Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 20 oktober 2009, 8.30-12.30
Examinator: Martin Cederwall
Jour: Per Salomonson, tel. 7723231

Tillåtna hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, typgodkänd kalkylator, lexikon samt Olle Branders formelsamling.

Alla svar, utom till uppgift 1, skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar skall i förekommande fall analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Även skisserade lösningar kan ge delpoäng. Skriv och rita tydligt!

Maximal poäng på tentamen är 60. För betyg 3 krävs 30 poäng, för betyg 4 40 poäng, och för betyg 5 50 poäng, poängen från datoruppgifterna inräknad. Lycka till!

---

1. Svara på följande tre delfrågor (endast svar skall ges)!
(3 per korrekt besvarad deluppgift, 10 för alla tre.)

a) Vad är värdet av integralen $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där S är begränsningsytan till kuben med sidlängden 4 och mittpunkt i origo, vars kanter är parallella med koordinataxlarna, och vektorfältet $\vec{F}$ ges av $\vec{F}=\frac{\vec{r}-\hat{x}}{|\vec{r}-\hat{x}|^3}$?

b) A_{ij} är en antisymmetrisk tensor. Beräkna vektorn $v_i=\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\epsilon_{knp}A_{lm}A_{np}$.

c) Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f_\epsilon(x)=\begin{cases} a\cos^2\frac{x}{\epsilon}\,, & |x|\le\frac{\pi\epsilon}{2} \\ 0\,, & |x|>\frac{\pi\epsilon}{2}\end{cases}$$

närmar sig en deltafunktion $\delta(x)$ då $\epsilon\to 0^+$ (a kan eventuellt bero på ϵ).

2. Schrödingerekvationen för vågfunktionen Ψ som beskriver en fri partikel med massan m lyder

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\Psi=0\quad,$$

där $\hbar$ är Plancks konstant dividerad med 2π. Vilken dispersionsrelation, dvs. relation mellan vinkelfrekvens ω och vågtal $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ för en plan våg leder denna ekvation till?
(10 poäng)

3. Beräkna ytintegralen $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, där $\vec{F}$ är vektorfältet

$$\vec{F}=z\hat{z}-\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2}$$

och S är den del av ellipsoiden $x^2+y^2+2z^2=4$ som har $z>0$ och och normalen riktad så att $\vec{n}\cdot\hat{z}>0$.
(10 poäng)

4. I två dimensioner, bestäm potentialen från en homogen linjekälla med linjekälltäthet σ_0 på y-axeln mellan $y = -a$ och $y = a$. Kontrollera att din lösning uppfyller att x-komponenten av vektorfältet $\vec{F} = -\nabla\phi$ är diskontinuerlig enligt:

$$F_x(0^+, y) - F_x(0^-, y) = \begin{cases} \sigma_0\,, & |y| < a\,, \\ 0\,, & |y| > a\,. \end{cases}$$

   (10 poäng)

5. Låt V vara en begränsad volym (dvs. ∂V är en sluten yta) som innehåller punkten $\vec{r} = \vec{a}$. Betrakta Poissons ekvation $\Delta\phi(\vec{r}) = -q\delta^3(\vec{r} - \vec{a})$ med Neumanns homogena randvillkor på ∂V. Visa eller argumentera övertygande för att det inte finns någon lösning. Ge något exempel på fysikalisk tolkning av ekvationen och randvillkoret som visar det orimliga i frågeställningen.
   (10 poäng)

6. Bestäm hastighetsfältet för stationärt potentialflöde runt en oändligt lång cylinder med radien R och z-axeln som symmetriaxel, då hastighetsfältet långt från cylindern är $\vec{u} = u_0\hat{x}$.
   (10 poäng)

En primitiv funktion som kan vara användbar:

$$\int \log(t^2 + c^2)dt = t\log(t^2 + c^2) - 2t + 2c\arctan\frac{t}{c}\,.$$

Lösningar till tentamen i Vektorfält och klassisk fysik för F/TM, FFM232/FFM233
Tisdagen 20 oktober 2009, 8.30-12.30

---

1. a) 4π

   b) $v_i = 0$

   c) $a = \frac{2}{\pi\epsilon}$

2. Om man sätter in en planvåg $\psi = A\exp(i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t))$ i ekvationen får man $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

3. Fältet är singulärt på z-axeln, där det har en linjekälltäthet -2π. Om vi sluter ytan med cirkelskivan S_1, $x^2+y^2=4$, $z=0$ med normalen nedåt, kan vi använda Gauss sats. Kalla den sökta integralen I. Vi får $I + \int_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}dV$. Ytintegralen över S_1 ger noll direkt. Divergensen av fältet är $\nabla\cdot\vec{F} = 1 - 2\pi\delta^2(\vec{\rho})$, så volymintegralen av den första termen ger volymen, som är $\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}$, och den andra ger linjekälltätheten gånger den inneslutna längden, dvs. $-2\pi\cdot\sqrt{2}$. Alltså är $I = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} - 2\sqrt{2}\pi = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

