Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Måndag 19 augusti 2002, kl $14^{15} - 18^{15}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)
Jourhavande assistent: Tomas Nord, tel. 031-772 3156
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 20 augusti. Resultaten anslås senast den 30 augusti. Tentamensgranskning den 30 augusti kl. 12-13 i F4110.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Ett magnetfält $\mathbf{B}$ ges av

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a}(y, x),$$

där B_0 och a är konstanter. Bestäm ekvationen för den fältlinje som går genom $(a, 0)$.

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

där S är ytan $\rho = a$ och $-2a \leq z \leq 2a$ med en utåtriktad normal, och

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\left(\frac{a^2 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\rho \cos^2 \varphi}{a} \right) \hat{\rho} - \frac{\rho \sin \varphi \cos \varphi}{a} \hat{\varphi} + \frac{a^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \right],$$

där F_0 och a är konstanter.

3. En koaxialkabel består av en central cylindrisk ledare med radien R som omges av en annan ledare i form av ett tunt cylindriskt skal med radien $1,5R$ (mellan de båda ledarna, och utanpå den yttre ledaren finns isolermaterial). Genom den inre ledaren går en elektrisk ström I_0, och en lika stor ström går tillbaka genom den yttre ledaren. Beräkna magnetfältet kring kabeln. *Ledning:* Man kan anta att magnetfältlinjerna är koncentriska cirklar kring kabelns axel.

4. Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

där C är skärningen mellan ytorna

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36a^2$$

och

$$z = \frac{2}{3}a$$

genomlöpt i positiv riktning. Fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a^2} \left(-zy, zx, x^2 + y^2 \right)$$

där F_0 och a är konstanter.

5. (Endast för FFM232, 3p) Kärnfysikern Klas skall konstruera en kärnreaktor. I reaktorn frigörs energi genom att neutroner klyver urankärnorna i reaktorns bränsle. Klas behöver därför beräkna neutrontätheten n i reaktorn. Han vet att neutronerna transporteras genom reaktorn genom diffusion, det vill säga flödet av neutroner $\mathbf{J} = -k\nabla n$, där k är en konstant diffusionskoefficient. När en neutron klyver en atomkärna, så bildas det flera nya neutroner, och kärnklyvningen kan därför betraktas som en källa för neutroner. För enkelhets skull antar Klas att bränslet är jämt fördelat i reaktorn, och att mängden kärnklyvningar per tids- och volymsenhet, och därmed mängden nybildade neutroner, är proportionell mot den lokala neutrontätheten med en proportionalitetskoefficient A.
a). Ställ upp en differentialekvation som beskriver neutrontätheten som funktion av tid och position.
b) Beräkna neutrontätheten i reaktorn då jämvikt har ställt in sig, det vill säga när neutrontätheten inte beror på tiden. Antag att reaktorn är en-dimensionell och har längden L och att neutrontätheten är 0 vid reaktorns väggar. Neutrontäthetens största värde är n_0 och den kan inte vara negativ någonstans. Hur måst e A, k och L vara relaterade till varandra för att det skall finnas en lösning för n.

5. (Endast för FFM 231, 4p). Bestäm käll- och virvelfördelningen för fältet

$$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} F_0\left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathbf{r}} & \theta < \frac{\pi}{2} \\ F_0\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathbf{r}} & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

där F_0 och a är konstanter.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift 3. Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 26/8 till mig, Ulf Torkelsson, rum F2134, Forskarhuset vån. 2. För mer information kontakta mig via e-mail: torkel@fy.chalmers.se.

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK FFM 232/231

Måndag 19 augusti 2002

1/ <u>fältlinje:</u> $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{B_0}{a}(y, x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{B_0}{a} y \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{B_0}{a} x \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} y\,dy = \int_0^x x\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_{y(0)}^{y(x)} = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^x$$

$$y^2 = y(0)^2 - x^2$$

<u>fältlinje genom $(a,0)$:</u>

$$a^2 + y(0)^2 = 0 \Rightarrow y(0)^2 = -a^2$$

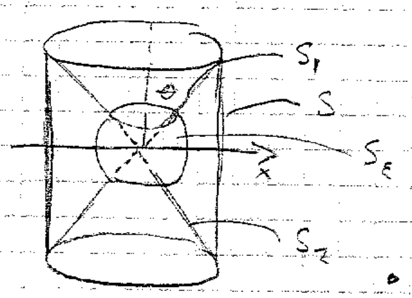
$$\Rightarrow \underline{\underline{y^2 = x^2 - a^2}}$$

