Vektorfält och Klassisk Fysik F2

FFM232 (FFM231)

TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2001-08-20	x	x	
2002-01-17	x	x	
2002-08-19	x	x	
2003-01-16	x		
2003-08-18	x		
2003-10-25			
2004-01-13	x		
2004-08-24			
2004-10-23	x		
2005-01-13	x	x	
2005-08-23			
2005-10-22			
2006-01-12			
2006-08-29	x	x	

19 oktober 2006

Tentamen i Vektorfält och klassisk fysik, FFM232

Tisdagen den 29 augusti 2006, kl. 8.30 - 12.30 i V-huset

Examinator: Henrik Johannesson, ankn. 3185, mobil 0768-237042.
Hjälpmedel: Physics Handbook, Beta, Standard Math Tables, kursens formelsamling.
Lösningarna anslås på entrédörren till Fysicum omedelbart efter skrivningens slut. Tentamensresultaten anslås i trapphuset senast den 26 september. Tentamensgranskning den 26 september kl 12-13 i rum O7104A, Norra flygeln, Origohuset.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.
Maximal bonus från datoruppgifter är 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 27 poäng; betyg 5: 36 poäng.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras** (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Ett vektorfält har potentialen ϕ, given i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$ som

$$\phi = \left(\frac{a}{\rho} + b\rho\right)\sin\alpha,$$

där a och b är konstanter. Beräkna vektorfältets flöde ut genom begränsningsytan till kuben med sidan c och mittpunkt i $(x, y, z) = (0, d, 0)$ där $c < d$.

2. Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw ges av sambandet

$$\begin{cases} u = r(1 - \cos\theta) \\ v = r(1 + \cos\theta) \\ w = \varphi \end{cases}$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater. Visa att systemet är ortogonalt och beräkna dess skalfaktorer. Hur ser (i) gradientoperatorn ∇ och (ii) ortsvektorn $\boldsymbol{r}$ ut i uvw systemet?

3. I en ledare längs kurvan C

$$C:\ \boldsymbol{r} = \begin{cases} (a\cos t, a\sin t, at), & 0 \le t \le 2\pi \\ (a, 0, 4\pi a - at), & 2\pi \le t \le 4\pi \end{cases}$$

går en elektrisk ström med strömstyrkan I. Ledaren befinner sig i ett magnetfält med flödestätheten $\boldsymbol{B}(x, y, z) = B_0[a(x^2 + y^2)^{-1}(y\hat{x} - x\hat{y}) + a^{-1}x\hat{z}]$. Beräkna kraften $\boldsymbol{F} = I\int_C d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}$ på ledaren.

. *VÄND!*

4. Temperaturen i ett stycke uppvärmt keramiskt material anges av skalärfältet

$$T(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz \quad [°\mathrm{C}].$$

Betrakta temperaturvariationerna i olika riktningar från punkten $P_0 : (1, 2, -3)$ och visa att alla riktningar i vilka temperaturen minskar $2°C$/längdenhet bildar samma vinkel α med den riktning $\boldsymbol{n}$ i vilken temperaturen växer snabbast. Bestäm α och $\boldsymbol{n}$.

5. Hastighetsfältet $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ för en strömmande vätska i två dimensioner kan beskrivas med hjälp av en strömfunktion ψ, där

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Om vätskan är inkompressibel och strömningen är virvelfri överallt så uppfyller ψ Laplaces ekvation:

$$\nabla^2 \psi = 0\,.$$

Betrakta en oändligt lång cylinder med radien a och med z-axeln som symmetriaxel. En inkompressibel vätska strömmar in med konstant hastighet u_0 i x-riktningen från vänster ($x < 0$). Bestäm vätskans hastighet i varje punkt i xy-planet utanför cylindern om strömningen antas vara virvelfri överallt.
Ledning: Ansätt en lösning av formen $\psi(\rho, \alpha) = f(\rho) \sin \alpha$, där ρ och α är cylinderkoordinater. Utnyttja också att ψ uppfyller ett homogent Dirichlet randvillkor på cylinderns mantelyta.

LÖSNINGSFÖRSLAG

Tentamen: VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK FFM232

29/8 2006

---

1) Flödet ut ur kuben ges av

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \{\text{Gauss sats}\} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = -\nabla \cdot (\nabla \Phi) = -\nabla^2 \Phi$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(-\frac{\alpha}{\rho} + b\rho\right)\sin\alpha + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{a}{\rho} + b\rho\right)\sin\alpha$$
$$= \left(-\frac{a}{\rho^3} - \frac{b}{\rho}\right)\sin\alpha + \left(\frac{\alpha}{\rho^3} + \frac{b}{\rho}\right)\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

SVAR: FLÖDET = 0.

2) $\vec{r} = (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$

$v - u = 2r\cos\theta,\quad vu = r^2(1-\cos^2\theta) = r^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow \vec{r} = (\sqrt{vu}\cos w,\ \sqrt{vu}\sin w,\ (v-u)/2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{v}{u}}\cos w, \sqrt{\dfrac{v}{u}}\sin w, -1\right) \\ \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{u}{v}}\cos w, \sqrt{\dfrac{v}{u}}\sin w, 1\right) \\ \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \left(-\sqrt{uv}\sin w, \sqrt{uv}\cos w, 0\right) \end{cases}$$

ORTOGONALITET OK

SKALFAKTORER

$$h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}}$$
$$h_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{v}}$$
$$h_w = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| = \sqrt{uv}$$

GRADIENT

$$\nabla\phi(u,v,w) = \frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{u+v}}\frac{\partial\phi}{\partial u}\hat{u} + \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{v+u}}\frac{\partial\phi}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{\sqrt{vu}}\frac{\partial\phi}{\partial w}\hat{w}$$

ORTSVEKTOR

$r = \frac{1}{2}(u+v)$

$$\vec{r} = r\nabla r = \frac{1}{2}(u+v)\left\{\frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{u+v}}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial u}}_{=1/2}\hat{u} + \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{u+v}}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial v}}_{=1/2}\hat{v} + \frac{1}{\sqrt{vu}}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial w}}_{=0}\hat{w}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{u(u+v)}\,\hat{u} + \sqrt{v(u+v)}\,\hat{v}\right)$$

3) Kurvan består av två delar C_1 och C_2

$$\int_C d\vec{r} \times \vec{B} = \int_{C_1} d\vec{r} \times \vec{B} + \int_{C_2} d\vec{r} \times \vec{B}$$

För C_1 har vi :

$$d\vec{r} = a(-\sin t, \cos t, 1)\, dt$$

$$\vec{B} = B_0\left[a(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^{-1}(a\sin t\,\hat{x} - a\cos t\,\hat{y}) + \cos t\,\hat{z}\right]$$

$$= B_0\left[\sin t\,\hat{x} - \cos t\,\hat{y} + \cos t\,\hat{z}\right]$$

$$d\vec{r} \times \vec{B} = aB_0\,dt \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ \sin t & -\cos t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$= aB_0\,dt\left\{(\cos^2 t + \cos t)\,\hat{x} + (\sin t + \sin t\cos t)\,\hat{y}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} d\vec{r} \times \vec{B} = aB_0\int_0^{2\pi} dt\left[\quad \dots \quad\right] = aB_0\pi\,\hat{x} \qquad (i)$$

För C_2 :

$$\begin{cases} d\vec{r} = -a\hat{z}\,dt \\ \vec{B} = B_0\left[a \cdot a^{-2}(-a\hat{y}) + \hat{z}\right] \end{cases}$$

$$d\vec{r} \times \vec{B} = aB_0(\hat{z} \times \hat{y})\,dt = -aB_0\,\hat{x}\,dt$$

$$\int_{C_2} d\vec{r} \times \vec{B} = \int_{2\pi}^{4\pi} dt\,(-aB_0)\,\hat{x} = -2\pi aB_0\,\hat{x} \qquad (ii)$$

$$\vec{F} = I\int d\vec{r} \times \vec{B} = I\,\left((i) + (ii)\right) = \underline{-\pi a I B_0\,\hat{x}}$$

4.

riktnings derivata

4) $$\left(\frac{dT}{d\hat{\tau}}\right)_{P_0} = (\text{grad } T)_{P_0} \cdot \hat{\tau} = |\text{grad } T|_{P_0} \, \hat{\tau} \cdot \hat{n}$$

$$= \underbrace{|\text{grad } T|_{P_0}}_{(4,-1,-2)} \cos\alpha$$

$$\hat{n} = \left(\frac{\text{grad } T}{|\text{grad } T|}\right)_{P_0} = \frac{(4,-1,-2)}{\sqrt{21}}$$

$$\left(\frac{dT}{d\hat{\tau}}\right)_{P_0} = -2 = |\text{grad } T|_{P_0} \cos\alpha = \sqrt{21} \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$

notation : $\phi \equiv \psi$!

