Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F(TM), FFM232(FFM233)
Tisdagen 19 oktober 2010, 8.30-12.30, M
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231.

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Ange värdet av tangentlinjeintegralen $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, där $\vec{F}=\frac{\hat{\varphi}}{2\pi\varrho}$ är givet i cylindriska koordinater och den slutna kurvan C parametriseras enligt $(x,y,z)=(\cos 3t,\sin 3t,\cos t)$, $0\leq t<2\pi$.

b) En sfäriskt symmetrisk, tidsberoende, temperaturfördelning i tre dimensioner är för $t>0$ av formen

$$T(r,t)=\gamma t^{-3/2}e^{-\frac{r^2}{4kt}}\,,$$

där γ och k är konstanter. (Den uppfyller värmeledningsekvationen $(\frac{\partial}{\partial t}-k\Delta)T=0$, men det är inte direkt relevant för uppgiften.) Vilket värde skall γ ha för att temperaturen för mycket små tider (dvs. då $t\to 0^+$) skall närma sig $\delta^3(\vec{r})$?
(En eventuellt användbar integral är $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$.)

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är basvektorer i ett ortonormerat högersystem. Beräkna $\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k$.

2. Paraboliska koordinater ξ, η definieras av

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta\,,\\ y &= \frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)\,. \end{aligned}$$

Visa att systemet är ortogonalt och att koordinatytorna är parabler. Härled ett uttryck för Laplaceoperatorn på ett skalärt fält i dessa koordinater.
(10 poäng)

3. Vektorfältet $\vec{F}$ ges i cylindriska koordinater av

$$\vec{F}(\vec{r})=\begin{cases} F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho}+\frac{z}{a}\hat{z})\,, & z>0\,,\\ F_0(\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho}-\hat{z})\,, & z<0\,. \end{cases}$$

Beräkna normalytintegralen av $\vec{F}$ över sfären med radien a och centrum i origo.
(10 poäng)

4. I en boll $r < R$ med värmeledningsförmåga λ finns en värmekälla med konstant värmekälltäthet s_0. Utanför bollen är temperaturen T_0, och överföringen av värmeenergi från bollen till omgivningen modelleras enligt ekvationen (randvillkoret) $\hat{r} \cdot \vec{\jmath} = \alpha(T - T_0)$, där α är en konstant och $\vec{\jmath}$ är värmeströmmen, som ges av $\vec{\jmath} = -\lambda \nabla T$. Värmeöverföringen per yt- och tidsenhet ut från bollen är alltså proportionell mot skillnaden mellan temperaturerna på randen och i omgivningen, med proportionalitetskonstant α.

   Vilka dimensionaliteter har s_0, α och λ (det går bra att ange SI-enheter)?

   Bestäm den statiska temperaturfördelningen i bollen. Kontrollera rimligheten av ditt svar, speciellt i gränserna $\alpha \to \infty$ och $\lambda \to \infty$. Kontrollera uttryckligen att värmeeffekten ut genom ytan $r = R$ är lika stor som den totala utvecklade värmeeffekten inne i bollen.

   (Värmeledningsekvationen kan skrivas

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = s\,,$$

   där c är värmekapacitiviteten, ρ densiteten, λ värmeledningsförmågan och s värmekälltätheten.)
   (10 poäng)

5. Visa eller argumentera övertygande för att Poissons ekvation i ett begränsat område V med randen ∂V och Neumanns homogena randvillkor på ∂V bara kan ha en lösning om den totala källan i V är noll. Ge ett fysikaliskt exempel.
   (10 poäng)

6. Ett elektriskt fält kan, i ett område utan laddningar och strömmar, skrivas

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \hat{x} \cos(k(z - ct))\,,$$

   där E_0 och k är konstanter och c ljushastigheten. Vad är våglängden och periodtiden för denna vågrörelse? Bestäm det magnetiska fältet (eventuella möjliga tidsoberoende delar kan sättas till noll).
   (Maxwells ekvationer lyder:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \\
\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0\,, \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0\,, \\
\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{\jmath}\,.\ )
\end{aligned}$$

   (10 poäng)

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 19 oktober 2010, 8.30-12.30

---

1. a) 3

   b) $\gamma = (4\pi k)^{-3/2}$

   c) 1

2. Eftersom $\vec{r} = (x, y)$ är uttryckt i de nya koordinaterna är det lämpligt att beräkna $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \eta & \frac{\partial x}{\partial \eta} = \xi \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} = -\eta \end{array}$$

Vi får direkt $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = 0$, så systemet är ortogonalt. Skalfaktorerna är

$$h_\xi = h_\eta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\,.$$

Därför fås Laplaceoperatorn som

$$\Delta = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)$$

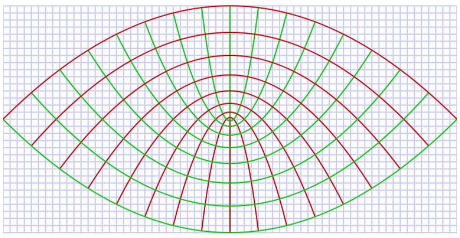
ξ-ytorna parametriseras av η, och fås genom eliminering av ξ i de definierande uttrycken för koordinaterna:

$$y = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{\eta^2} - \eta^2)\,.$$

På samma sätt fås η-ytorna:

$$y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \frac{x^2}{\xi^2})\,.$$

Samtliga koordinatytor är parabler med fokus i origo.



