Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Torsdag 17 januari 2002, kl $8^{45} - 12^{45}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)
Jourhavande assistent: Tomas Nord, tel. 031-772 3156
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 18 januari. Resultaten anslås senast den 1 februari. Tentamensgranskning den 1 februari kl. 12-13 i F4110.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Ett vektorfält $\mathbf{B}$ ges av vektorpotentialen $\mathbf{A}$ genom sambandet $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Finn fältlinjerna till $\mathbf{B}$ om

$$\mathbf{A} = A_0 \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{z}},$$

där A_0 och r_0 är konstanter.

2. En planet är uppbyggt av ett material med värmeledningsförmågan λ. Genom att materialet är lätt radioaktivt alstras det värme i materialet. Den avgivna effekten per volymsenhet är ρ. För ett medium med en värmekälla gäller att $\nabla \cdot \mathbf{J} = \rho$, där värmeströmmen $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$ (Fouriers lag).
a. Beräkna temperaturprofilen $T(r)$ i en sfärisk planet med radien R. Planetens yttemperatur kan antas vara 0 K.
b. Hur beror temperaturen i planetens centrum på dess radie R?

3. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där $\mathbf{F}$ i cylindriska koordinater ges av

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\right),$$

och ytan S ges av

$$(z - 2a)^2 = x^2 + y^2,$$

där $-2a \leq z \leq 2a$ och normalvektorn pekar bort från z-axeln. a och F_0 är konstanter.

4. En partikel rör sig längs den slutna banan

$$C: \quad \frac{1}{4}(x - a)^2 + 9y^2 = a^2$$

i moturs riktning under inverkan av en kraft

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\frac{ax}{x^2 + y^2}, \frac{x}{a} + \frac{ay}{x^2 + y^2}, 0\right).$$

a och F_0 är konstanter. Beräkna det arbete som kraften utför på partikeln

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

5. (Endast för FFM232, 3p) Fiskaren Klas är bekymrad för torskbeståndet i Nordsjön. Hans studier visar att torskbeståndet i en punkt tillväxer proportionellt mot den lokala torsktätheten n (mätt i torskar m^{-2}) med en proportionalitetskonstant γ, men det försvinner också torskar på grund av fisket, vilket han beskriver med en utfiskningsfunktion g med enhet torskar $\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$. Dessutom flyttar torskarna bort från områden som fiskas intensivt, och torskströmmen kan skrivas som $-D\nabla g$.

a. Sätt upp en differentialekvation för torskbeståndet.

b. Om vi antar att Nordsjön kan beskrivas som en cirkelskiva med radien R med kusterna längs skivans rand beräkna den stationära (tidsoberoende) torsktätheten om vi kan skriva utfiskningsfunktionen som

$$g = g_0 \frac{R^2 - \rho^2}{R^2}.$$

Antag att γ och D är konstanter.

5. (Endast för FFM 231, 4p). Bestäm källfördelningen för det fält som har potentialen

$$\Phi\left(r,\theta,\varphi\right) = \begin{cases} \Phi_0 \left(\frac{a}{r} + 2\frac{r}{a}\cos\theta\right) & r < a \\ \Phi_0 \left(1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos\theta\right) & r > a \end{cases}$$

i sfäriska koordinater. a är en konstant.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift 3. Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 25/1 till mig, Ulf Torkelsson, rum O7108B, Origohuset vån. 7. Rapporten kan läggas i min vanliga brevkorg märkt *Ulf Torkelsson.* För mer information kontakta mig via e-mail: torkel@fy.chalmers.se.

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK FFM232/231

Torsdag 17 januari 2002, $8^{45} - 12^{45}$

---

1) Fältlinjerna ges av $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = C\,\mathbf{B} = C\,\nabla\times\mathbf{A}$

$$= CA_0 r_0^2\, \nabla\times\left(\frac{1}{\rho^2}\hat{z}\right)$$

$$= C\cdot 2A_0 r_0^2\, \frac{1}{\rho^3}\hat{\varphi}$$

$\Longrightarrow$ $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ har inget z- eller φ-beroende

$\Longrightarrow$ Fältlinjerna är cirklar runt z-axeln

Vidare är $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}\hat{\rho} + \rho\frac{d\varphi}{d\tau}\hat{\varphi} + \frac{dz}{d\tau}\hat{z} = \frac{2CA_0 r_0^2}{\rho^3}\hat{\varphi}$

$$\Longrightarrow \quad \rho = \frac{2CA_0 r_0^2}{\rho^3} \quad \Longrightarrow \quad \rho^4 = 2CA_0 r_0^2$$

vilket ger radien på cirklarna för olika konstanter C.

