Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 21 augusti 2012, 14-18, V
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 poäng per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0 b(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2+y^2)$ och kurvan C parametriseras enligt $(x,y,z) = (b\cos t, c\sin t, 0)$, $0 \le t < \pi$, och där b och c är positiva konstanter.

b) Beräkna $\int_0^\infty \delta(\cos x)\frac{\sin x}{x+\frac{\pi}{2}}\,dx$.

c) Låt $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ vara vektorer med komponenterna a_i, b_i resp. c_i i ett cartesiskt system. Definiera den antisymmetriska matrisen $\mathbf{B}$ genom dess matriselement: $B_{ij} = \varepsilon_{ijk}b^k$. För vilket värde på konstanten α sammanfaller uttrycket $\alpha\mathbf{a}^t\mathbf{B}\mathbf{c}$ med den skalära trippelprodukten $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$?

2. Vektorfältet $\vec{H}$ resulterar från käll- och virvelfördelningarna:
i) Ytkällor, båda med den konstanta ytkälltätheten σ, på cirkelskivorna $x^2+y^2 \le a^2$, $z = \pm a$;
ii) Virveltrådar, alla tre med styrkan j, riktade i positiv φ-led, belägna på cirklarna $x^2+y^2 = a^2$, $z = 0, \pm a$.
Volymen V är en "tårtbit" som begränsas av ytorna

$$\begin{aligned}
S_1 &: \quad \varphi = -\frac{\pi}{8} \\
S_2 &: \quad \varphi = \frac{\pi}{8} \\
S_3 &: \quad z = 2a \\
S_4 &: \quad z = -2a \\
S_5 &: \quad \varrho = 2a
\end{aligned}$$

Låt $\tilde{S}_k$ vara den del av S_k som utgör rand till V, dvs. $\tilde{S}_k = S_k \cap \partial V$. Bestäm
a) $\int_{\partial V}\vec{H}\cdot d\vec{S}$, och
b) $\int_{\partial\tilde{S}_2}\vec{H}\cdot d\vec{r}$.
(10 poäng)

3. Ett vektorfält $\vec{F}$ är givet genom sin potential, $\vec{F} = -\nabla\phi$, där

$$\phi(\vec{r}) = \gamma\frac{\cos^2\theta - \frac{1}{3}}{r^3}$$

(γ är en konstant). Finn ett uttryck för fältlinjerna på formen "$r = f(\theta)$", och skissera dem.
(Eventuell hjälp: $\frac{d}{d\theta}\frac{1}{2}\log(\sin^2\theta\cos\theta) = \cot\theta - \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{3\cos^2\theta-1}{\sin 2\theta}$.)
(10 poäng)

4. En elektriskt laddad partikel med laddning Q befinner sig på avståndet d från en plan (oändligt stor) metallyta. Bestäm den elektriska laddningsfördelning som ansamlas på metallytan, och den totala laddningen på ytan.
(10 poäng)

5. En lång och tunn metalltråd med tvärsnittsarean A, belägen på x-axeln, omges av ett fullständigt värmeisolerande skikt. Tråden har värmeledningsförmågan λ. Vid $x = 0$ tillförs värmeenergi i en konstant takt ϵ (energi/tidsenhet). Vid trådens ändar, som ligger i $x = \pm a$, hålls temperaturen konstant, $T = T_0$. Sök den stationära temperaturfördelningen $T(x)$ som uppstår efter lång tid.
(Glöm inte kolla rimlighet och dimensioner.)
(10 poäng)

6. Bevisa Arkimedes princip för en kropp (delvis) nedsänkt i en inkompressibel vätska! (Eventuella matematiska satser som används behöver inte bevisas.)
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F, FFM232
Tisdagen 21 augusti 2012, 14-18

---

1. a) $-\pi F_0 b$

   b) $\frac{\log 2}{\pi}$

   c) $\alpha = -1$

2. a) Integralen ges av en inneslutna källan. En åttondel av varje cirkelskiva innesluts, och alltså är

$$\int_{\partial V} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \pi a^2 \sigma = \frac{1}{4} \pi a^2 \sigma\,.$$

   b) Normalen till S_2 är enligt konventionen riktad utåt, dvs. i $\hat{\varphi}$-led. ∂S_2 omsluter de tre virveltrådarna i positiv led, och därför är

$$\int_{\partial \tilde{S}_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 3j\,.$$

3. Fältet fås som

$$\vec{F} = -\nabla\phi = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\gamma\frac{\cos^2\theta - \frac{1}{3}}{r^3} = \gamma\frac{\hat{r}(3\cos^2\theta - 1) + \hat{\theta}\sin 2\theta}{r^4}\,.$$

