Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Måndag 20 augusti 2001, kl $14^{15} - 18^{15}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)
Jourhavande assistent: Tomas Nord, tel. 031-772 3156
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 21 augusti. Resultaten anslås senast den 31 augusti. Tentamensgranskning den 31 augusti kl. 13-14 i F4110.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 27 poäng; betyg 5 36 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Bestäm nivåytorna till funktionen

$$\Phi = \Phi_0 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad a > 0, \quad \Phi_0 > 0.$$

2. En elektrisk ledare formad som en ring med radien R genomlöps av en ström I. Ledaren ligger i xy-planet med centrum i punkten $(x_0, y_0, 0)$. Beräkna kraften

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

med vilken magnetfältet

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{x}{a} \hat{z} \tag{1}$$

påverkar ledaren. Beräkna också det magnetiska flödet genom ringen.

VÄND!

3. Ett vektorfält **F** har potentialen

$$\phi = 3\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

dvs $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt? Beräkna det maximala flödet.

4. I en serie böcker beskrev den amerikanske författaren Edgar Rice Burroughs ett folk som levde på insidan av en ihålig jord. Beräkna tyngdaccelerationen överallt i en sådan jord om vi antar att den består av ett skal med en innerradie som är $2R/3$ och med en ytterradie som sammanfaller med jordradien R. Inuti skalet antar vi att det finns ett mindre klot med radien $R/3$ vars centrum sammanfaller med skalets centrum. Antag att densiteten i skalet och det inre klotet är konstant ρ, och uttryck ρ i termer av den kända tyngdaccelerationen g vid jordytan.

Ledning: Gauss lag för ett gravitationsfält

$$\oint_S \mathbf{g}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi GM.$$

5. (Endast för FFM232, 3p.) Klas har bestämt sig för att studera chalmeristernas dryckesvanor. Han har därför kommit överens med ledningen för Pripps att han skall få tillsätta en mindre mängd radioaktivt etanol (etanol som innehåller en kol-11 atom) till det öl som via en pipeline transporteras till Chalmers.

a. Härled en differentialekvation som beskriver hur densiteten c av radioaktivt etanol varierar som funktion av tiden och läget x i pipelinen. Antag att ölet strömmar med en konstant hastighet u_0 och att kol-11 sönderfaller med sönderfallstiden τ, det vill säga att under tiden dt minskar antalet kolatomer, N, med

$$\mathrm{d}N = N\frac{\mathrm{d}t}{\tau}.$$

b. Efter en viss tid inträder ett stationärt tillstånd i pipelinen, det vill säga densiteten av radioaktivt kol-11 beror inte längre på tiden. Om pipelinen har en längd L, vad blir då densiteten vid Chalmers uttryckt i densiteten ρ_0 vid Pripps?

5. (Endast för FFM231, 4p). Vektorfältet **F** är givet i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$,

$$F(r,\theta,\phi) = F_0\left(\frac{a}{r}+\frac{r}{a}\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{r}} + F_0\left(\frac{a}{r}\cot\theta + \frac{r}{2a}\sin 2\theta\cos^2\varphi\right)\hat{\theta}$$
$$-F_0\frac{r}{2a}\sin\theta\sin 2\varphi\hat{\varphi},$$

där F_0 och a är konstanter. Visa att fältet är virvelfritt och bestäm den potential Φ som är 0 i punkten $r=a$, $\theta=\pi/6$, $\varphi=\pi/2$.

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK,

FFM 232 / 231 2001-08-20

1. Sätt $\Phi = c\,\Phi_0$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+a^2} = c \quad , \quad c \geq 0$$

$\Rightarrow$ Tre fall:

$\underline{0 \leq c < 1:}$ $(1-c)x^2 + (1-c)y^2 + z^2 = ca^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{ca^2}{1-c}} + \frac{y^2}{\frac{ca^2}{1-c}} + \frac{z^2}{ca^2} = 1$$

$\Rightarrow$ Ellipsoid med halvaxlarna:

$$\sqrt{\frac{c}{1-c}}\,a \,,\ \sqrt{\frac{c}{1-c}}\,a \,,\ \sqrt{c}\,a$$

$\underline{c = 1:}$ $\Rightarrow$ $z^2 = ca^2$

$\Rightarrow$ planen $z = \pm\sqrt{c}\,a$

$\underline{\underline{c > 1}}:$ $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\frac{ca^2}{c-1}} + \frac{y^2}{\frac{ca^2}{c-1}} - \frac{z^2}{ca^2} = -1$$