---

2) a) $\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{J} &= s \\ \mathbf{J} &= -\lambda\nabla T\end{aligned}\right\}$ $\quad \nabla^2 T = -\frac{s}{\lambda}$

$T(R) = 0$

Sfäriska koordinater: $\nabla^2 T = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{s}{\lambda}r^2$

$$\Longrightarrow \quad r^2\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{s}{3\lambda}r^3 + c_1$$

$$\Longrightarrow \quad T = -\frac{s}{6\lambda}r^2 - \frac{c_1}{r} + c_2$$

Ändlig temp. vid $r=0$ $\Longrightarrow$ $c_1 = 0$

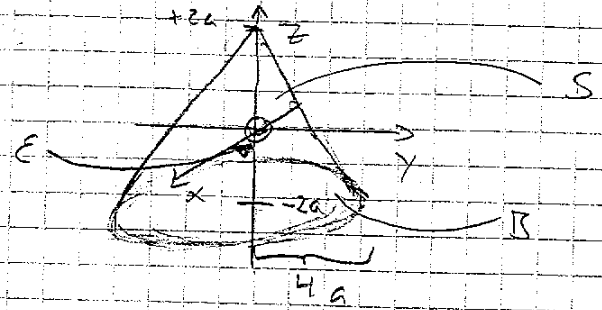
$T(R) = 0$ $\Longrightarrow$ $c_2 = \frac{s}{6\lambda}R^2$

$$\Longrightarrow \quad T(r) = \frac{s}{6\lambda}\left(R^2 - r^2\right)$$

b) $T(0) = \frac{s}{6\lambda}R^2$

3/ $\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}$ $\qquad \mathbb{F} = F_0(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)$

$$= F_0 r\hat{r}\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{r^3}\right)$$



Singularitet i origo:

$$\Rightarrow \underbrace{\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV}_{I_V} = \underbrace{\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}}_{I} + \underbrace{\int_{\varepsilon,\,\text{normal inåt}} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{B,\,\text{normal nedåt}} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}}_{I_B}$$

$$\Rightarrow I = I_V - I_\varepsilon - I_B$$

$\underline{\underline{I_V}}$: $\quad \nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) = \frac{3F_0}{a}$

$$\Rightarrow I = \int_V \frac{3F_0}{a}\,dV = \frac{3F_0}{a}\cdot\frac{\pi(4a)^2\cdot 4a}{3}$$

$$= \underline{\underline{64\pi F_0 a^2}}$$

$\underline{\underline{I_\varepsilon}}$: $\quad \int_\varepsilon F_0 r\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{r^3}\right)\hat{r}\cdot(-\hat{r})\,dS$

$$= -F_0 r\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{r^3}\right)\int_\varepsilon dS\,\Big|_{r=\varepsilon}$$

$$= -4F_0\pi\left(\frac{\varepsilon^3}{a} + a^2\right)$$

$$\to \underline{\underline{-4\pi F_0 a^2}} \quad \text{då } \varepsilon\to 0$$

$\underline{\underline{I_B}}$: $\quad -F_0\int_B \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})\cdot\hat{z}\,dS$

$$= -2\pi F_0 z\int_0^{4a}\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)\rho\,d\rho\,\Big|_{z=-2a}$$

$$= -2\pi F_0 z\left\{\left[\frac{\rho^2}{2a}\right]_0^{4a} - a^2\left[\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^{4a}\right\}$$

(3 forts)

$$= 4\pi F_0 a^2 \left(8{,}5 - \frac{1}{\sqrt{20}} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad I = \left(64 + 4 - 34 + \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \pi F_0 a^2$$

$$= \pi F_0 a^2 \left(34 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= 2\pi F_0 a^2 \left(17 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

