Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Torsdagen 26 augusti 2010, 14.00-18.00
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723181

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, där $\vec{F}$ är fältet från en virveltråd med styrkan j riktad i positiv φ-led på cirkeln $\varrho = b$, $z = 0$, och C är kurvan $(x, y, z) = b(1 + \cos\alpha, 0, \sin\alpha)$, där parametern α går från 0 till 2π? ($\varrho\varphi z$ är de vanliga cylindriska koordinaterna.)

b) För vilka värden på talen α, β och γ har det tvådimensionella koordinatsystemet med koordinater ξ och η, givna av

$$\begin{aligned} \xi &= x^2 - y^2 \quad , \\ \eta &= \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \quad , \end{aligned}$$

ortogonala basvektorer?

c) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \tanh^2 x \, dx$.

2. En sfärisk ballong med radien a innehåller gas med övertrycket p. Hur stor är spänningen (kraft/längdenhet) i ballongens material?
(10 poäng)

3. Vektorfältet $\vec{F}$ ges av

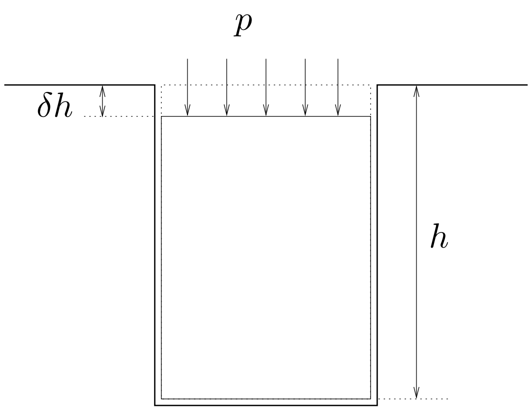
$$\begin{aligned} \vec{F} = \frac{F_0}{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big[& a^2(x^2+y^2)(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) + a(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(x\hat{x}+y\hat{y}) \\ & + (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left(2a^{-2}(x+y)z\hat{z} + 3a^{-1}(x\hat{x} - y\hat{y} + z\hat{z})\right) \Big] \quad . \end{aligned}$$

Bestäm normalytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där ytan S ges av $\varrho + z = a$, $z > 0$. Ytans normalvektor har positiv z-komponent.
(10 poäng)

4. Temperaturfördelningen på ytan av en cylinder med radie a är oberoende av z och ges av $T = T_0 + T_1 \cos 3\varphi$, där de cylindriska koordinaterna har anpassats efter cylinderns läge. Bestäm den statiska temperaturfördelningen innanför cylindern. Det finns inga värmekällor i området $\varrho < a$.
(10 poäng)

5. Visa eller argumentera för att en virveltråd, som löper i en i övrigt virvelfri del av rummet, måste vara antingen oändligt lång eller sluten. Argument som bygger på en fysikalisk tillämpning är fullt acceptabla. (10 poäng)

6. Ett homogent rätblock av ett elastiskt material passar precis in i en lång skåra i ett annat material, som i praktiken kan betraktas som odeformerbart (se figuren). Rätblocket kan alltså inte expandera i riktningen vänster/höger i figuren. Däremot kan det fritt expandera i riktningen in i/ut ur pappret. Det finns ingen friktion i kontaktytorna mellan rätblocket och det omgivande materialet. Bestäm den relativa längdförändringen $\delta h/h$ då den fria änden av rätblocket belastas med trycket p i termer av p och Lamés materialkonstanter λ och μ. (Relationen mellan spänningstensorn P_{ij} och deformationstensorn E_{ij} är $P_{ij} = \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij}$.)
(10 poäng)



Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Torsdagen 26 augusti 2010, 14.00-18.00

---

1. a) $-j$

   b) $\alpha = \gamma = 0$, β godtyckligt.

   c) 0

2. Man kan göra på flera sätt. Det kanske enklaste är att tänka sig sfären delad i två. Kraften från gasen på halvsfären S är
$$\vec{F}_{\text{gas}} = \int\limits_S p\hat{r}dS = \ldots = \pi a^2 p\hat{z} \quad ,$$
där halvsfären begränsas av xy-planet. Kraften från spänningen t i ballongen är $\vec{F}_{\text{ballong}} = -2\pi a t\hat{z}$. Kraftjämvikt ger $t = \frac{1}{2}pa$.