5) $\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi = f(\rho)\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(f(\rho)\sin\alpha\right)\right) + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(f(\rho)\sin\alpha\right)}_{= -f(\rho)\sin\alpha} = 0$

$\Rightarrow \left\{ \rho^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} - f = 0 \right\}$ Euler ekvation

sätt $f = C\rho^m \Rightarrow \rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + m\rho\rho^{m-1} - \rho^m = 0$

$\Rightarrow m = \pm 1$

$\Rightarrow \left(\phi = \left(A\rho + \frac{B}{\rho}\right)\sin\alpha \right)$, A, B konstanter

RANDVILLKOR ① $\phi(\rho, \alpha) \to u_0 \underbrace{\rho \sin\alpha}_{y}$ då $\rho \to \infty$, $|\alpha| > \pi/2$

ty $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} = u_0$ då $\rho \to \infty$, $|\alpha| > \pi/2$
(givet i texten)

② $\phi(a, \alpha) = 0$ (homogent Dirichlet)

① & ② $\Rightarrow A = u_0$, $B = -a^2$ $\Rightarrow \phi = u_0\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\sin\alpha$
$= u_0 y - u_0 a^2 \frac{y}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} = u_0 - u_0 a^2 \left(\frac{x^2+y^2 - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \right) = u_0 - u_0 a^2 \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \\ v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\left\{ -u_0 a^2 \left(\frac{-y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \right) \right\} = -2u_0 a^2 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

Chalmers
Institutionen för Tillämpad Fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232

Tid: Torsdag 13 januari 2004, kl. $14^{00} - 18^{00}$
Plats: V
Examinator: Mats Persson
Jourhavande: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (kontor), 0733-261681 (mobil)
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling i vektoranalys av Olle Brander och Standard Math Tables.

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 14 januari. Resultaten anslås senast den 1 Februari. Tentamensgranskning den 3 februari kl. 12-13 i rum 3035 på Soliden.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning. Maximal bonus från datoruppgifter är 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 20 poäng; betyg 4: 30 poäng; betyg 5: 40 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Ett vektorfält $\mathbf{B}$ ges av vektorpotentialen $\mathbf{A}$ via sambandet $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Bestäm den fältlinje till $\mathbf{B}$ som går igenom punkten $a\hat{\mathbf{x}}$ om

$$\mathbf{A} = -\frac{A_0}{a^2}\rho^2\hat{\mathbf{z}}$$

i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$. A_0 och a är konstanter.

2. Ett kroklinjigt koordinatsystem $uv\alpha$ ges av

$$\mathbf{r} = uv(\cos\alpha\hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\hat{\mathbf{y}}) + \frac{(u^2 - v^2)}{2}\hat{\mathbf{z}}$$

där $0 \leq u, v < \infty$ och $0 \leq \alpha < 2\pi$. Bestäm skalfaktorerna och beräkna $\nabla^2(uv)$.

VÄND !!

3. Beräkna normalytintegralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

där ytan S är given i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$ av

$$\rho = 2a - z, \ -a < z < a, \ 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Ytnormalen pekar bort från origo. Fältet har formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0 \left((\frac{a}{\rho} + 2\frac{\rho \sin^2 \alpha}{a})\hat{\rho} + \frac{\rho}{a} \sin 2\alpha \hat{\alpha} + \frac{z}{a}\hat{\mathbf{z}} \right)$$

där F_0 och a är konstanter.

4. En elektrisk ledare som beskrivs av kurvan C: $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$ och $z = 0$ genomlöps moturs av en ström I. Beräkna kraften

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

med vilken magnetfältet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \left(-(\frac{x}{a})\hat{\mathbf{x}} + \left((\frac{y}{a})^2 + (\frac{z}{a}) \right) \hat{\mathbf{z}} \right)$$

påverkar ledaren. B_0 och a är konstanter.

5. En sfär med radien a innehåller en utbredd laddningsfördelning ρ_0 given i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$ av

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_0}{\pi a^4} \cos\theta$$

där μ_0 är en konstant. Bestäm den elektriska potentialen ϕ innanför och utanför sfären. (*Ledning:* ϕ och $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ är kontinuerliga igenom sfären och ϕ är begränsad i $r = 0$ och $r \to \infty$.)

①

VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK (FFM232)

TENTAMEN 2005-01-13

LÖSNINGAR

---

1. $$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{A_0\rho^2}{a^2} \end{vmatrix} = \frac{2A_0}{a^2}\rho\hat{\alpha}$$

fältlinjernas ekvation:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}\hat{\rho} + \rho\frac{d\alpha}{d\tau}\hat{\alpha} + \frac{dz}{d\tau}\hat{z} = \frac{CA_0}{a^2}\rho\hat{\alpha}$$

$\frac{d\rho}{d\tau} = 0$ ρ är konstant ($x^2+y^2=$ konstant)

$\frac{dz}{d\tau} = 0$ z är konstant

$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{C2A_0}{a^2}$ $\alpha = \tau$ då $C2A_0/a^2 = 1$

Fältlinjerna är cirklar i planen z är konstant med centrum i origo. Fältlinjen som passerar punkten $a\hat{x}$ har ekvationen: $x^2+y^2=a^2$, $z=0$

2. Skalfaktorer

$$h_u = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right| = \left| v(\cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y}) + u\hat{z}\right| = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$h_v = \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right| = \left| u(\cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y}) - v\hat{z}\right| = \sqrt{u^2+v^2}$$

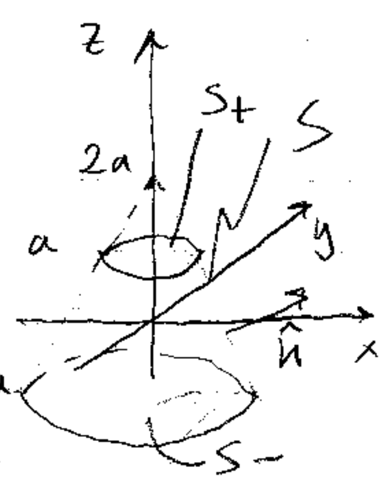
$$h_\alpha = \left|\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right| = \left| uv(-\sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y})\right| = uv$$

$$\nabla^2(uv) = \frac{1}{(u^2+v^2)uv}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(uv\frac{\partial}{\partial u}(uv)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(uv\frac{\partial}{\partial v}(uv)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(u^2+v^2)uv}(u^2+v^2) =$$

$$\underline{\underline{\nabla^2(uv) = \frac{1}{uv}}}$$

3.



$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_S + \mathbb{F}_R$$

$$\mathbb{F}_S = \frac{F_0 a}{\rho}\hat{\rho} \quad \text{linjekälla}$$

$$\int_S \mathbb{F}_S \cdot d\mathbb{S} = 2\pi \cdot 2a \cdot F_0 a = 4\pi F_0 a^2$$

③

$$\nabla \cdot \mathbb{F}_R = F_0\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{2\rho \sin^2\alpha}{a}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\rho}{a}\sin 2\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{a}\right)\right)$$

$$= F_0\left(\frac{4\sin^2\alpha}{a} + \frac{2\cos 2\alpha}{a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{3}{a}F_0$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbb{F}_R \, dV = \frac{3F_0}{a}\int_{-a}^{a} \pi (2a-z)^2 dz = 26\pi a^2 F_0$$

S_+ : $\rho < a$ och $z = a$, $\hat{n} = \hat{z}$

$$\int_{S_+} \mathbb{F}_R \cdot \hat{z}\, dS = F_0 \int_{S_+} dS = \pi a^2 F_0$$

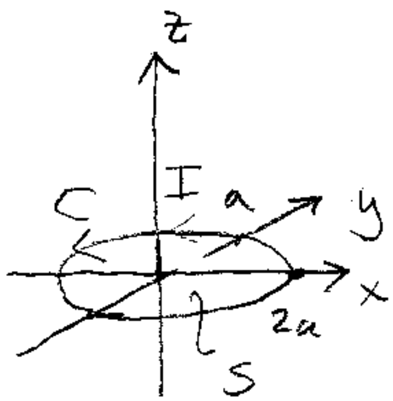
S_- : $\rho < 3a$ och $z = -a$, $\hat{n} = -\hat{z}$

$$\int_{S_-} \mathbb{F}_R \cdot (-\hat{z}) dS = F_0 \int_{S_-} dS = 9\pi a^2 F_0$$

$$\int_S \mathbb{F}_R \cdot d\mathbf{S} = 26\pi a^2 F_0 - \pi a^2 F_0 - 9\pi a^2 F_0 = 16\pi a^2 F_0$$

$$\int_S \mathbb{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi a^2 F_0 + 16\pi a^2 F_0 = \underline{\underline{20\pi a^2 F_0}}$$

4.



