Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)
Måndagen 17 oktober 2011, 14.00-18.00, M
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F} = F_0 a(y\hat{x} - x\hat{y})/(x^2+y^2)$ och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x,y,z) = b(\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t < 2\pi$.

b) Beräkna $(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl})M_{ij}M_{kl}$, där M_{ij} är elementen i matrisen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Ange för vilken enhetsvektor $\vec{n}$ riktningsderivatan av funktionen $\phi(\vec{r}) = \frac{\cos\theta}{r^2}$ i riktningen $\vec{n}$ i punkten $(x,y,z) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ är maximal. (Svaret kan ges i termer av Cartesiska eller sfäriska basvektorer i punkten ifråga, det spelar ingen roll.)

2. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_0 a^3 \left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta} \right) + F_1 a^2 \frac{\vec{r} - 2a\hat{x}}{|\vec{r} - 2a\hat{x}|^3}\,.$$

Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över en begränsningsytan till en kub med sidlängden $3a$ och sidorna parallella med koordinataxlarna, vars mittpunkt är belägen i $(x,y,z) = (\frac{5a}{2}, 0, 0)$.
(10 poäng)

3. Visa att det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater τ, φ, som definieras av

$$x = a\cosh\tau\cos\varphi$$
$$y = a\cosh\tau\sin\varphi$$

är ortogonalt i det område där det är giltigt. Vilka kurvor i planet beskrivs av $\tau =$ konstant resp. $\varphi =$ konstant? Bestäm systemets skalfaktorer.
(10 poäng)

4. Visa att temperaturfördelningen

$$T(\vec{r}, t) = T_0 \sin \frac{\pi x}{L} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

för ett visst värde på konstanten τ (vilket?) är en lösning till värmeledningsekvationen i en cylinder med tvärsnittsarean A och längden L (x-koordinaten går längs med cylindern), med Dirichlets homogena randvillkor vid $x = 0$ och $x = L$ samt Neumanns homogena randvillkor på den övriga begränsningsytan. Beräkna värmeenergin i kroppen som funktion av tiden. Hur överensstämmer tidsberoendet med principen om energins bevarande?
(Värmeledningsekvationen lyder

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = 0\,,$$

där $k = \frac{\lambda}{c\rho}$, λ är värmeledningsförmågan, c värmekapacitiviteten och ρ densiteten.)
(10 poäng)

5. Bestäm den elektrostatiska potentialen mellan två mycket långa koncentriska metallcylindrar med radier a och b ($b > a$). Den inre cylindern är jordad (potentialen är noll) och den yttre hålls vid potentialen V. Hur stora ytladdningar ansamlas vid de två begränsningsytorna? (Potentialen kan betraktas som konstant för $\varrho < a$ och $\varrho > b$.) Hur stor är kapacitansen per längdenhet hos denna kondensator (kapacitansen definieras som laddning genom potentialskillnad)?
(10 poäng)

6. Man vill lösa den partiella differentialekvationen

$$\Delta\phi = \gamma\left(\delta^3(\vec{r} - \frac{a}{2}\hat{z}) - \delta^3(\vec{r} + \frac{a}{2}\hat{z})\right)\,,$$

i området $r \leq a$, med Neumanns homogena randvillkor på sfären $r = a$. γ är en konstant. Har ekvationen någon lösning? Argumentera övertygande i fysikaliska och/eller matematiska termer. Rita gärna.
(10 poäng)

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Måndagen 17 oktober 2011, 14.00-18.00

---

1. a) $-2\pi F_0 a$

   b) $-a^2 - c^2$

   c) $\hat{z}\,(= -\hat{\theta})$

2. Dela upp fältet som $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$, där $\vec{F}_0$ är den del som innehåller konstanten F_0. En uträkning av $\nabla \cdot \vec{F}_0$ i sfäriska koordinater visar att detta är 0, utom möjligen i origo, där $\vec{F}_0$ är singulärt (det är fältet från en punktdipol). Origo ligger dock utanför kuben, varför Gauss sats ger att bidraget från $\vec{F}_0$ till integralen är 0. $\vec{F}_1$ känns igen som fältet från en punktkälla med styrkan $4\pi F_1 a^2$, belägen i $(2a, 0, 0)$. Denna punktkälla ligger inne i kuben, och bidraget till integralen är $4\pi F_1 a^2$, vilket alltså är integralens värde.