3. Ytan är mantelytan för en kon med spetsen i $(0,0,a)$. Fältet skrivs om:
$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_0 a^2 \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + F_0 a \frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2} + \frac{2F_0}{a^2}(x+y)z\hat{z} + \frac{3F_0}{a}(x\hat{x} - y\hat{y} + z\hat{z}) \\ &= \frac{F_0 a^2 \hat{r}}{r^2} + \frac{F_0 a\hat{\varrho}}{\varrho} + \frac{2F_0}{a^2}(x+y)z\hat{z} + \frac{3F_0}{a}(x\hat{x} - y\hat{y} + z\hat{z}) \quad .\end{aligned}$$
Den första termen känns igen som en punktkälla i origo med styrkan $4\pi F_o a^2$ och den andra som en linjekälla längs z-axeln med styrkan $2\pi F_0 a$. Eftersom ytan tar upp rymdvinkeln 2π sedd från origo är punktkällans bidrag $2\pi F_0 a^2$. Ytan har höjden a, så linjekällans bidrag är $2\pi F_0 a^2$. De resterande termerna kan t.ex. hanteras med Gauss sats. Deras divergens är $\frac{2F_0}{a^2}(x+y) + \frac{3F_0}{a}$. Vi kan sluta ytan med en cirkelskiva på $z=0$. Där är z-komponenten av detta fält noll, så vi får inget bidrag från bottenytan, utan endast från volymintegralen. Termen $\frac{2F_0}{a^2}(x+y)$ är udda under $(x,y,z) \to (-x,-y,z)$, så dess bidrag är noll. Termen $\frac{3F_0}{a}$ ger volymintegralen $\frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a \cdot \frac{3F_0}{a} = \pi F_0 a^2$. Den totala sökta integralen är $5\pi F_0 a^2$.

4. Det gäller att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i cylindern, med randvillkoret $T(a,\varphi,z) = T_0 + T_1 cos 3\varphi$. Problemet är tvådimensionellt. Det är rimligt att göra en ansats för temperaturfältet av formen $T = A\varrho^p + B\varrho^q \cos 3\varphi$. Med hjälp av uttrycket för Laplaceoperatorn i cylindriska koordinater fås $\Delta\varrho^p = p^2\varrho^{p-2}$ och $\Delta\varrho^q \cos 3\varphi = (q^2-9)\varrho^{q-2}\cos 3\varphi$. Negativa värden på p och q utesluts, och man måste alltså ha $p=0$, $q=3$. Konstanterna A och B bestäms av randvillkoren, och lösningen blir $T = T_0 + T_1\frac{\varrho^3}{a^3}\cos 3\varphi$.

6. Låt oss kalla $\delta h/h$ för α. Med z-axeln vertikal och x-axeln åt höger i figuren är deformationstensorn diagonal med $E_{33} = -\alpha$, $E_{11} = 0$ och $E_{22} = \beta$ tills vidare okänd. Spåret av deformationstensorn är $E_{ii} = \beta - \alpha$. Spänningstensorn har en komponent $P_{33} = -p$. Det finns också en tryckspänning i sidled, $P_{11} = -q$, vars storlek vi ännu inte vet; den är precis så stor som behövs för att hålla bredden på rätblocket oförändrad. Dessutom är $P_{22} = 0$. Sambandet mellan spänning och deformation ger nu
$$\begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = \lambda(\beta - \alpha)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad ,$$

vilket efter en kort räkning ger

$$\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \quad .$$

(Detta kan jämföras med vad som fås om inget håller emot i sidled; då är

$$\alpha = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} p$$

vilket är större än vårt resultat. Det är rimligt att deformationen blir mindre när väggarna håller emot.)