Stokes analog sats

$$\int_C I\,d\mathbf{r}\times\mathbb{B} = I\int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbb{B}$$

ytnormal $\hat{n} = \hat{z}$, $\hat{z}\times\nabla = \left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0\right)$

$$(\hat{z}\times\nabla)\times\mathbb{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ B_x & 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial B_x}{\partial x}\hat{z}$$

$$= 0 + \frac{2y}{a}B_0\hat{y} + \frac{B_0}{a}\hat{z}$$

$$I\int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbb{B} = I\left(\frac{2B_0}{a}\hat{y}\underbrace{\int y\,dS}_{=\,0 \text{ udda integrand}} + \frac{B_0\hat{z}}{a}\int dS\right)$$

$$= \frac{B_0 I}{a}\cdot\pi\cdot 2a\cdot a\,\hat{z} = \underline{\underline{2\pi B_0 I a\,\hat{z}}}$$

---

5. Poisson's ekvation: $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon$

ansats $\phi = f(r)\cos\theta$

⑤

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right) - 2f = \begin{cases} -\frac{3\mu_0}{\pi a^4 \epsilon_0} r^2 , & r < a \\ 0 , & r > a \end{cases}$$

$r > a$: homogen lösning: $Ar + Br^{-2}$
$f(r)$ begränsad $r \Rightarrow \infty \Rightarrow A = 0$
$f(r) = Br^{-2}$

$r < a$ homogen lösning: $Cr + Dr^{-2}$
$f(r)$ begränsad $r = 0 \Rightarrow D = 0$
partikulär lösning: Er^2
$\Rightarrow 4E = -3\mu_0 / (\pi a^4 \epsilon_0)$
$f(r) = Cr + Er^2$

f och $\frac{df}{dr}$ kontinuerliga vid $r = a$

$$\begin{cases} Ba^{-2} = Ca + Ea^2 \\ -2Ba^{-3} = C + 2Ea \end{cases} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} C = -\frac{4Ea}{3} = \frac{\mu_0}{\pi \epsilon_0 a^3} \\ B = -\frac{Ea^4}{3} = \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\mu_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} , & r > a \end{cases}$$

$\phi(r)$

Chalmers/Göteborgs Universitet
Institutionen för Tillämpad Fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Lördag 23 oktober 2004, kl. $8^{30} - 12^{30}$
Plats: V
Examinator: Mats Persson, tel. 031-772 3666 (arbete), 031-913237 (bostad), 0707-535666 (mobil)
Jourhavande: Mats Persson
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling i vektoranalys av Olle Brander och Standard Math Tables.

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 25 oktober. Resultaten anslås senast den 3 november. Tentamensgranskning den 3 november kl. 12-13 i rum 3035 på Soliden.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3: 20 poäng; betyg 4: 30 poäng; betyg 5: 40 poäng.
(FFM231): Betyg 3: 18 poäng; betyg 4: 26 poäng; betyg 5: 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Ett hastighetfält $\mathbf{v}$ i cylindriska koordinater $\rho\alpha z$ har formen

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{v_0}{a}(2\rho f(\alpha)\hat{\rho} + \rho\frac{df}{d\alpha}(\alpha)\hat{\alpha}) \ ,$$

där a är en konstant. Bestäm $f(\rho)$ så att detta fält beskriver en inkompressibel fluid ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), som strömmar rotationsfritt ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) med en normal hastighet $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$ på planen $\alpha = 0$ och $\alpha = \frac{\pi}{2}$ och $\mathbf{v}(a, \frac{\pi}{2}, z) = -v_0\hat{\rho}$.

VÄND !!

2. (a) Mellan två koncentriska cylindrar med radierna a och $2a$ finns ett material med värmeledningsförmågan λ. Bestäm temperaturfördelningen mellan cylindrarna då den innersta och yttersta cylindern håller temperaturen T_1 och T_2, respektive. (6p) (b) Bestäm dessutom totala värmeflödet från innercylindern till yttercylindern per längdenhet längs cylindrarna med hjälp av Fourier's lag. (2p)

3. Bestäm elektriska fältet från en laddningsfördelning svarande mot en väteatom. Rymdladdningen från elektronens rörelse runt protonen ges av,

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{e}{\pi a_0^3}\exp(-\frac{2r}{a_0}) \ ,$$

där r är avståndet från protonen, $-e$ är elektronens laddning, och a_0 är Bohr radien. Protonens laddningsfördelning kan betraktas som punktformig.

4. Beräkna normalytintegralen

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

där S är ytan

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2, \ z > 0$$

med en normal som pekar bort från origo. Fältet har formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0(\frac{r}{a})((\frac{a^3}{r^3} + \cos 2\theta)\hat{\mathbf{r}} - \sin 2\theta\hat{\theta} + \cos^2\theta\hat{\varphi})$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater och F_0 och a är konstanter.

5. (Endast för FFM232, 3p.) En ström I genomflyter en tunn ledare i formen av en cirkel med radien a. I ett yttre, konstant och homogent magnetfält $\mathbf{B}$ påverkas den strömförande ledaren av ett kraftmoment som ges av kurvintegralen,

$$\mathbf{M} = I\oint_C \mathbf{r}\times(d\mathbf{r}\times\mathbf{B})$$

Bestäm $\mathbf{M}$ som funktion av orienteringen av $\mathbf{B}$ och ytnormalen till den inneslutna cirkelskivan. För vilka orienteringar är kraftmomentet noll.

5. (Endast för FFM231, 4p.) Bestäm käll- och virvelfördelningen för fältet

$$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} F_0(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta)\hat{\mathbf{r}} \ , \theta < \frac{\pi}{2} \\ F_0(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r}\sin\theta)\hat{\mathbf{r}} \ , \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

där F_0 och a är konstanter.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen (FFM231) kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift: Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ tfymp/Homepage/Teaching/FFM232.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 2/11 till Mats Persson, rum 3035 i Soliden på vån. 3. Rapporten kan läggas i brevkorgen märkt *Mats Persson.* För mer information skicka e-mail till: tfymp@fy.chalmers.se.

Chalmers
Institutionen för Tillämpad Fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232

Tid: Torsdag 13 januari 2004, kl. $14^{00} - 18^{00}$
Plats: V
Examinator: Mats Persson
Jourhavande: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (kontor), 0733-261681 (mobil)
Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling i vektoranalys av Olle Brander och Standard Math Tables.

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 14 januari. Resultaten anslås senast den 1 Februari. Tentamensgranskning den 3 februari kl. 12-13 i rum 3035 på Soliden.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning. Maximal bonus från datoruppgifter är 5 poäng.
Betygsgränser: betyg 3: 20 poäng; betyg 4: 30 poäng; betyg 5: 40 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. Ett vektorfält $\mathbf{B}$ ges av vektorpotentialen $\mathbf{A}$ via sambandet $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Bestäm den fältlinje till $\mathbf{B}$ som går igenom punkten $a\hat{\mathbf{x}}$ om

$$\mathbf{A} = -\frac{A_0}{a^2}\rho^2\hat{\mathbf{z}}$$

i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$. A_0 och a är konstanter.

