Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Måndagen 21 oktober 2013, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Tobias Wenger, tel. 0730-38 14 53, besöker tentamenssalarna c:a kl. 9.30 och 11.30.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng.

Rättningsgranskning tisd. 12 november kl. 12-13, rum O6102.

Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$, där $\vec{r}_0 = \frac{a}{5}(\hat{x} - 4\hat{y} - 3\hat{z})$?

b) Vad är värdet av integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där kurvan C parametriseras enligt $(x, y, z) = (1 + 2\cos 6\tau, 1 + 2\sin 6\tau, 1 + 4\sin 12\tau)$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{y\hat{x}-x\hat{y}}{x^2+y^2}$?

c) I två dimensioner kan man, förutom skalärprodukten, definiera en "kryssprodukt" av två vektorer där resultatet är en skalär,

$$\vec{a} \star \vec{b} = \epsilon_{ij} a_i b_j \ .$$

För vilka värden på talen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gäller

$$\nabla(\vec{a} \star \vec{b}) = \alpha\vec{a}(\nabla \star \vec{b}) + \beta(\vec{a} \star \nabla)\vec{b} + \gamma\vec{b}(\nabla \star \vec{a}) + \delta(\vec{b} \star \nabla)\vec{a} \ ?$$

2. En yta S ges i cylindriska koordinater av $\varrho = 4(\frac{a}{2} - z)$, $z \geq 0$, och har normalen riktad så att $\vec{n} \cdot \hat{z} > 0$. Vektorfältet $\vec{F}$ är det resulterande fältet från en punktkälla q i punkten $(0, 0, -2a)$ och en ytkälla med konstant ytkälltäthet $\frac{q}{\pi a^2}$ på cirkelskivan $z = 0$, $\varrho \leq a$. Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över S.
(10 poäng)

3. Ett skalärt fält är givet i cylindriska koordinater enligt $f(\vec{r}) = \varrho^2 \cos 2\varphi$. Bestäm, beskriv och rita nivåytorna till f och fältlinjerna till $\vec{F} = -\nabla f$.
(10 poäng)

4. Visa att ett temperaturfält
$$T(\vec{r},t) = T_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^{3/2} e^{-\frac{r^2}{4kt}}\,,$$
där t_0 är en konstant med dimension tid, är en lösning till den homogena värmeledningsekvationen
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) T(\vec{r},t) = 0$$
på $\mathbb{R}^3$ för $t > 0$. Undersök hur temperaturen beter sig för små positiva tider ($t \ll t_0$), och ge ett explicit uttryck för "$\lim_{t\to 0^+} T(\vec{r},t)$".
(10 poäng)

5. På en lång rak tråd finns en elektrisk laddning som är jämnt fördelad längs tråden, med en laddningstäthet (laddning per längdenhet) λ. Tråden befinner sig i vacuum, men omges av en metallcylinder på radien R, vars symmetriaxel sammanfaller med tråden. Inga andra relevanta objekt befinner sig i närheten. Bestäm den elektriska potentialen och det elektriska fältet för alla radier, dvs. både innanför och utanför cylindern. Bekräfta, genom att betrakta det elektriska fältets beteende vid radien R, att cylinderns laddning per längdenhet är $-\lambda$.
(10 poäng)

6. Maxwells ekvationer i vacuum lyder
$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E} &= 0\,,\\
\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= 0\,,\\
\nabla\cdot\vec{B} &= 0\,,\\
\nabla\times\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= 0\,.
\end{aligned}$$
Det elektromagnetiska fältet innehåller energi och rörelsemängd. Energitätheten är
$$\epsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\vec{B}|^2)$$
och energiströmmen (som är proportionell mot rörelsemängdstätheten) ges av den s.k. Poynting-vektorn
$$\vec{k} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\,.$$
Verifiera att dessa två uttryck är dimensionsmässigt korrekta. Visa att energin för elektromagnetiska fält i vacuum (alltså i frånvaro av laddning och ström) är bevarad, dvs. att ϵ och $\vec{k}$ uppfyller kontinuitetsekvationen.
(10 poäng)

Lösningsförslag till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Onsdagen 21 augusti 2013, 14.00-18.00

---

1. a) 0

   b) -12π

   c) $1, 1, -1, -1$

2. Ytan S är mantelytan till en kon, som är unionen av alla raka sträckor mellan spetsen i punkten $(0, 0, \frac{a}{2}$ och punkter på cirkeln i xy-planet med radie $2a$ och centrum i origo.