3. Koordinatsystemet kan fås från polära koordinater, med $\varrho = a\cosh\tau$. (Det gäller alltså bara i området $\varrho \geq a$, och $0 \leq \tau < \infty$.) Därför är $\hat{\tau} = \hat{\varrho} \perp \hat{\varphi}$, och systemet är ortogonalt. Man har $\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = a\sinh\tau$, så $h_\tau = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau}| = a\sinh\tau$ och $h_\varphi = \varrho = a\cosh\tau$. Kurvorna med konstant τ är cirklar med centrum i origo och radie $\geq a$. Kurvorna med konstant φ är radiella strålar från radien a till oändligheten.

4. Insättning av temperaturfördelningen i värmeledningsekvationen ger

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta\right) T = \left(-\frac{1}{\tau} + k\frac{\pi^2}{L^2}\right) T = 0\,,$$

   vilket ger $\tau = \frac{L^2}{k\pi^2} = \frac{c\rho L^2}{\pi^2 \lambda}$. Det är lämpligt att kontrollera att detta har dimensionen tid. Värmeenergitätheten är $\epsilon = c\rho T$ (plus en konstant, om man vill). Totala värmeenergin i kroppen vid tiden t är

$$E = \int_V dV\,\epsilon = c\rho T_0 e^{-\frac{t}{\tau}} A \int_0^L dx \sin\frac{\pi x}{L} = \frac{2}{\pi} ALc\rho T_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\,.$$

   Den minskar alltså med tiden. Det är helt ok, då värme kommer att flöda ut genom begränsningsytorna vid cylinderns ändar. (Man kan kontrollera att flödet ut är lika med minus tidsderivatan av energin i kroppen, men det följer direkt av värmeledningsekvationen, som är härledd just från kontinuitetsekvationen.)

5. Mellan cylindrarna skall potentialen uppfylla Laplaces ekvation. Det finns inget vinkelberoende i problemet, och därför skall lösningen vara av formen $\phi = A + B\log\varrho$. Insättning av randvärdena ger

$$\phi = V\frac{\log\frac{\varrho}{a}}{\log\frac{b}{a}}\,,$$

   och följaktligen är det elektriska fältet

$$\vec{E} = -\frac{V}{\log\frac{b}{a}}\frac{\hat{\varrho}}{\varrho}\,.$$

Ytladdningarna bestäms som ϵ_0 gånger diskontinuiteten i det elektriska fältets normalkomponent (det kan tas till 0 för $\varrho < a$ och $\varrho > b$). Man får en ytladdningstäthet

$$\sigma_{(a)} = -\frac{\epsilon_0 V}{a \log \frac{b}{a}}$$

på den inre ytan, och

$$\sigma_{(b)} = \frac{\epsilon_0 V}{b \log \frac{b}{a}}$$

på den yttre. Laddningarna per längdenhet blir $k_{(a)} = -2\pi\epsilon_0 V / \log \frac{b}{a}$ respektive $k_{(b)} = 2\pi\epsilon_0 V / \log \frac{b}{a}$. Kapacitansen per längdenhet är då $2\pi\epsilon_0 / \log \frac{b}{a}$. Man bör kontrollera dimensionen hos uttrycket, vilket kanske enklast görs genom att jämföra med den första av Maxwells ekvationer.

6. Det avgörande här är att de två punktkällorna är lika stora fast med motsatta tecken, så att den totala källan innanför sfären är noll. Det finns inget som hindrar en lösning, trots att inget flöde kan ske genom begränsningsytan, då det som "flödar ut ur" den ena punktkällan kan "flöda in i" den andra...