2. Ett kroklinjigt koordinatsystem $uv\alpha$ ges av

$$\mathbf{r} = uv(\cos\alpha\hat{\mathbf{x}} + \sin\alpha\hat{\mathbf{y}}) + \frac{(u^2 - v^2)}{2}\hat{\mathbf{z}}$$

där $0 \leq u, v < \infty$ och $0 \leq \alpha < 2\pi$. Bestäm skalfaktorerna och beräkna $\nabla^2(uv)$.

VÄND !!

3. Beräkna normalytintegralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

där ytan S är given i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$ av

$$\rho = 2a - z, \ -a < z < a, \ 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Ytnormalen pekar bort från origo. Fältet har formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0 \left((\frac{a}{\rho} + 2\frac{\rho \sin^2 \alpha}{a})\hat{\rho} + \frac{\rho}{a} \sin 2\alpha \hat{\alpha} + \frac{z}{a}\hat{\mathbf{z}} \right)$$

där F_0 och a är konstanter.

4. En elektrisk ledare som beskrivs av kurvan C: $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$ och $z = 0$ genomlöps moturs av en ström I. Beräkna kraften

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

med vilken magnetfältet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \left(-(\frac{x}{a})\hat{\mathbf{x}} + \left((\frac{y}{a})^2 + (\frac{z}{a}) \right) \hat{\mathbf{z}} \right)$$

påverkar ledaren. B_0 och a är konstanter.

5. En sfär med radien a innehåller en utbredd laddningsfördelning ρ_0 given i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$ av

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_0}{\pi a^4} \cos\theta$$

där μ_0 är en konstant. Bestäm den elektriska potentialen ϕ innanför och utanför sfären. (*Ledning:* ϕ och $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ är kontinuerliga igenom sfären och ϕ är begränsad i $r = 0$ och $r \to \infty$.)

Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Måndag 18 augusti 2003, kl $14^{15} - 18^{15}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)
Jourhavande: Ying Fu, tel. 031-772 5481, och Ulf Torkelsson
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 19 augusti. Resultaten anslås senast den 29 augusti. Tentamensgranskning den 29 augusti kl. 12-13 i O7108B.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Ett magnetfält $\mathbf{B}$ är strömfritt om strömmen $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$ är 0. Bestäm funktionen $h(x)$ så att magnetfältet

$$\mathbf{B} = \left(B_0 + A_0 \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) h(x), A_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) h(x), 0\right).$$

är strömfritt för $y > 0$. B_0, A_0 och L_y är konstanter.

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där S är ytan

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z > 0,$$

och fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(ax, ay, x^2 + y^2\right).$$

a och F_0 är konstanter.

3. I en en-dimensionell halvledare av längden L har man laddningsfördelningen

$$\rho = \rho_0 \sin \frac{\pi x}{L} \qquad -L \leq x \leq L,$$

där ρ_0 och L är konstanter. Beräkna potentialen $\Phi(x)$ i transistorn om randvillkoren är att $\Phi(-L) = \Phi(L) = 0$.

4. Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där kurvan C ges av skärningen mellan ytorna

$$r^2 \sin^2\theta \left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4a^2,$$

och

$$z = 0,$$

och fältet $\mathbf{F}$ av

$$\mathbf{F} = F_0\left[\left(\frac{a}{r} + \frac{r}{2a}\sin^2\theta \sin 2\varphi\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{a}{r}\cot\theta + \frac{r}{4a}\sin 2\theta \sin 2\varphi\right)\hat{\theta} - \frac{r}{a}\sin\theta \sin^2\varphi\hat{\varphi}\right].$$

F_0 och a är konstanter.

5. (Endast för FFM232, 3p.) Kosmologen Klas studerar ett expanderande universum. Expansionen, det vill säga hur avståndet mellan olika galaxer växer med tiden, beskrivs av en tidsberoende skalfaktor $R(t)$ så att bågelementet ges av

$$ds^2 = R(t)^2 \left[dx^2 + dy^2 + dz^2 \right].$$

Lägg märke till att koordinaterna x, y och z för de olika galaxerna inte förändras med tiden.

a. Härled en differentialekvation för hur partikeltätheten n varierar med tiden förutsatt att inga partiklar skapas eller förstörs (R är enhetslös).

b. Hur måste du modifiera differentialekvationen för att ta hänsyn till att partiklar kan skapas spontant med en hastighet q (q har enheten $\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$). Finn ett q sådant att n förblir konstant även om universum expanderar enligt

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3},$$

där t_0 är en konstant.

5. (Endast för FFM231, 4p.) Beräkna käll- och virvelfördelningen för fältet

$$\mathbf{F} = \begin{cases} F_0 \left[\left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a} \right) \hat{\rho} + \frac{a}{\rho} \hat{\varphi} \right] & z > 0 \\ F_0 \left[\left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a} \right) \hat{\rho} - \frac{a}{\rho} \hat{\varphi} \right] & z < 0 \end{cases}$$

där F_0 och a är konstanter.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift: Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 25/8 till Ulf Torkelsson, rum O7108B, Origohuset vån. 7. Rapporten kan läggas i brevkorgen märkt *Ulf Torkelsson.* För mer information skicka e-mail till: torkel@fy.chalmers.se.

Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Torsdag 16 januari 2003, kl $8^{45} - 12^{45}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. ~~031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)~~
Jourhavande assistent: Anders Hellman, tel. 031-772 3377
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 17 januari. Resultaten anslås senast den 31 januari. Tentamensgranskning den 31 januari kl. 12-13 i O7108B.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. En yta ges av ekvationen

$$x^2 + xy + z^2 = 5.$$

Bestäm ekvationen för tangentplanet till denna yta i punkten $(1,0,2)$, och bestäm avståndet från tangentplanet till punkten $(2,2,3)$

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

där S är ytan

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2, \quad z \geq 0$$

med uppåtriktad normal, och fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{F_0}{a^2}\left[\frac{a^4 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\hat{\rho} + \left(\frac{a^4 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + z^2\right)\hat{\mathbf{z}}\right].$$

F_0 och a är konstanter.

3. En planet med radien R uppvärms av att ett radioaktivt material sönderfaller och avger en effekt ρ_0 per volymsenhet. Genom sina kemiska egenskaper är förekommer det radioaktiva materialet bara för $r > R/2$. För ett medium med en värmekälla ρ gäller att $\nabla \cdot \mathbf{J} = \rho$, där värmeströmmen $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$ (Fouriers lag). Beräkna temperaturfördelningen i planetens inre om värmeledningsförmågan i ytlagret är λ och i planetens inre 3λ samt att vi kan sätta temperaturen vid planetens yta till 0 K.
Ledning: T och $\partial_r T$ är kontinuerliga vid $r = R/2$.

4. En partikel rör sig längs en bana som i cylindriska koordinater ges av

$$\begin{cases} \rho &= a \\ z &= a\varphi \end{cases}$$

där $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ och a är en konstant. Partikeln påverkas av en kraft som ges av rotationen av vektorpotentialen

$$\mathbf{A} = F_0\left(z, 0, a \ln\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}\right).$$

Beräkna det arbete som kraften utför på partikeln.

5. (Endast för FFM232, 3p.) Fåraherden Klas har studerat hur hans får rör sig över ängen. Han finner att det är två faktorer som bestämmer hur fåren rör sig över ängen. Dels vill fåren inte trängas för mycket, så det uppstår en ström av får bort från de områden där fårtätheten n är störst. Denna ström kan skrivas som $-\lambda_1 \nabla n$. Å andra sidan så dras fåren till de delar av ängen där grästätheten g är störst och denna ström kan skrivas som $\lambda_2 \nabla g$. Vi antar att λ_1 och λ_2 är konstanter.

a. Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur fårens fördelning över ängen varierar med tiden.

b. På morgonen tar Klas sina får till en cirkulär äng med radien R, och grästätheten

$$g(\rho) = g_0 \frac{R^2}{R^2 + \rho^2},$$

där g_0 är en konstant och $0 \leq \rho \leq R$. När fåren har fått vandra omkring en stund, så inställer sig en stationär fördelning (dvs den beror inte längre på tiden). Beräkna denna fördelning. Använd randvillkoret att fårtätheten vid ytterranden skall vara 0.

