# Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik, FFM232

**Torsdagen den 18 januari 2007, kl. 8.30 - 12.30.**

Examinator: Henrik Johannesson.
Jourhavande assistent: Per Salomonson, ankn. 3231.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Standard Math Tables, kursens formelsamling.
Lösningarna anslås i trapphuset omedelbart efter skrivningens slut. Tentamensresultaten anslås senast den 2 februari. Tentamensgranskning den 5 februari kl 12-13 i Origo 7104A.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad. Maximal bonus från datoruppgifter är 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 27 poäng; betyg 5: 36 poäng.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras** (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

**1.** Den lokala nivån $h(x, y)$ över havsytan i ett naturreservat beskrivs av funktionen

$$h(x, y) = \frac{k}{(x/a)^2 + (y/\sqrt{2}a)^2 + 1}$$

där $k$ är en konstant, och där koordinatsystemet valts så att $\hat{x} - (\hat{y}-)$ axeln ligger i väst-östlig (syd-nordlig) riktning.

**a)** Skissera nivåkurvorna.

**b)** Naturreservatets utsiktspunkt (vilken också är den högsta punkten i området) ligger på 700 m.ö.h. Bestäm den brantaste stigningen upp mot utsiktspunkten från väst respektive syd, givet att $a = 1$m.

**2.** De kroklinjiga koordinaterna $\alpha, \beta$, och $\gamma$ defineras genom

$$\alpha^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - y, \ -\infty < \alpha < \infty; \quad \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + y, \ 0 < \beta < \infty; \quad \gamma = z, \ -\infty < \gamma < \infty$$

Vidare definieras $\alpha$:s tecken så att $\alpha$ har samma tecken som $x$. Bestäm de normerade basvektorerna! Undersök om dessa är ortogonala.

. *VÄND!*

**3.** Potentialen till ett fält $\mathbf{F}$ ges av

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} + a_0,$$

där $F_0$ och $a_0$ är konstanter. Beräkna normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över den slutna yta som begränsas av den sfäriska ytan

$$S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9, \quad z \geq 0$$

och "bottenplattan"

$$S_b : z = 0; \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 8.$$

**4.** En partikel attraheras till origo med en kraft som är omvänt proportionell mot avståndet. Vilket arbete uträttar kraften då partikeln beskriver skruvkurvan $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\, \boldsymbol{e}_x + a \sin t\, \boldsymbol{e}_y + bt\, \boldsymbol{e}_z$ från $t = 0$ till $t = 2\pi$? $a$ och $b$ är konstanter.

**5** En kondensator består av två koncentriska metallcylindrar. Den inre har radien $R_1$ och potentialen $\phi_1$ medan den yttre, vars radie är $R_2$, har potentialen $\phi_2$. Potentialen $\phi$ satisfierar Laplaces ekvation i området mellan cylindrarna och är kontinuerlig vid cylinderytorna. Bestäm potentialen $\phi$ och det elektriska fältet $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ i detta område. (Ledning: Du kan helt försumma eventuella randeffekter från kondensatorns ändar, dvs. betrakta kondensatorn som oändligt lång.)

VEKTORFÄLT & KLASSISK FYSIK FFM232 18/1 2007

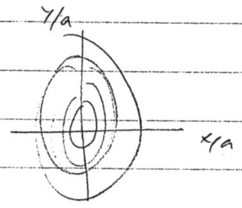
LÖSNINGSFÖRSLAG

2

1)

a) Nivåkurvor : sätt $h(x,y) = h_0 =$ konst.

$$\Rightarrow (x/a)^2 + (y/\sqrt{2}a)^2 = \frac{k}{h_0} - 1$$ ellipser




b) $$\nabla h(x,y) = -h^2(x,y)\frac{2}{ka^2}\left(x\hat{x} + \frac{y}{2}\hat{y}\right)$$

$$\Rightarrow |\nabla h(x,y)| = \frac{2}{ka^2}h^2(x,y)\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}}$$

Brantaste stigning från väst $(y=0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}|\nabla h| = 0 \Rightarrow x = \stackrel{+}{\ominus}\frac{a}{\sqrt{3}}$$

från väst

från problemtext

toppen = 700 m hög!

$$\left|\nabla h\left(x = -\frac{a}{\sqrt{3}}, y = 0\right)\right| = \frac{3\sqrt{3}k}{8a} = \{a = 1, k = 700\} \approx 455$$

P.s.s. för brantaste stigning från syd $(x=0)$:

$$\left|\nabla h\left(x=0, y=-\sqrt{\tfrac{2}{3}}a\right)\right| = \underline{321}$$

2) $$\vec{r} = \left(\alpha\beta, \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}, \gamma\right)$$

$$\hat{e}_\alpha = \frac{1}{|h_\alpha|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$$ osv ....

3) $\Phi$ punktkälla!

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) = \frac{\bar{F}_0}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{3/2}}(x, y, z-1)$$

$$= \bar{F}_0\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}, \quad \vec{r}_0 = (0,0,1) = \text{punktkällans läge (innanför } S+S_b\text{)}$$

$$\Leftarrow$$

$$\oint_{S+S_b}\vec{F}\cdot d\vec{S} = 4\pi\bar{F}_0$$

4) $$\vec{F}(\vec{r}) = -k\frac{1}{r}\hat{e}_r = -k\frac{1}{r^2}\vec{r}, \quad k > 0$$

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\hat{e}_x + a\sin t\,\hat{e}_y + bt\,\hat{e}_z$$

$$d\vec{r}(t) = -a\sin t\,dt\,\hat{e}_x + a\cos t\,dt\,\hat{e}_y + b\,dt\,\hat{e}_z$$

$$r(t) = \sqrt{a^2+b^2t^2}$$

$$\underline{W} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k\int_\Gamma \frac{1}{r^2}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$= -k\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\left(-a^2\cancel{\sin t\cos t} + a^2\cancel{\sin t\cos t} + b^2t\right)dt$$

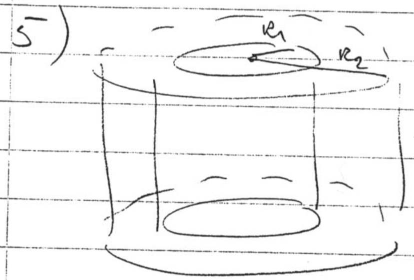
$$= -k\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}b^2t\,dt = -kb^2\int_0^{2\pi}\frac{t}{a^2+b^2t^2}dt$$

$$= \{s = bt,\ s\,ds = b^2t\,dt\} = -k\int_0^{2\pi b}\frac{s\,ds}{a^2+s^2}$$

$$= -\frac{k}{2}\ln\left(\frac{a^2+4\pi^2b^2}{a^2}\right)$$

3.

5)




$\vec{E} = -\nabla\phi$

$$\nabla^2\phi = 0 \overset{\text{cylinder symmetri}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\rho} = C_1\rho^{-1} \Rightarrow \phi = C_1\ln\rho + C_2$$

$$\phi_1 = C_1\ln R_1 + C_2$$

$$\phi_2 = C_1\ln R_2 + C_2$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\phi_2-\phi_1}{\ln(R_2/R_1)}\ln\left(\rho/R_1\right) + \phi_1$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\phi_1-\phi_2}{\ln(R_2/R_1)}\frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

Ly vans villnds*
lösning