   Fältlinjer fås genom att lösa ekvationen $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = f(\vec{r})\vec{F}(\vec{r})$. Vi observerar att $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \hat{r}\frac{dr}{d\tau} + \hat{\theta} r\frac{d\theta}{d\tau}$, så ekvationerna blir

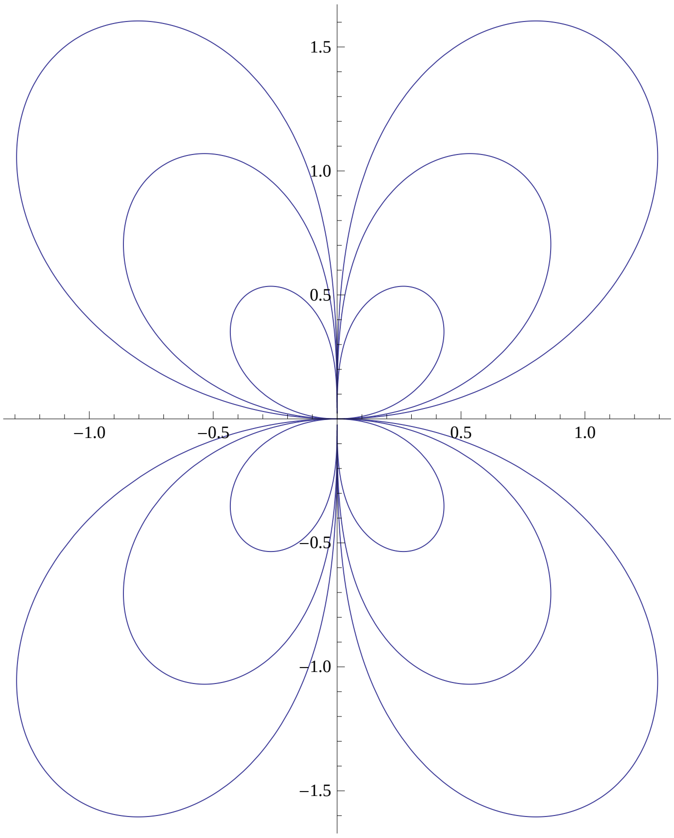
$$\frac{dr}{d\tau} = \gamma f\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\,,$$
$$\frac{d\theta}{d\tau} = \gamma f\frac{\sin 2\theta}{r^5}\,.$$

   Om vi vill identifiera parametern τ med θ måste vi uppenbarligen välja $f = \frac{r^3}{\gamma\sin 2\theta}$. Insättning i den första ekvationen (alternativt dividerar man ekvationerna med varandra) ger

$$\frac{dr}{r} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{\sin 2\theta}d\theta\,,$$

   vilket kan integreras till $\log r = \frac{1}{2}\log(\text{const.} \times \sin^2\theta\cos\theta)$, dvs.

$$r = c\sin\theta\sqrt{|\cos\theta|}\,.$$



(Detta är ett fält från en kvadrupol i origo.)

4. Låt planet vara xy-planet, och låt laddningen ligga på positiva z-axeln. Randvillkoret på planet är att potentialen är konstant, dvs. fältets tangentiella komponent är noll. Fältet fås genom spegling:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-d\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r}+d\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|^3}\right), & z > 0\,, \\ 0\,, & z < 0\,. \end{cases}$$

Vid $z = 0^+$ är

$$\vec{E}(x,y,0^+) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{d}{(\varrho^2+d^2)^{3/2}}\hat{z}\,,$$

och ytladdningen, som ges av $\epsilon_0(E_z(x,y,0^+) - E_z(x,y,0^-))$ blir

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi}\frac{d}{(\varrho^2+d^2)^{3/2}}\,.$$

Integreras denna över xy-planet fås den totala laddningen $-Q$.

5. Den stationära värmeledningsekvationen lyder $\Delta T = -\frac{s}{\lambda}$. Här är s värmekälltäthet (energi/volymsenhet), som i detta fall är $s = \frac{\epsilon}{A}\delta(x)$. Den endimensionella värmeledningsekvationen blir

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\epsilon}{A\lambda}\delta(x)\,.$$

Lösningen är

$$T(x) = \begin{cases} T_0 + \frac{\epsilon}{2A\lambda}(x+a)\,, & -a < x < 0\,, \\ T_0 - \frac{\epsilon}{2A\lambda}(x-a)\,, & 0 < x < a\,, \end{cases}$$

[Dimensionskontroll.] Rimlighet kan t.ex. kollas genom att undersöka hur $T(0)$ beror på de olika parametrarna.

6. Man kan använda den Gauss-analoga satsen $\int_{\partial V} p\, d\vec{S} = \int_V \nabla p\, dV$, där p är trycket, och kraften på ett ytelement är $d\vec{F} = p\, d\vec{S}$.