5. (Endast för FFM231, 4p.) Bestäm källfördelningen för ett fält $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$, där Φ ges av

$$\Phi(r, \varphi, z) = \begin{cases} \Phi_0 \left[\ln \frac{r \sin\theta}{a} + \frac{r}{a}\cos\theta \sin\varphi\right] & \theta < \frac{\pi}{2} \\ \Phi_0 \left[\ln \frac{r \sin\theta}{a} - \frac{r}{a}\cos\theta \sin\varphi\right] & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Φ_0 och a är konstanter.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift: Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 27/1 till Ulf Torkelsson, rum O7108B, Origohuset vån. 7. Rapporten kan läggas i brevkorgen märkt *Ulf Torkelsson.* För mer information skicka e-mail till: torkel@fy.chalmers.se.

Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Måndag 19 augusti 2002, kl $14^{15} - 18^{15}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)
Jourhavande assistent: Tomas Nord, tel. 031-772 3156
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 20 augusti. Resultaten anslås senast den 30 augusti. Tentamensgranskning den 30 augusti kl. 12-13 i F4110.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Ett magnetfält $\mathbf{B}$ ges av

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a}(y, x),$$

där B_0 och a är konstanter. Bestäm ekvationen för den fältlinje som går genom $(a, 0)$.

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där S är ytan $\rho = a$ och $-2a \leq z \leq 2a$ med en utåtriktad normal, och

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\left(\frac{a^2 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\rho \cos^2 \varphi}{a} \right) \hat{\rho} - \frac{\rho \sin \varphi \cos \varphi}{a} \hat{\varphi} + \frac{a^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \right],$$

där F_0 och a är konstanter.

3. En koaxialkabel består av en central cylindrisk ledare med radien R som omges av en annan ledare i form av ett tunt cylindriskt skal med radien $1,5R$ (mellan de båda ledarna, och utanpå den yttre ledaren finns isolermaterial). Genom den inre ledaren går en elektrisk ström I_0, och en lika stor ström går tillbaka genom den yttre ledaren. Beräkna magnetfältet kring kabeln. *Ledning:* Man kan anta att magnetfältlinjerna är koncentriska cirklar kring kabelns axel.

4. Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där C är skärningen mellan ytorna

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36a^2$$

och

$$z = \frac{2}{3}a$$

genomlöpt i positiv riktning. Fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a^2} \left(-zy, zx, x^2 + y^2 \right)$$

där F_0 och a är konstanter.

5. (Endast för FFM232, 3p) Kärnfysikern Klas skall konstruera en kärnreaktor. I reaktorn frigörs energi genom att neutroner klyver urankärnorna i reaktorns bränsle. Klas behöver därför beräkna neutrontätheten n i reaktorn. Han vet att neutronerna transporteras genom reaktorn genom diffusion, det vill säga flödet av neutroner $\mathbf{J} = -k\nabla n$, där k är en konstant diffusionskoefficient. När en neutron klyver en atomkärna, så bildas det flera nya neutroner, och kärnklyvningen kan därför betraktas som en källa för neutroner. För enkelhets skull antar Klas att bränslet är jämt fördelat i reaktorn, och att mängden kärnklyvningar per tids- och volymsenhet, och därmed mängden nybildade neutroner, är proportionell mot den lokala neutrontätheten med en proportionalitetskoefficient A.
a). Ställ upp en differentialekvation som beskriver neutrontätheten som funktion av tid och position.
b) Beräkna neutrontätheten i reaktorn då jämvikt har ställt in sig, det vill säga när neutrontätheten inte beror på tiden. Antag att reaktorn är en-dimensionell och har längden L och att neutrontätheten är 0 vid reaktorns väggar. Neutrontäthetens största värde är n_0 och den kan inte vara negativ någonstans. Hur måst e A, k och L vara relaterade till varandra för att det skall finnas en lösning för n.

5. (Endast för FFM 231, 4p). Bestäm käll- och virvelfördelningen för fältet

$$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} F_0\left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathbf{r}} & \theta < \frac{\pi}{2} \\ F_0\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathbf{r}} & \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

där F_0 och a är konstanter.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift 3. Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 26/8 till mig, Ulf Torkelsson, rum F2134, Forskarhuset vån. 2. För mer information kontakta mig via e-mail: torkel@fy.chalmers.se.

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK FFM 232/231

Måndag 19 augusti 2002

---

1) fältlinje: $\dfrac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \dfrac{B_0}{a}(y, x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \dfrac{B_0}{a} y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{B_0}{a} x \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} y\,dy = \int_0^x x\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y(0)}^{y(x)} = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^x$$

$$y^2 = y(0)^2 - x^2$$

fältlinje genom $(a, 0)$:

$$a^2 + y(0)^2 = 0 \Rightarrow y(0)^2 = -a^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y^2 = x^2 - a^2}}$$

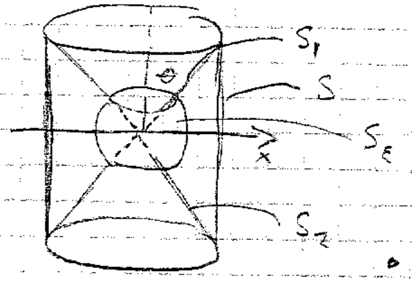
---

2) Dela upp $\mathbf{F}$ i $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ där:

$$\mathbf{F}_1 = F_0\left\{\frac{a^2\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} + \frac{a^2 z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}\right\} = F_0 a^2 \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_0\left\{\frac{\rho\cos^2\varphi}{a}\hat{\rho} - \frac{\rho\sin\varphi\cos\varphi}{a}\hat{\varphi}\right\} = \frac{F_0}{a} x\hat{x}$$

$\underline{I_1}$: $I_1 = \int_S \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{S}$, Gauss sats ger:



$$I_1 + \int_{S_1}\mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2}\mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} - \int_{S_\varepsilon}\mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}_1\,dV$$

↳ normalen i $\hat{r}$-riktn.

- S_1- och S_2 bidragen är noll eftersom normalen är vinkelrät mot $\hat{r}$.
- $\displaystyle\int_{S_\varepsilon}\mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{S} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\theta^{\pi-\theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, F_0 a^2 \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta$

$$= 2\pi F_0 a^2 (\cos\theta - \cos(\pi - \theta))$$

$$= \left\{\cos\theta = 2/\sqrt{5},\ \cos(\pi-\theta) = -2/\sqrt{5}\right\}$$

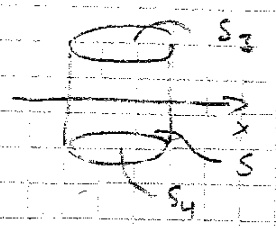
$$= \frac{8}{\sqrt{5}}\pi F_0 a^2$$

(2 forts.)

$$\nabla \cdot \mathbb{F}_1 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 F_0 a^2 \frac{1}{r^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad I_1 = I_e = \underline{\underline{\frac{8}{\sqrt{5}}\pi F_0 a^2}}$$

$\underline{I_2}$: $\quad I_2 = \int_S \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{S}$, Gauss sats ger:



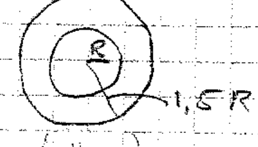
$$I_2 + \underbrace{\int_{S_3} \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{S} + \int_{S_4} \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{S}}_{=0 \text{ ty } \hat{z} \perp \hat{x}} = \int_V \nabla \cdot \mathbb{F}_2 \, dV$$

$$\Longrightarrow \quad I_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbb{F}_2 \, dV = \int_V \frac{F_0}{a} \, dV = \underline{\underline{4\pi F_0 a^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad I = I_1 + I_2 = \underline{\underline{4\pi F_0 a^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)}}$$

---

3) $\quad H = H(r)$



$$\oint_C \mathbb{H} \cdot d\mathbb{r} = \{ d\mathbb{r} = r\hat{\theta}\, d\theta \}$$

$$= 2\pi r H(r) = I \quad \text{(innesluten ström)}$$

$$\Longrightarrow \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

- $r < R$, $\quad I = I_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_0 \frac{r^2}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r^2}{R^2} I_0$
- $R < r < 1{,}5R$, $I = I_0 \quad \Longrightarrow \quad B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_0$
- $r > 1{,}5R$, $\quad I = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_3 = 0$

