Chalmers & Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Tisdag 24 augusti 2004, kl $8^{45} - 12^{45}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad), 0733-261681 (mobil)
Jourhavande: Ulf Torkelsson
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 25 augusti. Resultaten anslås senast den 10 september. Tentamensgranskning den 10 september kl. 12-13 i O7108B.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 27 poäng; betyg 5: 36 poäng.
(FFM231): Betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 27 poäng; betyg 5: 36 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. I ett sfäriskt skal varierar den elektriska konduktiviteten som

$$\sigma = \sigma_0 \frac{(r - r_1)(r_2 - r)}{(r_1 + r_2)^2},$$

där σ_0 är en positiv konstant, och r_1 och r_2 är skalets inner- respektive ytterradie. Bestäm var den elektriska strömtätheten $\mathbf{J} = -\sigma \nabla \Phi$ har sitt maximum om potentialen i sfäriska koordinater ges av

$$\Phi = \Phi_0 \frac{r \sin\theta \sin\varphi}{r_2 - r_1},$$

där Φ_0 är en konstant.

2. I cylindriska koordinater har vi det elektriska fältet

$$\mathbf{E} = E_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\mathbf{z}} \right),$$

och det magnetiska fältet

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \frac{\rho_0}{\rho} \left(\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \hat{\mathbf{z}} \right).$$

Här är E_0 och ρ_0 konstanter, och c är ljusets hastighet i vakuum. En partikel med laddningen q som rör sig genom dessa fält utsätts för Lorentz-kraften

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Beräkna det arbete

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

som Lorentz-kraften utför på partikeln om den följer banan

$$\mathbf{r}(t) = \rho_0 \frac{2t_0 - t}{t_0} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{t_0} t \right), \sin\left(\frac{2\pi}{t_0} t \right), \frac{t}{t_0} \right) \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

i kartesiska koordinater. v_0 och t_0 är konstanter.

3. Ett rör har innerradien R_0 och ytterradien $2R_0$. Beräkna temperaturfördelningen $T(\rho, \varphi)$ i rörmaterialet om det är fyllt med en vätska med temperaturen T_0, och rörets yttemperatur beskrivs av

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\sin\varphi}{2} \right).$$

4. Beräkna ytintegralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där $\mathbf{F}$ är fältet i cylinderkoordinater och ges av

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\frac{a^2 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{a^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{z^2}{a^2} \right) \hat{\mathbf{z}} \right],$$

och F_0 och a är konstanter, och ytan S ges av

$$2\rho + z = 3a, \quad -2a \leq z \leq 3a$$

och har en normal som pekar bort från z-axeln.

5. (Endast för FFM232, 3p.) F-teknologen Klas och hans kamrater skall dela ut Finform, F-teknologernas tidning. Den ström av Finform som teknologerna kan producera är proportionell mot teknologernas antalstäthet, n_{tekn}, Finforms antalstäthet, n_{F} och är riktad längs med en godtycklig enhetsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ (som kan variera i tid och rum, beroende på i vilken riktning teknologerna bestämmer sig för att kasta tidningarna).
a. Härled en differentialekvation som beskriver hur n_{F} varierar i tid och rum.
b. Antag att teknologtätheten är konstant och att alla teknologerna kastar tidningarna i riktningen $\hat{\mathbf{x}}$. Visa att ekvationen då har lösningar på formen $n_{\mathrm{F}} = f(x - vt)$, som beskriver en våg med hastigheten v, och bestäm v.

5. (Endast för FFM231, 4p.) Bestäm alla källor och virvlar för fältet

$$\mathbf{F} = \begin{cases} F_0 \left[\frac{\rho}{a}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) + \frac{z^2}{a^2}\hat{\mathbf{z}}\right] & \rho < a \\ F\left[\frac{a}{\rho} e^{-z^2/a^2}\left(\hat{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) + \hat{\mathbf{z}}\right] & \rho > a \end{cases}$$

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift: Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 3/9 till Ulf Torkelsson, rum O7108B, Origohuset vån. 7. Rapporten kan läggas i brevkorgen märkt *Ulf Torkelsson.* För mer information skicka e-mail till: torkel@fy.chalmers.se.