4. Vi kan använda Greensfunktionsmetoden. I två dimensioner är $G(\vec{r},\vec{r}_0) = -\frac{1}{2\pi}\log|\vec{r}-\vec{r}_0|$ (+ någon konstant, eventuellt). Potentialen blir

$$\phi(x,y) = -\frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{-a}^{a} dy_0\,\log\sqrt{x^2+(y-y_0)^2} = -\frac{\sigma_0}{4\pi}\int_{-a-y}^{a-y} dz\,\log(z^2+x^2)$$

där vi har bytt integrationsvariabel till $z = y_0 - y$. Med hjälp av $\int\log(t^2+c^2)dt = t\log(t^2+c^2) - 2t + 2c\arctan\frac{t}{c}$ får man

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\left[z\log(z^2+x^2) - 2z + 2x\arctan\frac{z}{x}\right]_{z=-a-y}^{a-y}\\ &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\Big((y-a)\log((y-a)^2+x^2) - (y+a)\log((y+a)^2+x^2) + 4a\\ &\qquad - 2x\arctan\frac{y-a}{x} + 2x\arctan\frac{y+a}{x}\Big)\,.\end{aligned}$$

Den konstanta termen är irrelevant. Det är bättre av dimensionsskäl att skriva termerna

$$\mp(y\pm a)\log((y\pm a)^2+x^2) = \mp(y\pm a)\log\frac{(y\pm a)^2+x^2}{a^2} \pm 2(y\pm a)\log a\,,$$

och slänga konstanta termer, så att

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\left[z\log(z^2+x^2) - 2z + 2x\arctan\frac{z}{x}\right]_{z=-a-y}^{a-y}\\ &= -\frac{\sigma_0}{4\pi}\Big((y-a)\log\frac{(y-a)^2+x^2}{a^2} - (y+a)\log\frac{(y+a)^2+x^2}{a^2}\\ &\qquad - 2x\arctan\frac{y-a}{x} + 2x\arctan\frac{y+a}{x}\Big)\,.\end{aligned}$$

Alla termer utom de med arctan är kontinuerligt deriverbara nära linjekällan. När $x \to 0$ går argumentet för arctan mot $\pm\infty$. $\lim_{r\to\pm\infty} \arctan r = \frac{\pi}{2}\mathrm{sign}\,(r)$. Så nära $x = 0$ ger de termerna bidrag till potentialen $\frac{\sigma_0 x}{4}\mathrm{sign}\,(x)(\mathrm{sign}\,(y-a) - \mathrm{sign}\,(y+a))$. Detta är $-\frac{\sigma_0|x|}{2}$ för $|y| < a$ och noll annars, vilket ger rätt diskontinuitet i F_x.

5. T.ex.: Det finns en punktkälla i volymen. Då måste (Gauss sats) $\int_{\partial V}(-\nabla\phi)\cdot d\vec{S} = q$. Men det strider mot randvillkoret $\nabla\phi\cdot\vec{n} = 0$. Fysikalisk tolkning (t.ex.): Det strömmar ut inkompressibel vätska ur punktkällan. Vart skall den ta vägen? Om randvillkoret förbjuder den att gå ut genom randen finns det ingenstans den kan flöda.

6. Hela problemet är tvådimensionellt, så vi betraktar tvådimensionell potentialströmning runt en cirkel. Hastighetsfältet är $\vec{u} = -\nabla\phi$ där $\Delta\phi = 0$. Långt från cirkeln är $\vec{u} = u_0\hat{x}$ och alltså $\phi = -u_0 x = -u_0\varrho\cos\alpha$. Med en ansats $\phi = f(\varrho)\cos\alpha$ fås (m.h.a. uttrycket för Laplaceoperatorn i polära koordinater) $\Delta\phi = (\varrho^{-1}(\varrho f')' - \varrho^{-2})\cos\alpha = 0$. Ansatsen $f(\varrho) = c\varrho^p$ leder till $p^2 - 1 = 0$, $p = \pm 1$. Vi har alltså

$$\phi = \left(A\varrho + \frac{B}{\varrho}\right)\cos\alpha\,.$$

Villkoret i oändligheten ger $A = -u_0$. På randen $\varrho = R$ gäller Neumanns randvillkor $\frac{\partial\phi}{\partial\varrho} = 0$, som ger $B = -u_0 R^2$. Alltså är potentialen

$$\phi = -u_0\left(\varrho + \frac{R^2}{\varrho}\right)\cos\alpha\,,$$

och hastighetsfältet blir

$$\vec{u} = -\nabla\phi = u_0\left[\hat{\varrho}\left(1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right)\cos\alpha - \hat{\alpha}\left(1 + \frac{R^2}{\varrho^2}\right)\sin\alpha\right]\,.$$