---

4) C ges av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 32a^2$ som har halvaxlarna $\sqrt{32}\,a$ samt $\sqrt{8}\,a$.

$$\mathbb{F} = \frac{F_0}{a^2} z\left(-y\hat{x} + x\hat{y}\right) + \frac{F_0}{a^2}\rho^2\hat{z} = \underbrace{\frac{F_0}{a^2} z\rho\hat{\varphi}}_{\equiv \mathbb{F}_1} + \underbrace{\frac{F_0}{a^2}\rho\hat{z}}_{\mathbb{F}_2}$$

$\hat{z} \perp d\mathbb{r} \Longrightarrow$ endast $\mathbb{F}_1$ bidrar

$$\Longrightarrow \quad I = \oint_C \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbb{r} = \{ \text{Stokes sats} \}$$

(4 forts)

$$= \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \left\{ \nabla \times \mathbf{F} = \frac{2F_0}{a^2} z \hat{z} - \frac{F_0}{a^2} s \hat{s} \right\}$$

$$= \int_S \left(\frac{2F_0}{a^2} z \hat{z} - \cancel{\frac{F_0}{a^2} s \hat{s}} \right) \cdot d\mathbf{S} = \frac{4F_0}{3a} \int_S dS$$

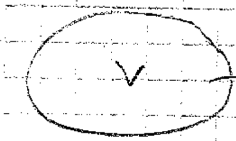
$$= \frac{4F_0}{3a} \pi \sqrt{32}\, a \sqrt{8}\, a = \underline{\underline{\frac{64}{3} \pi F_0 a}}$$

5/ (FFM 232, 3p)

a/ n – neutroner / volym

$$\mathbf{J} = -k \nabla n$$

$A \cdot n$ – nya neutroner per volym och tidsenhet



$$\int_V n(t)\, dV \leftarrow \text{Antal neutroner i en volym } V \text{ vid tiden } t.$$

$$\int_V n(t+\Delta t)\, dt \leftarrow \text{Antal neutroner vid } t+\Delta t.$$

$$= \underbrace{\int_V n(t)\, dV}_{\text{från förut}} - \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{neutronström}} + \underbrace{\int A \cdot n \,\Delta t\, dV}_{\text{nybildade}}$$

$$= \Delta t \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dV$$

$$\Rightarrow \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = A \cdot n - \nabla \cdot \mathbf{J} = An + k \nabla^2 n$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{dn(t)}{dt} = An + k \nabla^2 n}}$$

b/ jämvikt $\Rightarrow An + k \partial_x^2 n = 0$

$$\Rightarrow n(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right)$$

$n(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = 0}}$

$$\Rightarrow n(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right)$$

$n(L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\tfrac{A}{k}}\, L = \pi$

maxvärde $n_0 \Rightarrow C_1 = n_0$

$$\Rightarrow n(x) = n_0 \sin\left(\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, x\right)$$

och $\underline{\sqrt{\tfrac{A}{k}}\, L = \pi}$

5) (FFM 231, 4p)

<u>Rymdkälla:</u>

$\theta < \frac{\pi}{2}$: $\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 F_0 \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta \right)\right) = \underline{\underline{\frac{F_0}{r^2} a \sin\theta}}$

$\theta > \frac{\pi}{2}$: $\nabla \cdot \mathbb{F} = \underline{\underline{-\frac{F_0}{r^2} a \sin\theta}}$

<u>Rymdvirvel:</u>

$\theta < \frac{\pi}{2}$: $\nabla \times \mathbb{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi F_r \hat{\theta} - \frac{1}{r}\partial_\theta F_r \hat{\varphi} = \underline{\underline{-\frac{F_0 a}{r^2}\cos\theta}}$

$\theta > \frac{\pi}{2}$: $\nabla \times \mathbb{F} = \underline{\underline{\frac{F_0 a}{r^2}\cos\theta}}$

<u>Diskontinuitet för $\theta = \pi/2$:</u>

<u>ytkälla:</u>

$\sigma = (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-)\cdot\hat{\nu} = \hat{z}\cdot(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = 0$ ty $\hat{z}\cdot\hat{r} = 0$

<u>ytvirvel:</u>

$\mathbb{K} = \hat{\nu} \times (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = \hat{z} \times \hat{r}\cdot\frac{2aF_0}{r} = \underline{\underline{\frac{2aF_0}{r}\hat{\varphi}}}$

<u>Singularitet i origo:</u>

1) <u>övre halvplanet:</u>

$$q_1 = \lim_{\Delta V \to 0} \int_{\Delta S} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$$

$$= \lim_{\Delta V \to 0} \iint F_0 \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r}\sin\theta \right)\hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

$$= \lim_{r \to 0} F_0 \iint (a^2 \sin\theta + a r \sin^2\theta) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \dots = \lim_{r\to 0} 2\pi F_0 \left(a^2 + \frac{a r \pi}{4} \right)$$

$$\longrightarrow 2\pi F_0 a^2 \quad \text{då} \quad r \to 0$$

2) <u>undre halvplanet:</u>

$$q_2 = \lim_{r \to 0} F_0 \iint (a^2 \sin\theta - a r \sin^2\theta) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \dots = 2\pi F_0 a^2$$

$$\Longrightarrow \quad q = q_1 + q_2 = \underline{4\pi F_0 a^2}$$

Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Torsdag 17 januari 2002, kl $8^{45} - 12^{45}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)
Jourhavande assistent: Tomas Nord, tel. 031-772 3156
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 18 januari. Resultaten anslås senast den 1 februari. Tentamensgranskning den 1 februari kl. 12-13 i F4110.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Ett vektorfält $\mathbf{B}$ ges av vektorpotentialen $\mathbf{A}$ genom sambandet $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Finn fältlinjerna till $\mathbf{B}$ om

$$\mathbf{A} = A_0 \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{z}},$$

där A_0 och r_0 är konstanter.

2. En planet är uppbyggt av ett material med värmeledningsförmågan λ. Genom att materialet är lätt radioaktivt alstras det värme i materialet. Den avgivna effekten per volymsenhet är ρ. För ett medium med en värmekälla gäller att $\nabla \cdot \mathbf{J} = \rho$, där värmeströmmen $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$ (Fouriers lag).
a. Beräkna temperaturprofilen $T(r)$ i en sfärisk planet med radien R. Planetens yttemperatur kan antas vara 0 K.
b. Hur beror temperaturen i planetens centrum på dess radie R?

3. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där $\mathbf{F}$ i cylindriska koordinater ges av

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\rho \hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\right),$$

och ytan S ges av

$$(z - 2a)^2 = x^2 + y^2,$$

där $-2a \leq z \leq 2a$ och normalvektorn pekar bort från z-axeln. a och F_0 är konstanter.

4. En partikel rör sig längs den slutna banan

$$C: \quad \frac{1}{4}(x-a)^2 + 9y^2 = a^2$$

i moturs riktning under inverkan av en kraft

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\frac{ax}{x^2 + y^2}, \frac{x}{a} + \frac{ay}{x^2 + y^2}, 0\right).$$

a och F_0 är konstanter. Beräkna det arbete som kraften utför på partikeln

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

5. (Endast för FFM232, 3p) Fiskaren Klas är bekymrad för torskbeståndet i Nordsjön. Hans studier visar att torskbeståndet i en punkt tillväxer proportionellt mot den lokala torsktätheten n (mätt i torskar m^{-2}) med en proportionalitetskonstant γ, men det försvinner också torskar på grund av fisket, vilket han beskriver med en utfiskningsfunktion g med enhet torskar $\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$. Dessutom flyttar torskarna bort från områden som fiskas intensivt, och torskströmmen kan skrivas som $-D\nabla g$.
a. Sätt upp en differentialekvation för torskbeståndet.
b. Om vi antar att Nordsjön kan beskrivas som en cirkelskiva med radien R med kusterna längs skivans rand beräkna den stationära (tidsoberoende) torsktätheten om vi kan skriva utfiskningsfunktionen som

$$g = g_0 \frac{R^2 - \rho^2}{R^2}.$$

Antag att γ och D är konstanter.