2/ Dela upp $\mathbf{F}$ i $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ där:

$$\mathbf{F}_1 = F_0\left\{\frac{a^2 \rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} + \frac{a^2 z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}\right\} = F_0 a^2 \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_0\left\{\frac{\rho\cos^2\varphi}{a}\hat{\rho} - \frac{\rho\sin\varphi\cos\varphi}{a}\hat{\varphi}\right\} = \frac{F_0}{a} x\hat{x}$$

<u>I_1:</u> $I_1 = \int_S \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{S}$, Gauss sats ger:



$$I_1 + \int_{S_1} \mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2}\mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} - \int_{S_\varepsilon}\mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}_1\, dV$$

$\hookrightarrow$ normalen i $\hat{r}$-riktn.

- S_1- och S_2 bidragen är noll eftersom normalen är vinkelrät mot $\hat{r}$.
- $$\int_{S_\varepsilon} \mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta}^{\pi-\theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; F_0 a^2 \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta$$

$$= 2\pi F_0 a^2(\cos\theta - \cos(\pi-\theta))$$

$$= \left\{\cos\theta = 2/\sqrt{5},\ \cos(\pi-\theta) = -2/\sqrt{5}\right\}$$

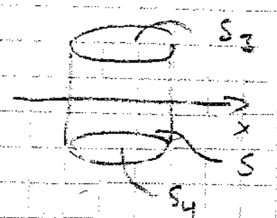
$$= \frac{8}{\sqrt{5}}\pi F_0 a^2$$

(2 forts.)

$$\nabla\cdot \mathbb{F}_1 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 F_0 a^2 \frac{1}{r^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad I_1 = I_c = \underline{\underline{\frac{8}{\sqrt{5}}\pi F_0 a^2}}$$

$\underline{I_2}$: $\quad I_2 = \int_S \mathbb{F}_2\cdot d\mathbb{S}$, Gauss sats ger:



$$I_2 + \underbrace{\int_{S_3} \mathbb{F}_2\cdot d\mathbb{S} + \int_{S_4} \mathbb{F}_2\cdot d\mathbb{S}}_{=0 \text{ ty } \hat{z}\perp\hat{x}} = \int_V \nabla\cdot\mathbb{F}_2\, dV$$

$$\Longrightarrow \quad I_2 = \int_V \nabla\cdot\mathbb{F}_2\, dV = \int_V \frac{F_0}{a}\, dV = \underline{\underline{4\pi F_0 a^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad I = I_1 + I_2 = \underline{\underline{4\pi F_0 a^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+1\right)}}$$

3/ $\quad H = H(r)$

$$\oint_C \mathbb{H}\cdot d\mathbb{r} = \{ d\mathbb{r} = r\hat{\theta}\, d\theta \}$$
$$= 2\pi r H(r) = I \quad \text{(innesluten ström)}$$

$$\Longrightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

- $r < R$, $\quad I = I_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_0 \frac{r^2}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r^2}{R^2} I_0$
- $R < r < 1,5R$, $I = I_0 \quad \Longrightarrow \quad B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0$
- $r > 1,5R$, $\quad I = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_3 = 0$

4/ $\quad$ C ges av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 32a^2$ som har halvaxlarna $\sqrt{32}\,a$ samt $\sqrt{8}\,a$.

$$\mathbb{F} = \frac{F_0}{a^2} z\left(-y\hat{x} + x\hat{y}\right) + \frac{F_0}{a^2}\rho^2\hat{z} = \underbrace{\frac{F_0}{a^2} z\rho\hat{\varphi}}_{\equiv \mathbb{F}_1} + \underbrace{\frac{F_0}{a^2}\rho\hat{z}}_{\mathbb{F}_2}$$

$\hat{z} \perp d\mathbb{r} \Longrightarrow$ endast $\mathbb{F}_1$ bidrar

$$\Longrightarrow \quad I = \oint_C \mathbb{F}_1\cdot d\mathbb{r} = \{ \text{Stokes sats} \}$$