3. Vi kan använda Gauss sats, men komma ihåg att ta hänsyn till singulära källor i volymen. Man känner direkt igen en linjekälla på z-axeln med styrka $2\pi F_0 a$. Resten av fältet har divergensen F_0/a för $z > 0$ och 0 för $z < 0$. Fältets z-komponent har också en diskontinuitet vid $z = 0$, som indikerar en ytkälla med ytkälltäthet F_0. De inneslutna källorna är

   Rymdkällan: $\frac{1}{2}\frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{F_0}{a} = \frac{2\pi}{3} F_0 a^2$;

   Ytkällan: $\pi a^2 \cdot F_0$;

   Linjekällan: $2a \cdot 2\pi F_0 a = 4\pi F_0 a^2$.

Totala inneslutna källan är alltså $\frac{17}{3}\pi F_0 a^2$, vilket är integralens värde.

4. Den statiska värmeledningsekvationen är
$$\Delta T = -\frac{s}{\lambda}\,.$$
Värmekälltäthet är effekt/volymsenhet, i SI-enheter $\mathrm{Wm^{-3}}$. Ur värmeledningsekvationen (t.ex.) ses att värmeledningsförmågan har samma dimension som värmekälltäthet/(temperatur/längd^2), dvs enheten $\mathrm{Wm^{-3}K^{-1}m^2{=}WK^{-1}m^{-1}}$. (Detta kan också fås från relationen mellan värmeströmtäthet, som mäts i $\mathrm{Wm^{-2}}$, och temperaturgradient, som mäts i $\mathrm{Km^{-1}}$.) Konstanten α har samma dimension som värmeströmtäthet/temperatur, dvs. enheten $\mathrm{WK^{-1}m^{-2}}$.

Problemet är sfäriskt symmetriskt, och temperaturen kommer endast att bero på r. Värmeledningsekvationen (Poissons ekvation) för $T(r)$ är $r^{-2}(r^2T')' = -s_0/\lambda$, med lösningen
$$T(r) = A + \frac{B}{r} - \frac{s_0}{6\lambda}r^2\,.$$
Den andra termen svarar mot en punktkälla i origo, så vi sätter $B = 0$. För att använda villkoret på randen behöver vi också värmeströmmen,
$$\vec{\jmath} = -\lambda\nabla T = \frac{s_0}{3}r\hat{r}\,.$$
Insättning i randvillkoret ger $\frac{1}{3}s_0R = \alpha(A - \frac{s_0}{6\lambda}R^2 - T_0)$, dvs. $A = T_0 + \frac{s_0R^2}{6\lambda} + \frac{s_0R}{3\alpha}$. Temperaturfördelningen är
$$T(r) = T_0 + \frac{s_0R}{3\alpha} + \frac{s_0R^2}{6\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\,.$$
Uttrycket kan kontrolleras m.a.p. dimensionalitet. Vi noterar att skillnaden mellan temperaturen på randen och den i omgivningen är $\frac{s_0R}{3\alpha}$, som $\to 0$ då $\alpha \to \infty$, vilket stämmer intuitivt med att värme då överförs "oändligt väl" över randen. Temperaturskillnaden mellan origo och randen är $\frac{s_0R^2}{6\lambda}$ vilket $\to 0$ då $\lambda \to \infty$, vilket stämmer med att värme då leds "oändligt bra" ut genom bollen, och i gränsen omedelbart jämnas ut inom bollen.

Slutligen är den totala genererade effekten från värmekällan $\frac{4\pi R^3}{3}\cdot s_0$, och den som går ut genom randen $4\pi R^2 \cdot \frac{s_0}{3}$. De är alltså lika (förstås).

5. Neumanns homogena randvillkor säger att $\vec{n}\cdot\nabla\phi = 0$ på randen. Gauss sats ger då att
$$0 = \oint_{\partial V} \nabla\phi\cdot d\vec{S} = \int_V \Delta\phi dV\,.$$
Högerledet är per definition $-\int_V \rho$, dvs. minus den totala källan i V.

Ett fysikaliskt exempel t.ex. kan vara en strömmande vätska. Om det finns källor, dvs. om vätska "skapas" inne i volymen och inte försvinner någon annanstans, måste den läcka ut genom randen, vilket strider mot randvillkoret. Liknande exempel kan göras t.ex. i elektrostatik.

6. Det elektriska fältet är $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\hat{x}\cos(k(z-ct))$. Vi ser direkt att den 1:a av Maxwells ekvationer (ME) är uppfylld (högerledet är 0). Om vi använder den 2:a ME har vi
$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E} = E_0k\hat{y}\sin(k(z-ct))\,.$$

Denna kan integreras till

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\hat{y}\cos(k(z-ct)) + \vec{F}(\vec{r})\,,$$

där $\vec{F}$ är något tidsoberoende fält, som vi struntar i (det har inget med vågrörelsen att göra). Detta magnetiska fält är divergensfritt, så den 3:e ME är uppfylld. Man kan också sätta in i den 4:e ME och se att den är uppfylld.

Vågländgen är $\frac{2\pi}{k}$ och periodtiden $\frac{2\pi}{kc}$.