CHALMERS

Dokumentnamn

Sida 1

Utfärdare

Datum

Ärende

Tentamen 040824

1.

$$\phi = \frac{\phi_0 r \sin\theta \sin\varphi}{r_2 - r_1} = \frac{\phi_0 y}{r_2 - r_1}$$

$$-\nabla\phi = -\frac{\phi_0}{r_2 - r_1}\hat{y}$$

$$\mathring{j} = \frac{\sigma_0 \phi_0}{r_2 - r_1} \frac{(r-r_1)(r_2-r)}{(r_1+r_2)^2}\hat{y}$$

$$(r-r_1)(r_2-r) = -\left[\left(r - \frac{(r_1+r_2)}{2}\right)^2 - \frac{(r_1-r_2)^2}{2}\right]$$

$|\mathring{j}|$ maximum på ståven $r = \frac{1}{2}(r_1+r_2)$

2. Lorentz kraftens utförda arbete längs banan $C: \mathbf{r}(t)$, $0 < t < t_0$

$$A = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{t_0} q(\mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{=0}\,dt$$

$$= \int_0^{t_0} -q\underbrace{\nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{=\frac{d\phi}{dt}}\,dt = -q\Big[\phi(\mathbf{r}(t))\Big]_0^{t_0}$$

$\phi = -E_0(\rho_0 \ln\rho + z)$ är en potential

$\mathbf{r}(0) = \rho_0 2(\cos 0, \sin 0, 0) = 2\rho_0\hat{x}$: $\rho = 2\rho_0, \varphi = 0, z = 0$

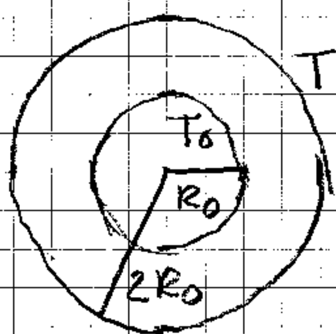
$\mathbf{r}(t_0) = \rho_0(\cos 2\pi, \sin 2\pi, 1) = \rho_0(\hat{x}+\hat{z})$: $\rho = \rho_0, \varphi = 0, z = \rho_0$

inköp art.nr 106 03

$$A = -qE_0\left(\rho_0 \ln \rho_0 + \rho_0 - 2\rho_0 \ln(2\rho_0)\right)$$

$$= \underline{qE_0\rho_0\left(\ln 2 - 1\right)}$$

3.



$T = T(\rho,\varphi)$

Värmeledningens ekv. i cylinder koord.

$$\nabla^2 T = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} = 0$$

Randvillkor

$$T(R_0,\varphi) = T_0$$

$$T(2R_0,\varphi) = T_0\left(1+\frac{\sin\varphi}{2}\right)$$

Ansats: $T(\rho,\varphi) = T_0\left(1 + f(\rho)\sin\varphi\right)$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}f\right)\sin\varphi - \frac{f}{\rho^2}\sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{df}{d\rho}\right) - f = 0 \qquad (1)$$

Randvillkor

$$f(R_0) = 0 \qquad (2)$$

$$f(2R_0) = \sin\varphi/2 \qquad (3)$$

CHALMERS	Dokumentnamn	Sida 3
	Utfärdare	Datum
Ärende		

(1) Ansats: $f = C\rho^{\mu}$

$$\rho\left(\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}(C\rho^{\mu})\right)\right) - C\rho^{\mu} = (\mu^2-1)C\rho^{\mu} = 0$$

$$\mu^2 = 1 \quad , \quad \mu = \pm 1$$

$$f(\rho) = A\rho + B/\rho$$

(2) $AR_0 + B/R_0 = 0 \quad , \quad B = -AR_0^2$

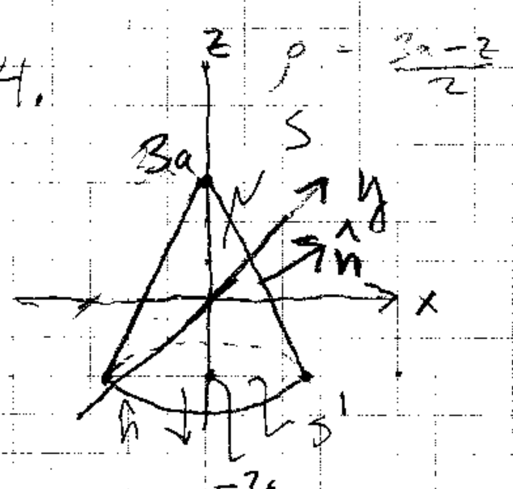
(3) $A\,2R_0 + B/2R_0 = \frac{1}{2}$

$2R_0A - \frac{R_0}{2}A = \frac{1}{2} \quad , \quad A = \frac{1}{3R_0}$

$$\underline{\underline{T(\rho,\varphi) = T_0\left(1 + \left(\frac{\rho}{3R_0} - \frac{R_0}{3\rho}\right)\sin\varphi\right)}}$$