(4 forts)

$$= \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \left\{ \nabla \times \mathbf{F} = \frac{2F_0}{a^2} z\hat{z} - \frac{F_0}{a^2} s\hat{s} \right\}$$

$$= \int_S \left(\frac{2F_0}{a^2} z\hat{z} - \cancel{\frac{F_0}{a^2} s\hat{s}} \right) \cdot d\mathbf{S} = \frac{4F_0}{3a} \int_S dS$$

$$= \frac{4F_0}{3a} \pi \sqrt{32}\, a \sqrt{8}\, a = \underline{\underline{\frac{64}{3} \pi F_0 a}}$$

5/ (FFM 232, 3p)

a/ n – neutroner / volym

$\mathbf{J} = -k\nabla n$

$A \cdot n$ – nya neutroner per volym och tidsenhet

V — $\int_V n(t)\, dv$ ← Antal neutroner i en volym V vid tiden t.

V — $\int_V n(t+\Delta t)\, dt$ ← Antal neutroner vid $t+\Delta t$.

$$= \underbrace{\int_V n(t)\, dV}_{\text{från förut}} - \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{neutronström}} + \underbrace{\int A \cdot n\, \Delta t\, dv}_{\text{nybildade}}$$

$$= \Delta t \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dV$$

$$\Longrightarrow \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = A \cdot n - \nabla \cdot \mathbf{J} = An + k\nabla^2 n$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\frac{dn(t)}{dt} = An + k\nabla^2 n}}$$

b/ jämvikt $\Longrightarrow An + k\partial_x^2 n = 0$

$$\Longrightarrow n(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right)$$

$n(0) = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{C_2 = 0}}$

$$\Longrightarrow n(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right)$$

$n(L) = 0 \Longrightarrow \sqrt{\tfrac{A}{k}}\, L = \pi$

maxvärde $n_0 \Longrightarrow C_1 = n_0$

$$\Longrightarrow n(x) = n_0 \sin\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right)$$

och $\underline{\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, L = \pi}$

5) (FFM 231 , 4p)

Rymdkälla :

$$\theta < \frac{\pi}{2} : \quad \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 F_0\left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta\right)\right) = \underline{\underline{\frac{F_0}{r^2} a \sin\theta}}$$

$$\theta > \frac{\pi}{2} : \quad \nabla \cdot \mathbb{F} = \underline{\underline{-\frac{F_0}{r^2} a \sin\theta}}$$

Rymdvirvel :

$$\theta < \frac{\pi}{2} : \quad \nabla \times \mathbb{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi F_r \hat{\theta} - \frac{1}{r}\partial_\theta F_r \hat{\varphi} = \underline{\underline{-\frac{F_0 a}{r^2}\cos\theta}}$$

$$\theta > \frac{\pi}{2} : \quad \nabla \times \mathbb{F} = \underline{\underline{\frac{F_0 a}{r^2}\cos\theta}}$$

Diskontinuitet för $\theta = \pi/2$:

ytkälla :

$$\sigma = (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) \cdot \hat{\nu} = \hat{z} \cdot (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = 0 \quad \text{ty} \quad \hat{z} \cdot \hat{r} \underline{\underline{= 0}}$$

ytvirvel :

$$\mathbb{K} = \hat{\nu} \times (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = \hat{z} \times \hat{r} \cdot \frac{2aF_0}{r} = \underline{\underline{\frac{2aF_0}{r}\hat{\varphi}}}$$

Singularitet i origo :

1) övre halvplanet :

$$q_1 = \lim_{\Delta V \to 0} \int_{\Delta S} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \iint F_0\left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta\right)\hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

$$= \lim_{r \to 0} F_0 \iint (a^2 \sin\theta + ar\sin^2\theta) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \dots = \lim_{r \to 0} 2\pi F_0 \left(a^2 + \frac{ar\pi}{4}\right)$$

$$\longrightarrow 2\pi F_0 a^2 \quad \text{då} \quad r \to 0$$

2) undre halvplanet :

$$q_2 = \lim_{r \to 0} F_0 \iint (a^2 \sin\theta - ar\sin^2\theta) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \dots = 2\pi F_0 a^2$$

$$\Longrightarrow \quad q = q_1 + q_2 = \underline{4\pi F_0 a^2}$$