Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Torsdag 16 januari 2003, kl $8^{45} - 12^{45}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. ~~031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)~~
Jourhavande assistent: Anders Hellman, tel. 031-772 3377
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 17 januari. Resultaten anslås senast den 31 januari. Tentamensgranskning den 31 januari kl. 12-13 i O7108B.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. En yta ges av ekvationen

$$x^2 + xy + z^2 = 5.$$

Bestäm ekvationen för tangentplanet till denna yta i punkten $(1, 0, 2)$, och bestäm avståndet från tangentplanet till punkten $(2, 2, 3)$

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

där S är ytan

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2, \quad z \geq 0$$

med uppåtriktad normal, och fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{F_0}{a^2}\left[\frac{a^4 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{a^4 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + z^2\right)\hat{\mathbf{z}}\right].$$

F_0 och a är konstanter.

3. En planet med radien R uppvärms av att ett radioaktivt material sönderfaller och avger en effekt ρ_0 per volymsenhet. Genom sina kemiska egenskaper är förekommer det radioaktiva materialet bara för $r > R/2$. För ett medium med en värmekälla ρ gäller att $\nabla \cdot \mathbf{J} = \rho$, där värmeströmmen $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$ (Fouriers lag). Beräkna temperaturfördelningen i planetens inre om värmeledningsförmågan i ytlagret är λ och i planetens inre 3λ samt att vi kan sätta temperaturen vid planetens yta till 0 K.
Ledning: T och $\partial_r T$ är kontinuerliga vid $r = R/2$.

4. En partikel rör sig längs en bana som i cylindriska koordinater ges av

$$\begin{cases} \rho = a \\ z = a\varphi \end{cases}$$

där $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ och a är en konstant. Partikeln påverkas av en kraft som ges av rotationen av vektorpotentialen

$$\mathbf{A} = F_0\left(z, 0, a \ln\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}\right).$$

Beräkna det arbete som kraften utför på partikeln.

5. (Endast för FFM232, 3p.) Fåraherden Klas har studerat hur hans får rör sig över ängen. Han finner att det är två faktorer som bestämmer hur fåren rör sig över ängen. Dels vill fåren inte trängas för mycket, så det uppstår en ström av får bort från de områden där fårtätheten n är störst. Denna ström kan skrivas som $-\lambda_1 \nabla n$. Å andra sidan så dras fåren till de delar av ängen där grästätheten g är störst och denna ström kan skrivas som $\lambda_2 \nabla g$. Vi antar att λ_1 och λ_2 är konstanter.

a. Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur fårens fördelning över ängen varierar med tiden.

b. På morgonen tar Klas sina får till en cirkulär äng med radien R, och grästätheten

$$g(\rho) = g_0 \frac{R^2}{R^2 + \rho^2},$$

där g_0 är en konstant och $0 \leq \rho \leq R$. När fåren har fått vandra omkring en stund, så inställer sig en stationär fördelning (dvs den beror inte längre på tiden). Beräkna denna fördelning. Använd randvillkoret att fårtätheten vid ytterranden skall vara 0.

5. (Endast för FFM231, 4p.) Bestäm källfördelningen för ett fält $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$, där Φ ges av

$$\Phi(r, \varphi, z) = \begin{cases} \Phi_0 \left[\ln \frac{r \sin\theta}{a} + \frac{r}{a} \cos\theta \sin\varphi\right] & \theta < \frac{\pi}{2} \\ \Phi_0 \left[\ln \frac{r \sin\theta}{a} - \frac{r}{a} \cos\theta \sin\varphi\right] & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Φ_0 och a är konstanter.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift: Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 27/1 till Ulf Torkelsson, rum O7108B, Origohuset vån. 7. Rapporten kan läggas i brevkorgen märkt *Ulf Torkelsson.* För mer information skicka e-mail till: torkel@fy.chalmers.se.