   Ytkällan, med total laddning q är placerad så att flödet från den är symmetrisk om man vänder den upp och ned ($z \to -z$), och därför bidrager den med $\frac{q}{2}$. För att beräkna punktkällans bidrag räcker det att veta vilken rymdvinkel ytan upptar. Det är samma rymdvinkel som en sfärisk kalott som begränsas av cirkeln $\theta = \frac{\pi}{4}$, varför

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sin\theta = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) .$$

   Integralens värde blir

$$\frac{q}{2} + \frac{q}{4\pi} 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = q\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

3. Funktionen f kan enklast skrivas som $f = x^2 - y^2$. Nivåytorna är hyperboliska cylindrar $y = \pm\sqrt{x^2 - f}$. Vektorfältet är $\vec{F} = 2(x\hat{x} - y\hat{y})$. Standardräkning för fältlinjer ger vid handen att de är hyperblerna $xy =$ konst., $z = z_0$.

   Undersökningen kan också göras i cylindriska koordinater.

4. Direkt insättning ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) &= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{2} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}} + t^{-\frac{3}{2}} \frac{r^2}{4kt^2} e^{-\frac{r^2}{4kt}}\right) \\
&= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{r^2}{4kt}} \left(-\frac{3}{2} + \frac{r^2}{4kt}\right) , \\
\Delta T(\vec{r}, t) &= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \partial_i \left(\frac{x_i}{2kt} e^{-\frac{r^2}{4kt}}\right) \\
&= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2kt} - \frac{r^2}{(2kt)^2}\right) \\
&= T_0 t_0^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{5}{2}} k^{-1} e^{-\frac{r^2}{4kt}} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{4kt}\right) .
\end{aligned}$$

   Integralen av $T(\vec{r}, t)$ över hela $\mathbb{R}^3$ är $(4\pi k t_0)^{3/2}$, oberoende av t. Samtidigt är $\lim_{t\to 0^+} T(\vec{r}, t) = 0$ för alla $\vec{r} \neq 0$. Därför är $T(\vec{r}, 0^+) = (4\pi k t_0)^{3/2} \delta^3(\vec{r})$.

5. I områdena $0 < \varrho < a$ och $a < \varrho$ gäller Laplaces ekvation för den elektrostatiska potentialen, som alltså har formen
$$\phi = A \log \frac{\varrho}{\varrho_0} + B$$
i vart och ett av områdena (sålänge $A \neq 0$ är konstanten B onödig, samma sak ryms i ϱ_0). På cylindern skall ϕ vara konstant, och vi kan välja den till noll. Värdet på A för det inre området bestäms av närvaron av linjekällan till $-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$. Potentialen skall vara kontinuerlig på cylinderna. Hela lösningen är då:
$$\phi = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\varrho}{R}\,, & 0 < \varrho < a\,, \\ 0\,, & a < \varrho\,. \end{cases}$$

Det elektriska fältet $\vec{E} = -\nabla\phi$ är
$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \varrho}\hat{\varrho}\,, & 0 < \varrho < a\,, \\ 0\,, & a < \varrho\,. \end{cases}$$

Dess diskontinuitet vid $\varrho = R$ är
$$(E_\varrho)_+ - (E_\varrho)_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$
Ytladdningens storlek är ϵ_0 gånger detta, vilket ger en laddning $-\lambda$ per längdenhet på cylindern.

6. För att kontrollera dimensionerna kan man t.ex. luta sig på dimensionerna hos Lorentzkraften "$F = qE + \ldots$".

Kontrollen av kontinuitetsekvationen kan göras genom direkt insättning av uttrycken för täthet och ström i den. Man använder då lämpligen $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$.