$\Rightarrow$ Tvåmantlad hyperboloid längs z-axeln med halvaxlar:

$$\sqrt{\frac{c}{c-1}}\,a \,,\ \sqrt{\frac{c}{c-1}}\,a \,,\ \sqrt{c}\,a$$

---

2. Kraften: $\mathbb{F} = \int_C I\, d\mathbb{r} \times \mathbb{B} = \{\text{Stokesanalog sats}\}$

$$= I\int_S (d\mathbb{S} \times \nabla) \times \mathbb{B} = I\int_S (\hat{z} \times \nabla) \times \mathbb{B}\, dS$$

$$= I\int_S (-\partial_y, \partial_x, 0) \times \mathbb{B}\, dS$$

$$= I\int_S \left[\partial_x\left(\frac{B_0 x}{a}\right)\hat{x} - \partial_y\left(\frac{B_0 x}{a}\right)\right] dS = \frac{I B_0}{a}\hat{x}\int_S dS$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi R^2 I B_0}{a}\hat{x}}}$$

Flödet: $\Phi = \int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \int_S \frac{B_0 x}{a}\, dS$

$= \{$ Byt variabler till $x' = x - x_0,\ y' = y - y_0,\ z' = z$ så att cirkeln hamnar centrerat $\}$

$\Rightarrow \quad \Phi = \frac{B_0}{a}\int_{S'} x'\,dS' + \frac{B_0}{a}\int_{S'} x_0\, dS'$

$= \{$ 1:a integralen ger 0 ty x' är udda $\}$

$$= \frac{B_0 x_0}{a}\int_{S'} dS' = \underline{\underline{\frac{\pi R^2 B_0 x_0}{a}}}$$

---

3. Flödet $\Phi = \int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \{$ Gauss Sats $\}$

$$= \int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\, dV = \int_V \Delta\phi\, dV$$

$\phi = 3r^2 - r^4$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(6r^3 - 4r^5\right)$$

$$= 18 - 20r^2$$

$\Rightarrow \quad \Phi = \int_V (18 - 20r^2)\, dV$

Integranden är större än noll endast då $18 - 20r^2 > 0$ dvs $r < \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow$ Maximalt flöde fås om man integrerar ut till $r = 3/\sqrt{10}$.

$\Rightarrow$ Den sökta ytan S är $\underline{\underline{\text{skalet } r = \frac{3}{\sqrt{10}}}}$.

Flödet $\Phi = \int_V (18 - 20r^2)\, dV = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{10}}} (18 - 20r^2) r^2 dr \int d\Omega$

$$= 4\pi\left[6r^3 - 4r^5\right]_0^{3/\sqrt{10}} = 4\pi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^3\left(6 - \frac{4\cdot 9}{100}\right)$$

$$= \underline{\underline{4\pi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^3 \frac{564}{100}}}$$

4. Analogi med elektriskt fält:

$$4\pi\varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi Q$$ Q är innesluten laddning

$$\cancel{\frac{1}{G}\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = 4\pi M}$$ ~~M är innesluten massa~~

där tyngdaccelerationen är storleken på g i $-\hat{r}$-riktningen. $\Rightarrow \quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G M(r)$

Uttryck ρ som funktion $g_0 = g(R)$:

$$\Rightarrow \quad 4\pi R^2 g(R) = 4\pi G\left[4\pi\int_0^{R/3} \rho r'^2 dr' + 4\pi\int_{\frac{2R}{3}}^{R} \rho r'^2 dr'\right]$$

$$\Rightarrow \quad g_0 = \frac{4\pi G\rho}{3R^2}\left(\left[r'^3\right]_0^{R/3} + \left[r'^3\right]_{\frac{2R}{3}}^{R}\right)$$

$$= \frac{4\pi G\rho}{3R^2}\,\frac{1 + 27 - 8}{27}R^3 = \frac{80\pi G\rho R}{81}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\rho = \frac{81\, g_0}{80\pi G R}}}$$

Tyngdaccelerationen som funktion av r:

$0 < r < \frac{R}{3}$: $\quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G\cdot 4\pi\int_0^r \rho r'^2 dr'$

$$\Rightarrow \quad g(r) = \frac{4\pi G}{r^2}\cdot\frac{81\, g_0}{80\pi G R}\cdot\frac{r^3}{3} = \underline{\underline{\frac{27}{20}\, g_0\,\frac{r}{R}}}$$