5. (Endast för FFM 231, 4p). Bestäm källfördelningen för det fält som har potentialen

$$\Phi\left(r,\theta,\varphi\right) = \begin{cases} \Phi_0\left(\frac{a}{r} + 2\frac{r}{a}\cos\theta\right) & r < a \\ \Phi_0\left(1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos\theta\right) & r > a \end{cases}$$

i sfäriska koordinater. a är en konstant.

Information om datoruppgifter för FFM231

Studenter som läser den gamla kursen kan erhålla upp till fyra bonuspoäng genom att göra och skriftligt redovisa *Datoruppgift 3. Lösning av Poissons ekvation.* Laborationshandledningen finns tillgänglig på kursens hemsida

http://fy.chalmers.se/ torkel/Teaching/Vektor/2000.html.

Den skriftliga rapporten inlämnas senast 25/1 till mig, Ulf Torkelsson, rum O7108B, Origohuset vån. 7. Rapporten kan läggas i min vanliga brevkorg märkt *Ulf Torkelsson.* För mer information kontakta mig via e-mail: torkel@fy.chalmers.se.

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK FFM232/231

Torsdag 17 januari 2002, $8^{45} - 12^{45}$

1) Fältlinjerna ges av $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = C\,\mathbf{B} = C\,\nabla \times \mathbf{A}$

$$= C A_0 r_0^2\, \nabla \times \left(\frac{1}{\rho^2}\hat{z}\right)$$

$$= C \cdot 2 A_0 r_0^2 \frac{1}{\rho^3}\hat{\varphi}$$

$\Rightarrow$ $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ har inget $\hat{z}$- eller φ-beroende

$\Rightarrow$ Fältlinjerna är cirklar runt z-axeln

Vidare är $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}\hat{\rho} + \rho\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau}\hat{z} = \frac{2CA_0 r_0^2}{\rho^3}\hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{2CA_0 r_0^2}{\rho^3} \Rightarrow \rho^4 = 2CA_0 r_0^2$$

vilket ger radien på cirklarna för olika konstanter C.

2) a) $\nabla \cdot \mathbf{J} = \rho$, $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$ $\Big\}$ $\nabla^2 T = -\frac{\rho}{\lambda}$

$T(R) = 0$

Sfäriska koordinater: $\nabla^2 T = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\lambda} r^2$

$$\Rightarrow r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\rho}{3\lambda} r^3 + c_1$$

$$\Rightarrow T = -\frac{\rho}{6\lambda} r^2 - \frac{c_1}{r} + c_2$$

Ändlig temp. vid $r=0$ $\Rightarrow$ $c_1 = 0$

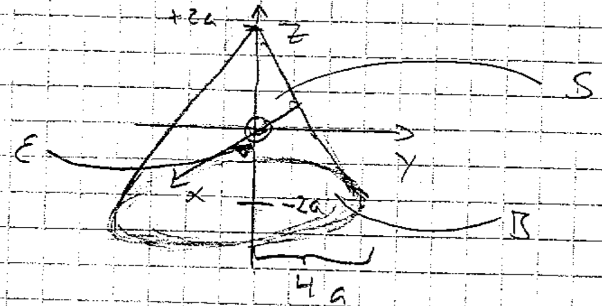
$T(R) = 0$ $\Rightarrow$ $c_2 = \frac{\rho}{6\lambda} R^2$

$$\Rightarrow T(r) = \frac{\rho}{6\lambda}\left(R^2 - r^2\right)$$

b) $T(0) = \frac{\rho}{6\lambda} R^2$

3/ $\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$ $\qquad \mathbb{F} = F_0(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)$

$$= F_0 r\hat{r}\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{r^3}\right)$$



Singularitet i origo:

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\, dV}_{I_V} = \underbrace{\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}}_{I} + \underbrace{\int_{\varepsilon,\text{ normal inutåt}} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{B,\text{ normal nedåt}} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}}_{I_B}$$

$$\Longrightarrow \quad I = I_V - I_\varepsilon - I_B$$

$\underline{\underline{I_V}}$: $\quad \nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) = \frac{3F_0}{a}$

$$\Longrightarrow I = \int_V \frac{3F_0}{a}\, dV = \frac{3F_0}{a}\cdot\frac{\pi(4a)^2\cdot 4a}{3}$$

$$= \underline{\underline{64\pi F_0 a^2}}$$

$\underline{\underline{I_\varepsilon}}$: $\quad \int_\varepsilon F_0 r\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{r^3}\right)\hat{r}\cdot(-\hat{r})\, dS$

$$= -F_0 r\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{r^3}\right)\int_\varepsilon dS\,\Big|_{r=\varepsilon}$$

$$= -4F_0\pi\left(\frac{\varepsilon^3}{a} + a^2\right)$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{-4\pi F_0 a^2}} \quad \text{då} \quad \varepsilon\to 0$$

$\underline{\underline{I_B}}$: $\quad -F_0\int_B \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{(\rho+z^2)^{3/2}}\right)\left(\rho\hat{\rho} + z\hat{z}\right)\cdot\hat{z}\, dS$

$$= -2\pi F_0 z\int_0^{4a}\left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)\rho\, d\rho\,\Big|_{z=-2a}$$

$$= -2\pi F_0 z\left\{\left[\frac{\rho^2}{2a}\right]_0^{4a} - a^2\left[\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^{4a}\right\}$$

(3 forts)

$$= 4\pi F_0 a^2 \left(8,5 - \frac{1}{\sqrt{20}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I} = \left(64 + 4 - 34 + \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \pi F_0 a^2$$

$$= \pi F_0 a^2 \left(34 + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= \underline{\underline{2\pi F_0 a^2 \left(17 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)}}$$

---

4)

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_C (\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2) \cdot d\mathbb{r}$$

där
$$\begin{cases} \mathbb{F}_1 = F_0 \dfrac{x}{a} \hat{y} & \nabla \times \mathbb{F}_1 = \dfrac{F_0}{a} \hat{z} \\ \mathbb{F}_2 = a F_0 \left(\dfrac{x \hat{x}}{s^2} + \dfrac{y \hat{y}}{s^2} \right) = a F_0 \dfrac{\hat{s}}{s} \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbb{F}_2 = \frac{\partial F_s}{\partial z} \hat{\varphi} - \frac{\partial F_s}{\partial \varphi} \hat{z}$$

$$= 0$$

$$\int_C \mathbb{F}_1 \cdot d\mathbb{r} = \int_S \nabla \times \mathbb{F}_1 \, d\mathbb{S} = \frac{F_0}{a} \int dS = \underline{\underline{\frac{F_0}{a} A}}$$

$\underline{A:}$ $\quad C: \quad \dfrac{(x-a)^2}{(2a)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} = 1$

$\Rightarrow$ ellips med halvaxlar $\quad a' = 2a$ och $b' = \frac{a}{3}$

$$\Rightarrow \quad A = \pi a' b' = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3} a^2}}$$

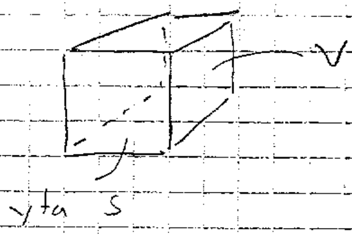
$$\int_C \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{r} = \{ \text{sing. i origo, lägg till } \varepsilon\text{-cirkel} \}$$

$$= \int_S \nabla \times \mathbb{F}_2 \, d\mathbb{S} - \int_\varepsilon \mathbb{F}_2 \cdot d\mathbb{r}$$

$$= 0 - a F_0 \int_\varepsilon \frac{\hat{s}}{s} (-\hat{\varphi}) dr = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \frac{F_0}{a} \cdot \frac{2\pi}{3} a^2 = \underline{\underline{\frac{2\pi F_0 a}{3}}}$$

5) a)



$$\begin{cases} \text{densitet: } n(r,t) \\ \text{tillväxt: } \gamma n(r,t) \\ \text{utfiskning: } g(r,t) \\ \text{ström: } -a\nabla g \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_V n(r,t+\Delta t)\,dV = \int_V n(r,t)\,dV + \int_V \gamma n(r,t)\,dV \cdot \Delta t - \int_V g(r,t)\,dV \cdot \Delta t + \int_S (-a\nabla g)\,dS \cdot \Delta t \quad *$$

$$* = \int_V a\nabla^2 g\,dV$$

$$\Longrightarrow \int_V \frac{dn}{dt}\,dV = \int_V \left(\gamma n - g + a\nabla^2 g\right) dV$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\frac{dn}{dt} = \gamma n - g + a\nabla^2 g}}$$

b) $\begin{cases} \text{stationärt} \Rightarrow \dfrac{dn}{dt} = 0 \\ g = g_0 \dfrac{R^2 - r^2}{R^2} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \gamma n(r) = g_0 \frac{R^2 - r^2}{R^2} - a\nabla^2 g_0 \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$

