Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik, FFM232

Mndagen 20 augusti 2007, 8.30 - 12.30.

Examinator: Henrik Johannesson.
Jourhavande assistent: Per Salomonson, ankn. 3231.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Standard Math Tables, kursens formelsamling.
Tentamensresultaten anslås i trapphuset senast den 12 september. Tentamensgranskning den 12 september kl. 12-13 i Origo O7104A.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.
Maximal bonus från datoruppgifter är 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 27 poäng; betyg 5: 36 poäng.

Strukturera Dina lösningar noggrant! **Uppställda samband skall motiveras.** Du måste ha redovisat alla väsentliga steg i analys och beräkningar för att få full poäng på en uppgift.

---

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1, 2, 5)$. Bestäm avståndet från origo till detta plan.

2. De kroklinjiga koordinaterna u, v, och w är definierade genom

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = a \sinh u \sin v \\ z = w \end{cases}$$

a) Bestäm systemets basvektorer och skalfaktorer.

b) Bestäm den lösning till Laplaces ekvation $\nabla^2\Phi = 0$ som endast beror av u, och som på ytorna

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{a^2}{16} \quad \text{och} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{a^2}{9}$$

antar värdena 0 respektive 2. $(u > 0, 0 \leq v < 2\pi.)$

3. En volym begränsas av hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ och planen $z = -a$ och $z = 2a$. Beräkna normalytintegralen av vektorfältet $\mathbf{A}$ över hyperboloiden om

$$\mathbf{A} = \frac{xz}{x^2 + y^2}\hat{x} + \frac{yz}{x^2 + y^2}\hat{y}\,.$$

4. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ är ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ som genomlöps i positiv led. Vektorfältet $\mathbf{A}$ är uttryckt i sfäriska koordinater och med sfäriska basvektorer:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = r\hat{\theta} + r\hat{\varphi}.$$

5. Potentialfältet ϕ har innanför sfären $r = a$ en rymdkälla med rymdkälltätheten ρ,

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \frac{r}{a} \cos\theta,$$

och på sfären en ytkälla med konstant ytkälltäthet $\sigma_0 = a\rho_0$. Bestäm ϕ i hela rummet, med randvillkoret att $\phi \to 0$ då $r \to \infty$.
Ledning: Utnyttja att normalkomponenten av gradienten av ϕ gör ett språng av storleken σ_0 vid sfärens yta: $\hat{r} \cdot (\nabla\phi_- - \nabla\phi_+) = \sigma_0$.

VEKTORFÄLT ORIENTA 20/8 2007

1. Hyperboloiden: $\vec{r} = (u, v, u^2+v^2)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$

$$P = (1,2,5) \quad \Rightarrow u = 1,\ v = 2$$

$$\vec{n}_P = (-2, -4, 1)$$

Ekv. för planet: $(x,y,z)\cdot(-2,-4,1) - (1,2,5)(-2,-4,1) = 0$

$$\Rightarrow \underline{2x + 4y - z - 5 = 0} \qquad \text{t.ex. } (1,2,5) = \vec{r}$$

$$d = \frac{5}{\sqrt{21}} \leftarrow$$

Välj en pkt i planet. Vinkelräta avståndet från origo till planet fås genom att ta skalärprodukten av planets normal och linjens riktning: $d = \frac{1}{\sqrt{21}}(2,4,-1)\cdot(1,2,5) = 5/\sqrt{21}$

2. BAS:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = a(\sinh u \cos v\, \hat{x} + \cosh u \sin v\, \hat{y}) \\ \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = a(-\cosh u \sin v\, \hat{x} + \sinh u \cos v\, \hat{y}) \\ \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \hat{z} \end{cases}$$

SKALFAKTORER:

$$\begin{cases} h_u = a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \\ h_v = h_u \\ h_w = 1 \end{cases}$$

$$\Phi = \Phi(u)$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial u} \frac{h_v}{h_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \Phi = Au + B$$

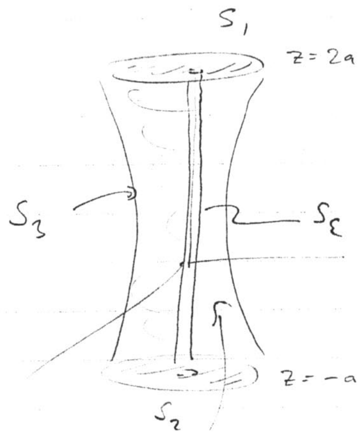
Elips 1: $\begin{cases} \frac{5}{4} = \cosh u \\ \frac{3}{4} = \sinh u \end{cases} \Rightarrow u = \ln 2$

Elips 2: $\begin{cases} \frac{5}{3} = \cosh u \\ \frac{4}{3} = \sinh u \end{cases} \Rightarrow u = \ln 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \ln 2 + B = 0 \\ A \ln 3 + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{\ln 3 - \ln 2} \\ B = -\dfrac{2 \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \end{cases}$$

3.

$S_3 : x^2+y^2-z^2 = a^3$



Integrationsytan: $S = S_1+S_2+S_3$

$\vec{A}$ singulär på $\hat{z}$-axeln $\Rightarrow$ Kapsla in!

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{S-S_\varepsilon=\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} \overset{\text{Gauss}}{=} \int \nabla\cdot\vec{A}\, dV \quad (1)$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{x^2+y^2}\right) = 0 \quad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{A} = z\left(\frac{\rho\cos\alpha}{\rho^2}\hat{x} + \frac{\rho\sin\alpha}{\rho^2}\hat{y}\right) = \frac{z}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-a}^{2a}\int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{z}{\varepsilon}\hat{\rho}\cdot(\underbrace{\hat{\rho}\,\varepsilon\, d\alpha\, dz}_{d\vec{S}})\Big|_{\rho=\varepsilon}$$

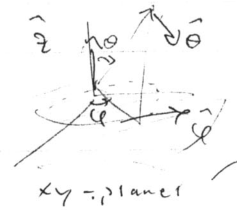
$$= \int_{-a}^{2a} z\,dz \int_0^{2\pi} d\alpha = \underline{3\pi a^2}$$

4. $$\oint_{\Gamma=\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{r} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(r^2\cos\theta\,\hat{r} - 2r^2\sin\theta\,\hat{\theta} + 2r^2\sin\theta\,\hat{\varphi}\right)$$

$$= \cot\theta\,\hat{r} - 2\hat{\theta} + 2\hat{\varphi}$$

Γ i xy-planet $\overset{\cot\theta=0}{\Rightarrow}$ $\displaystyle\oint_{\Gamma=\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{r} = 2\int_S (-\hat{\theta}+\hat{\varphi})\cdot\underbrace{\hat{z}\,dS}_{d\vec{S}}$



$\hat{\varphi}\cdot\hat{z} = 0$, $\underbrace{\hat{\theta}}_{=-\hat{z}}\cdot\hat{z} = -1$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma=\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{r} = 2\int dS = 2\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}\,\pi}$$

S = ellips med halvaxlar $1, 1/\sqrt{2}$

5.

SVAR: $\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \rho_0\left(\frac{ar}{6} - \frac{r^3}{10a}\right)\cos\theta + a^2\rho_0, & r<a \\ \frac{\rho_0 a^4}{15r^2}\cos\theta + \frac{a^3\rho_0}{r}, & r>a \end{cases}$