Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Fredagen 15 januari 2010, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Martin Cederwall, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 24 poäng, för betyg 4 36 poäng, och för betyg 5 48 poäng. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där S är en sfär med radien a och mittpunkt i origo, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$, där $\vec{r}_0 = \frac{3a}{5}(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})$?

b) Den antisymmetriska tensorn A_{ij} konstrueras från en vektor $\vec{a}$ enligt $A_{ij} = k\epsilon_{ijk}a_k$, där k är en konstant. För vilka värden på k gäller $A_{ij}A_{ij} = |\vec{a}|^2$?

c) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} 2^{-x}\delta_{\mathbb{N}}(x)dx$, där $\delta_{\mathbb{N}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x-n)$.

2. Härled kontinuitetsekvationen för massflöde utgående från massans bevarande. Eventuellt använda integralsatser behöver inte bevisas.
(10 poäng)

3. Vektorfältet $\vec{F}$ ges i cylindriska koordinater av

$$\vec{F} = F_0 \left[\left(\frac{\varrho}{a} + \frac{a}{\varrho} \right) (\hat{\varrho} + \hat{\varphi}) + \frac{z}{a}\hat{z} \right] \quad .$$

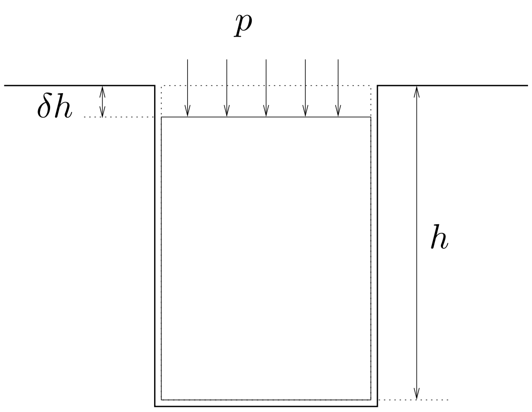
Bestäm normalytintegralen $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, där ytan S ges av ekvationen $\varrho^2 + z^2 + 2az = 3a^2$.
(10 poäng)

4. Temperaturfördelningen på ytan av en sfär med radie a ges av $T = T_0 + T_1 \cos\theta$. Bestäm den statiska temperaturfördelningen innanför sfären. Det finns inga värmekällor i området $r < a$.
(10 poäng)

5. Vad är fel i följande resonemang?

   "Kriteriet för att ett vektorfält $\vec{F}$ skall vara konservativt är att $\nabla \times \vec{F} = 0$. Om vi kontrollerar fältet $\vec{F} = \varrho^{-1}\hat{\varphi}$, givet i cylindriska koordinater, finner vi genom explicit uträkning av rotationen att $\nabla \times \vec{F} = 0$. Därför finns det en potential till $\vec{F}$, sådan att $\vec{F} = -\nabla\phi$, och $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{r} = 0$ för varje sluten kurva C."
   (10 poäng)

6. Ett homogent rätblock av ett elastiskt material passar precis in i en motsvarande hålighet i ett annat material, som i praktiken kan betraktas som odeformerbart (se figuren). Det finns ingen friktion i kontaktytorna mellan rätblocket och det omgivande materialet. Bestäm den relativa längdförändringen $\delta h/h$ då den fria änden av rätblocket belastas med trycket p i termer av p och Lamés materialkonstanter λ och μ. (Relationen mellan spänningstensorn P_{ij} och deformationstensorn E_{ij} är $P_{ij} = \lambda\delta_{ij}E_{kk} + 2\mu E_{ij}$.)
   (10 poäng)



Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Fredagen 20 oktober 2010, 8.30-12.30

---

1. a) 0

   b) $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

   c) 2

3. Ekvationen för ytan kan skrivas $\varrho^2 + (z+a)^2 = (2a)^2$, och beskriver en sfär med radien $2a$ och centrum i $(0,0,-1)$. Fältet är singulärt på z-axeln, där termen $F_0\frac{a}{\varrho}\hat{\varrho}$ beskriver en linjekälla med styrkan $2\pi a F_0$, och termen $F_0\frac{a}{\varrho}\hat{\varphi}$ en virveltråd med styrkan $2\pi a F_0$. Virveltråden ger inget bidrag till integralen, och bidraget från linjekällan är enligt Gauss sats den totala inneslutna källan, $2\pi a F_0 \cdot 4a = 8\pi F_0 a^2$. Divergensen av resten av fältet är $\frac{3F_0}{a}$. Gauss sats ger bidraget från den reguljära delen av fältet $\frac{3F_0}{a} \cdot \frac{4\pi(2a)^3}{3} = 32\pi F_0 a^2$. Värdet av integralen blir $40\pi F_0 a^2$.

4. Det gäller att lösa Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ i sfären, med randvillkoret $T(a,\theta,\varphi) = T_0 + T_1 cos\theta$. Det är rimligt att göra en ansats för temperaturfältet av formen $T = Ar^p + Br^q\cos\theta$. Med hjälp av uttrycket för Laplaceoperatorn i sfäriska koordinater fås $\Delta r^p = p(p+1)r^{p-2}$ och $Delta r^q\cos\theta = [q(q+1)-2]r^{q-2}\cos\theta$. Negativa värden på p och q utesluts, och man måste alltså ha $p = 0$, $q = 1$. Konstanterna A och B bestäms av randvillkoren, och lösningen blir $T = T_0 + T_1\frac{r}{a}\cos\theta$.

5. Rotationen av fältet är noll utom på z-axeln. Det är inte sant att fältet är rotationsfritt, utan $\nabla \times \vec{F} = 2\pi\delta^2(\vec{\varrho})$. Det finns därför ingen potential. (Om man ändå envisas och försöker hitta en potential blir det t.ex. $\phi = -\varphi$. Men detta är inte en (enkelvärd) funktion på $\mathbb{R}^3$.)

6. Låt oss kalla $\delta h/h$ fär α. Med z-axeln vertikal i figuren är deformationstensorn $E_{33} = -\alpha$ och alla andra komponenter noll (speciellt är $E_{11} = E_{22} = 0$ eftersom kroppen inte kan utvidgas i sidled). Spåret av deformationstensorn är $E_{ii} = -\alpha$. Spänningstensorn har en komponent $P_{33} = -p$. Dessutom finns det tryckspänningar i sidled, $P_{11} = P_{22} = -q$, vars storlek vi ännu inte vet; de är precis så stora som behövs för att hålla bredden på rätblocket oförändrad. Sambandet mellan spänning och deformation ger nu

$$\begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = \lambda(-\alpha)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\mu\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad ,$$

dvs. $-q = -\lambda\alpha$, $-p = -\lambda\alpha - 2\mu\lambda\alpha$. Resultatet är

$$\alpha = \frac{p}{(\lambda + 2\mu)} \quad .$$

(Detta kan jämföras med vad som fås om inget håller emot i sidled; då är

$$\alpha = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}p$$

(se föreläsningsanteckningar). Detta är en faktor

$$\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)} = \frac{(1+\frac{\lambda}{\mu})(1+\frac{\lambda}{2\mu})}{1+\frac{3\lambda}{2\mu}} = 1 + \frac{\frac{\lambda^2}{2\mu^2}}{1+\frac{3\lambda}{2\mu}} > 1$$

gånger vårt resultat. Det är rimligt att deformationen blir mindre när väggarna håller emot.)