---

4. $\rho = \frac{3a-z}{2}$ S: mantelytan av en kon med spets i $z = 3a$



Fältets singuljära del

$$\mathbb{F}_s = F_0a^2\left(\frac{\rho\hat{\rho} + z\hat{z}}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$= F_0a^2\frac{\hat{r}}{r^2}$$

en punktkälla i origo

har totala flödet

$$\oint_{S+S'} \mathbb{F}_s \cdot d\mathbb{S} = 4\pi F_0a^2$$

Dess flöde ut ur bottenytan S': $z=-2a$, $0<\rho<\frac{5}{2}a$

$$\int_{S'} \mathbf{F}_s\cdot d\mathbf{S} = F_0 a^2 \int_0^{\frac{5}{2}a}\int_0^{2\pi} \frac{-2a\,\hat{z}\cdot(-\hat{z})}{(\rho^2+4a^2)^{3/2}}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= F_0 a^2\cdot 2\pi\cdot 2a\left[\frac{-1}{(\rho^2+4a^2)^{1/2}}\right]_0^{\frac{5a}{2}}$$

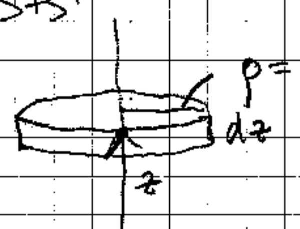
$$= 4\pi F_0 a^3\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{(25/4+4)^{1/2}a}\right) = 4\pi F_0 a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{41}}\right)$$

så punkthållans flöde ur S

$$\int_S \mathbf{F}_s\cdot d\mathbf{S} = 4\pi F_0 a^2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{41}}\right) = 4\pi F_0 a^2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{41}}\right)$$

Gauss sats för den reguljära delen $\mathbf{F}_r = \frac{F_0 z^2}{a^2}\hat{z}$

$$\oint_{S+S'} \mathbf{F}_r\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}_r\,dV = \frac{2F_0}{a^2}\int z\,dV$$



$$dV = \pi\left(\frac{3a-z}{2}\right)^2 dz$$

$$\int z\,dV = \int_{-2a}^{3a} \pi\left(\frac{3a-z}{2}\right)^2 z\,dz = \frac{\pi}{4}\left[\frac{9a^2z^2}{2} - 2az^3 + \frac{z^4}{4}\right]_{-2a}^{3a}$$

$$= \frac{\pi}{4}a^4\left(\frac{9}{2}(9-4) - 2(27+8) + \frac{(81-16)}{4}\right) = -\frac{125\pi a^4}{16}$$

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}_r = \frac{2F_0}{a^2} = -\frac{125\pi F_0 a^2}{8}$$

$15 \quad -125$

$$\int_{S'} \mathbb{F}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{F_0}{a^2}\int (2a)^2 \hat{z}\cdot -\hat{z}\, dS = -4F_0\pi\left(\frac{5}{2}a\right)^2$$

$$= -25\pi F_0 a^2$$

$$\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbb{F}_s \cdot d\mathbf{S} + \int_V \nabla\cdot\mathbb{F}_r\, dV - \int_{S'} \mathbb{F}_r\cdot d\mathbf{S}$$

$$= 4\pi F_0 a^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{41}}\right) - \frac{125\pi}{8}F_0 a^2 + 25\pi F_0 a^2$$

$$= \pi F_0 a^2\left(\left(2+\frac{8}{\sqrt{41}}\right) - \frac{75}{8}\right)$$

8

5. (FFM232)

Betrakta en godtycklig volym V

Antal Finform i V är

$$\int n_F\, dV$$

Strömmen av Finform: $\mathring{\mathbf{j}} = k\, n_{tekn}\, n_F\, \hat{n}$

Förlust av Finform från V per tidsenhet

$$\oint \mathring{\mathbf{j}}\cdot d\mathbf{S}$$

dvs

$$\frac{d}{dt}\int n_F\, dV = \int \frac{\partial n_F}{\partial t}\, dV = -\oint \mathring{\mathbf{j}}\cdot d\mathbf{S} = -\int \nabla\cdot\mathring{\mathbf{j}}\, dV$$

inkop art nr 106.03

På lokal form

$$\frac{\partial n_F}{\partial t} + \nabla \cdot \mathring{j} = 0$$

$$\frac{\partial n_F}{\partial t} + \nabla \cdot (k n_{tekn} n_F \hat{n}) = 0$$

b) Fix riktning: $\hat{n} = \hat{x}$ och n_{tekn} konstant

$$\frac{\partial n_F}{\partial t} + k n_{tekn} \frac{\partial n_F}{\partial x} = 0$$

ansats: $n_F = f(x - vt)$

$$-vf' + k n_{tekn} f' = 0$$

$$v = k n_{tekn}$$