4/ $$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_C (\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2) \cdot d\mathbb{r}$$

där
$$\begin{cases} \mathbb{F}_1 = F_0 \dfrac{x}{a} \hat{y} & \nabla \times \mathbb{F}_1 = \dfrac{F_0}{a} \hat{z} \\ \mathbb{F}_2 = a F_0 \left(\dfrac{x \hat{x}}{\rho^2} + \dfrac{y \hat{y}}{\rho^2} \right) = a F_0 \dfrac{\hat{\rho}}{\rho} \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbb{F}_2 = \frac{\partial F_\rho}{\partial z} \hat{\varphi} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \hat{z}$$

$$= 0$$

$$\int_C \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbb{r} = \int_S \nabla \times \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbb{S} = \frac{F_0}{a} \int dS = \frac{F_0}{a} A$$

<u>A:</u> $\quad C: \quad \dfrac{(x-a)^2}{(2a)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} = 1$

$\Rightarrow$ ellips med halvaxlar $a' = 2a$ och $b' = \frac{a}{3}$

$$\Rightarrow \quad A = \pi a' b' = \frac{2\pi}{3} a^2$$

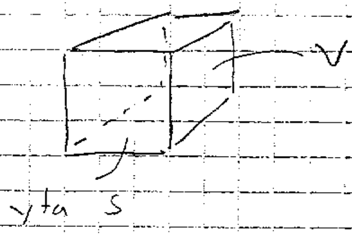
$$\int_C \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{r} = \{ \text{sing. i origo, lägg till } \varepsilon\text{-cirkel} \}$$

$$= \int_S \nabla \times \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{S} - \int_\varepsilon \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{r}$$

$$= 0 - a F_0 \int_\varepsilon \frac{\hat{\rho}}{\rho} (-\hat{\varphi}) dr = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \frac{F_0}{a} \cdot \frac{2\pi}{3} a^2 = \frac{2\pi F_0 a}{3}$$

5) a)



$$\begin{cases} \text{densitet}: & n(r,t) \\ \text{tillväxt}: & \gamma\, n(r,t) \\ \text{utfiskning}: & g(r,t) \\ \text{ström}: & -a\nabla g \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_V n(r,t+\Delta t)\,dV = \int_V n(r,t)\,dV$$
$$+ \int_V \gamma\, n(r,t)\,dV \cdot \Delta t$$
$$- \int_V g(r,t)\,dV \cdot \Delta t$$
$$+ \int_S (-a\nabla g)\,dS \cdot \Delta t \qquad *$$

$$* = \int_V a\nabla^2 g\,dV$$

$$\Longrightarrow \int_V \frac{dn}{dt}\,dV = \int_V \left(\gamma n - g + a\nabla^2 g\right)dV$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\frac{dn}{dt} = \gamma n - g + a\nabla^2 g}}$$

b) $\begin{cases} \text{stationärt} \Rightarrow \dfrac{dn}{dt} = 0 \\ g = g_0 \dfrac{R^2 - r^2}{R^2} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \gamma n(r) = g_0 \frac{R^2 - r^2}{R^2} - a\nabla^2 g_0 \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a\nabla^2 g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a g_0\left(-\frac{4}{R^2}\right)$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{n(r) = \frac{g_0}{\gamma}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)}}$$

5/ $\underline{r<a}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \ldots = \frac{\Phi_0 a}{r^2}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$\underline{r>a}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \ldots = \frac{6\Phi_0 a^3}{r^4}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0 a^3}{r^4}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

- Ytkälla vid $r=a$?

$$\begin{cases} \mathbb{F}_- = \frac{\Phi_0}{a}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta} \\ \mathbb{F}_+ = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta} \end{cases}$$

$$\sigma = (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-)\cdot\hat{n} = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta - \frac{\Phi_0}{a} + \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta$$

$$= \underline{\underline{\frac{\Phi_0}{a}(8\cos\theta - 1)}}$$

- Rymdkällor ?

$\underline{\underline{r<a}}$: $\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left[\frac{\Phi_0 a}{r^2} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\right]\right)$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\left[\frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\right]\right)$$

$$= -\frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta + \frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta = \underline{\underline{0}}$$

$\underline{\underline{r>a}}$: $\nabla\cdot\mathbb{F} = \ldots = \underline{\underline{-\frac{8\Phi_0 a^3\cos\theta}{r^5}}}$

- Punktkällor ?

$\underline{\underline{r>a}}$: inga singulariteter

$\underline{\underline{r<a}}$: punktkälla i origo $\underline{\underline{q = 4\pi\Phi_0 a}}$