Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik, FFM232

Måndagen 14 januari 2008, f.m.

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Standard Math Tables, kursens formelsamling.
Tentamensresultaten anslås i trapphuset senast den 28 januari. Tentamensgranskning den 28 januari kl. 12-13 i Origo 7104A.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: betyg 3: 16 poäng; betyg 4: 24 poäng; betyg 5: 32 poäng.

Strukturera Dina lösningar noggrant! **Uppställda samband skall motiveras.** Du måste ha redovisat alla väsentliga steg i analys och beräkningar för att få full poäng på en uppgift.

---

1. Ett kroklinjigt koordinatsystem $\xi\eta\varphi$ ges av sambandet

$$\boldsymbol{r} = (a\sinh\xi\sin\eta\cos\varphi, a\sinh\xi\sin\eta\sin\varphi, a\cosh\xi\cos\eta)$$

där a är en positiv konstant, och där $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

a) Bestäm koordinatsystemets skalfaktorer. (3p)

b) Om två av koordinaterna varierar medan den tredje hålls konstant fås en parameterframställning av en yta i rummet ("koordinatyta"). Beskriv systemets tre koordinatytor! (5p)

2. Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ och ytan S är givna i sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(r,\theta,\phi) &= \frac{F_0}{ar}\left[(a^2+2r^2\sin^2\theta)\hat{r} + (a^2\cot\theta + r^2\sin 2\theta)\hat{\theta} + \frac{a^2+r^2\sin^2\theta}{\sin\theta}\hat{\varphi}\right] \\ S &: r(\sin\theta+\cos\theta) = a, \quad \cos\theta > 0,\end{aligned}$$

där F_0 och a är konstanter. Beräkna integralen $\int_S \boldsymbol{F}\times d\boldsymbol{S}$.

3. En ledare för likström har elliptiskt tvärsnitt. Strömmen värmer upp ledaren så att temperaturen i den varierar enligt

$$T(x,y) = T_0 + T_1(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}),$$

där a och b är tvärsnittets halvaxlar, och T_0 och T_1 (uppmätta) positiva konstanter. Om ledarmaterialets värmeledningsförmåga är λ (enhet W/m K), hur mycket värmeenergi flödar ut från ledarens yta per längd- och tidsenhet?

4. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där vektorfältet $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (\beta z, \gamma x, \alpha y), \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$, och Γ är den slutna kurva som uppstår då sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (R är konstant) skär de positiva koordinatplanen.
(Tentamensproblem 30/8 2005, Vektoranalys för F2, KTH.)

5. En s.k. *elektrisk kvadrupol* i origo ger upphov till ett elektriskt fält

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\hat{r} + \frac{\sin 2\theta}{r^4}\hat{\theta}$$

där r och θ är sfäriska koordinater. *Beräkna* flödet av detta fält ut genom den cylindriska burk som begränsas av ytorna

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = b, \quad z = -c,$$

med a, b och c positiva konstanter. (Om Du vet hur en kvadrupol ser ut så kan Du snabbt och enkelt komma fram till svaret utan att behöva göra någon beräkning. Detta ger dock ingen poäng på uppgiften, men är en bra koll att Du räknat rätt!)