1 som pol

$\Rightarrow$ marginellt instabilt

16. Argumentprincipen

Sats Om C är enkel, sluten, styckvis glatt och f är analytisk och $\neq 0$ på C samt analytisk i C:s inre undantaget ändligt många poler så är:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(z)$$

N = antal nollställen med mult. som f har i C
P = —"— poler —————"—————

Bevis Integrering av $\int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ på två sätt.

1. Omslut C med ett omr. där f är analytisk (och antag att varje lokal logaritm har en analytisk fortsättning)

$$\int_c \cdots = \int_c \frac{d}{dz}(\log f(z))\, dz = \log f(z_{0S}) - \log f(z_{0B}) = i \Delta_c \arg f(z)$$

ändringen i argumentet

2. $\frac{f'(z)}{f(z)}$ är singulär i f:s poler och i f:s nollställen.

$$\int_c \cdots = 2\pi i \sum_{\substack{f:s\ poler \\ f:s\ nollst}} \text{Res}\left\{\frac{f'}{f}\right\}$$

z_1 nollst. till f, mult. $n \Rightarrow f(z) = (z-z_1)^n \varphi(z)$

$\Rightarrow f'(z) = n(z-z_1)^{n-1}\varphi(z) + (z-z_1)^n \varphi'(z) \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{n}{z-z_1} + \frac{\varphi'}{\varphi}$ anal

$\Rightarrow \text{Res}\left\{\frac{f'}{f}, z_1\right\} = n \Rightarrow \sum_{nollst.} \text{Res} = N$

z_2 pol till f, ordn. $p \Rightarrow f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_2)^p}$

$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \ldots = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{p}{z-z_2} \Rightarrow \text{Res}\left\{\frac{f'}{f}, z_2\right\} = -p \Rightarrow \sum_{poler} \text{Res} = -P$

$$\Rightarrow \int_c \cdots = 2\pi i (N-P) = \int_c \cdots = i \Delta_c \arg f(z)$$

17. Rouches' sats.

Sats. C enkel, sluten, styckvis glatt
f, g analytiska på och i C
På C är $|f(z)| > |g(z)|$

$\Rightarrow$ $f+g$ och f har lika många nollställen i C

Bevis

$$\arg_x(f+g) = \arg_x\left(f\left(1+\frac{g}{f}\right)\right) \underset{\uparrow}{=} \arg_x(f) + \arg_x\left(1+\frac{g}{f}\right)$$

ty samma gren

men $1+\frac{g}{f}$ kan inte gå runt origo eftersom $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$

$\Rightarrow$ $\arg(f+g) = \arg(f)$ $\Rightarrow$ $\Delta_c \arg(f+g) = \Delta_c \arg(f)$

f, g analytiska $\Rightarrow$ inga poler

Argumentprincipen ger nu $N_{f+g} = N_f$

18. Algebrans fundamentalsats.

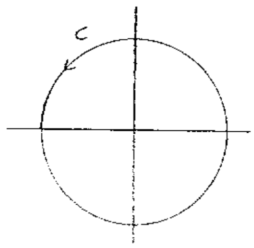
Sats. Ett polynom av grad n har exakt n:st nollställen.

Bevis

Använd Rouches' sats.

$P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$

tag $f(z) = a_n z^n$
$g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$
$C: |z| = R$



För tillräckligt stort R gäller $|f(z)| > |g(z)|$ på C

ty $\dfrac{|f|}{|g|} = \dfrac{|a_n| R^n}{|a_{n-1} R^{n-1} + \dots + a_0|} \geq \dfrac{|a_n| R^n}{|a_{n-1}| R^{n-1} + \dots + |a_0|} \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty$

$f = a_n z^n = 0 \Rightarrow z^n = 0 \Rightarrow z = 0$ nollst. mult. n

$\Rightarrow$ $f+g$ har n:st rötter i C då $R \to \infty$

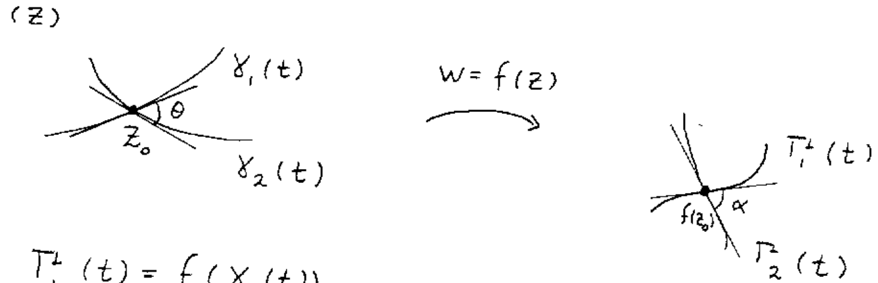
19. Konform avbildning

Sats f analytisk i z_0, $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f konform avbildning i z_0

(bevarar vinklar med spets i z_0)

Bevis



$$\Gamma_1(t) = f(\gamma_1(t))$$

$$\Gamma_2(t) = f(\gamma_2(t))$$

$$z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$$

Tangenten till $\gamma = x + iy$ är $x' + iy' = \gamma'(t)$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arg_x \gamma_1'(t_0) - \arg_x \gamma_2'(t_0)$$

$$\Gamma' = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \{\text{kedjeregeln}\} = f'(z_0) \cdot \gamma'(t)$$

$$\arg_{xx} \Gamma = \arg_{xx} f'(z) + \arg_{xx} \gamma'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arg_{xx} f'(z_0) + \arg_{xx} \gamma_1'(t_0) - \arg_{xx} f'(z_0) - \arg_{xx} \gamma_2'(t_0) = \theta$$

$\blacksquare$