$\frac{R}{3} < r < \frac{2R}{3}$: $\quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3\cdot\frac{81\, g_0}{80\pi G R}$

$$\Rightarrow \quad g(r) = \frac{4\cdot 3^4}{3^4\cdot 80}\, g_0\,\frac{R^2}{r^2} = \frac{g_0}{20}\,\frac{R^2}{r^2}$$

$\frac{2R}{3} < r < R$: $\quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3\frac{81}{80}\,\frac{g_0}{\pi G R} + 4\pi\int_{\frac{2R}{3}}^{r}\rho r'^2 dr'\right]$

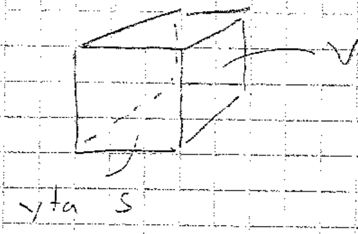
$$\Rightarrow \quad g(r) = \frac{G}{r^2}\left\{\frac{g_0 R^2}{20 G} + \frac{4\pi}{3}\,\frac{81\, g_0}{80\pi G R}\left[r^3 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3\right]\right\}$$

$$= \frac{g_0}{20}\,\frac{R^2}{r^2} + \frac{27}{20}\, g_0\,\frac{r}{R} - \frac{27}{20}\, g_0\,\frac{8}{27}\,\frac{R^2}{r^2}$$

$$= \frac{27}{20}\, g_0\,\frac{r}{R} + \frac{1-8}{20}\, g_0\,\frac{R^2}{r^2}$$

$$= \underline{\frac{27}{20}\, g_0\,\frac{r}{R} - \frac{7}{20}\, g_0\,\frac{R^2}{r^2}}$$

5) a)



$$\begin{cases} \text{densitet: } n(r,t) \\ \text{tillväxt: } \gamma\, n(r,t) \\ \text{utfiskning: } g(r,t) \\ \text{ström: } -a\nabla g \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_V n(r,t+\Delta t)\,dV = \int_V n(r,t)\,dV$$
$$+ \int_V \gamma n(r,t)\,dV \cdot \Delta t$$
$$- \int_V g(r,t)\,dV \cdot \Delta t$$
$$+ \int_S (-a\nabla g)\,dS \cdot \Delta t \qquad *$$

$$* = \int_V a\nabla^2 g\,dV$$

$$\Longrightarrow \int_V \frac{dn}{dt}\,dV = \int_V \left(\gamma n - g + a\nabla^2 g\right)dV$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\frac{dn}{dt} = \gamma n - g + a\nabla^2 g}}$$

b) $$\begin{cases} \text{stationärt} \Rightarrow \dfrac{dn}{dt} = 0 \\ g = g_0 \dfrac{R^2 - r^2}{R^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \gamma n(r) = g_0 \frac{R^2 - r^2}{R^2} - a\nabla^2 g_0 \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a\nabla^2 g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a g_0\left(-\frac{4}{R^2}\right)$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{n(r) = \frac{g_0}{\gamma}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)}}$$

5) $\underline{\underline{r<a}}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \dots = \frac{\Phi_0 a}{r^2}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\hat{\theta}$$

$\underline{\underline{r>a}}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \dots = \frac{6\Phi_0 a^3}{r^4}\cos\theta\hat{r} + \frac{2\Phi_0 a^3}{r^4}\sin\theta\hat{\theta}$$

- Ytkälla vid $r=a$?

$$\begin{cases} \mathbb{F}_- = \frac{\Phi_0}{a}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\hat{\theta} \\ \mathbb{F}_+ = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\hat{\theta} \end{cases}$$

$$\sigma = (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-)\cdot\hat{r} = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta - \frac{\Phi_0}{a} + \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta$$

$$= \underline{\underline{\frac{\Phi_0}{a}(8\cos\theta - 1)}}$$

- Rymdkällor ?

$\underline{\underline{r<a:}}$

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left[\frac{\Phi_0 a}{r^2} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\right]\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\left[\frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\right]\right)$$

$$= -\frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta + \frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta = \underline{\underline{0}}$$

$\underline{\underline{r>a:}}$

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \dots = \underline{\underline{-\frac{8\Phi_0 a^3\cos\theta}{r^5}}}$$

- Punktkällor ?

$\underline{\underline{r>a}}$: inga singulariteter

$\underline{\underline{r<a}}$: punktkälla i origo $\underline{\underline{q = 4\pi\Phi_0 a}}$