$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a\nabla^2 g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a g_0\left(-\frac{4}{R^2}\right)$$

$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{n(r) = \frac{g_0}{\gamma}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)}}$$

5/ $\underline{\underline{r<a}}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \ldots = \frac{\Phi_0 a}{r^2}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$\underline{\underline{r>a}}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \ldots = \frac{6\Phi_0 a^3}{r^4}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0 a^3}{r^4}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

- Ytkälla vid $r=a$?

$$\begin{cases} \mathbb{F}_- = \frac{\Phi_0}{a}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta} \\ \mathbb{F}_+ = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta} \end{cases}$$

$$\sigma = (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-)\cdot\hat{n} = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta - \frac{\Phi_0}{a} + \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta$$

$$= \underline{\underline{\frac{\Phi_0}{a}\left(8\cos\theta - 1\right)}}$$

- Rymdkällor ?

$\underline{\underline{r<a}}$:

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left[\frac{\Phi_0 a}{r^2} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\right]\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\left[\frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\right]\right)$$

$$= -\frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta + \frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta = \underline{\underline{0}}$$

$\underline{\underline{r>a}}$:

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \ldots = \underline{\underline{-\frac{8\Phi_0 a^3\cos\theta}{r^5}}}$$

- Punktkällor ?

$\underline{\underline{r>a}}$: inga singulariteter

$\underline{\underline{r<a}}$: punktkälla i origo $\underline{\underline{q = 4\pi\Phi_0 a}}$

Chalmers &Göteborgs Universitet
Institutionen för Fysik och teknisk fysik

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK, FFM232/231

Tid: Måndag 20 augusti 2001, kl $14^{15} - 18^{15}$
Plats: V
Examinator: Ulf Torkelsson, tel. 031-772 3136 (arbete), 031-451404 (bostad)
Jourhavande assistent: Tomas Nord, tel. 031-772 3156
Hjälpmedel: Standard Math Tables, Beta, Physics Handbook, kursens formelsamling

Lösningarna anslås i trapphuset fysik den 21 augusti. Resultaten anslås senast den 31 augusti. Tentamensgranskning den 31 augusti kl. 13-14 i F4110.

Varje uppgift ger maximalt 8 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade i svårighetsordning.
Betygsgränser (FFM232): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 27 poäng; betyg 5 36 poäng.
(FFM231): Betyg 3 18 poäng; betyg 4 26 poäng; betyg 5 35 poäng.

UPPSTÄLLDA SAMBAND SKALL MOTIVERAS (gärna med en enkel skiss). Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Ange om du tenterar den nya kursen FFM232 3 poäng eller den gamla kursen FFM231 4 poäng. Den sista uppgiften skiljer sig mellan de båda kurserna. Lös endast den uppgift som gäller för din kurs.

---

1. Bestäm nivåytorna till funktionen

$$\Phi = \Phi_0 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad a > 0, \quad \Phi_0 > 0.$$

2. En elektrisk ledare formad som en ring med radien R genomlöps av en ström I. Ledaren ligger i xy-planet med centrum i punkten $(x_0, y_0, 0)$. Beräkna kraften

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

med vilken magnetfältet

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{x}{a} \hat{z} \tag{1}$$

påverkar ledaren. Beräkna också det magnetiska flödet genom ringen.

VÅND!

3. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ har potentialen

$$\phi = 3\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

dvs $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt? Beräkna det maximala flödet.

4. I en serie böcker beskrev den amerikanske författaren Edgar Rice Burroughs ett folk som levde på insidan av en ihålig jord. Beräkna tyngdaccelerationen överallt i en sådan jord om vi antar att den består av ett skal med en innerradie som är $2R/3$ och med en ytterradie som sammanfaller med jordradien R. Inuti skalet antar vi att det finns ett mindre klot med radien $R/3$ vars centrum sammanfaller med skalets centrum. Antag att densiteten i skalet och det inre klotet är konstant ρ, och uttryck ρ i termer av den kända tyngdaccelerationen g vid jordytan.

Ledning: Gauss lag för ett gravitationsfält

$$\oint_S \mathbf{g}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi GM.$$

5. (Endast för FFM232, 3p.) Klas har bestämt sig för att studera chalmeristernas dryckesvanor. Han har därför kommit överens med ledningen för Pripps att han skall få tillsätta en mindre mängd radioaktivt etanol (etanol som innehåller en kol-11 atom) till det öl som via en pipeline transporteras till Chalmers.

a. Härled en differentialekvation som beskriver hur densiteten c av radioaktivt etanol varierar som funktion av tiden och läget x i pipelinen. Antag att ölet strömmar med en konstant hastighet u_0 och att kol-11 sönderfaller med sönderfallstiden τ, det vill säga att under tiden dt minskar antalet kolatomer, N, med

$$dN = N\frac{dt}{\tau}.$$

b. Efter en viss tid inträder ett stationärt tillstånd i pipelinen, det vill säga densiteten av radioaktivt kol-11 beror inte längre på tiden. Om pipelinen har en längd L, vad blir då densiteten vid Chalmers uttryckt i densiteten ρ_0 vid Pripps?

5. (Endast för FFM231, 4p). Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$,

$$F(r,\theta,\phi) = F_0\left(\frac{a}{r}+\frac{r}{a}\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{r}} + F_0\left(\frac{a}{r}\cot\theta+\frac{r}{2a}\sin 2\theta\cos^2\varphi\right)\hat{\theta} - F_0\frac{r}{2a}\sin\theta\sin 2\varphi\hat{\varphi},$$

där F_0 och a är konstanter. Visa att fältet är virvelfritt och bestäm den potential Φ som är 0 i punkten $r=a$, $\theta=\pi/6$, $\varphi=\pi/2$.

TENTAMEN I VEKTORFÄLT OCH KLASSISK FYSIK,

FFM 232 / 231 2001-08-20

1. Sätt $\Phi = c\,\Phi_0$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+a^2} = c \quad , \quad c \geq 0$$

$\Rightarrow$ Tre fall:

$\underline{0 \leq c < 1:}$ $(1-c)x^2 + (1-c)y^2 + z^2 = ca^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{ca^2}{1-c}} + \frac{y^2}{\frac{ca^2}{1-c}} + \frac{z^2}{ca^2} = 1$$

$\Rightarrow$ Ellipsoid med halvaxlarna:

$$\sqrt{\frac{c}{1-c}}\,a, \sqrt{\frac{c}{1-c}}\,a, \sqrt{c}\,a$$

$\underline{c = 1:}$ $\Rightarrow$ $z^2 = ca^2$

$\Rightarrow$ planen $z = \pm\sqrt{c}\,a$

$\underline{\underline{c > 1}}:$ $\Rightarrow$ $$\frac{x^2}{\frac{ca^2}{c-1}} + \frac{y^2}{\frac{ca^2}{c-1}} - \frac{z^2}{ca^2} = -1$$

$\Rightarrow$ Tvåmantlad hyperboloid längs z-axeln med halvaxlar:

$$\sqrt{\frac{c}{c-1}}\,a, \sqrt{\frac{c}{c-1}}\,a, \sqrt{c}\,a$$

---

2. Kraften: $\mathbb{F} = \int_C I\, d\mathbb{r} \times \mathbb{B} = \{\text{Stokesanalog sats}\}$

$$= I\int_S (d\mathbb{S}\times\nabla)\times\mathbb{B} = I\int_S (\hat{z}\times\nabla)\times\mathbb{B}\, dS$$

$$= I\int_S (-\partial_y, \partial_x, 0)\times\mathbb{B}\, dS$$

$$= I\int_S \left[\partial_x\left(\frac{B_0 x}{a}\right)\hat{x} - \partial_y\left(\frac{B_0 x}{a}\right)\right] dS = \frac{IB_0}{a}\hat{x}\int_S dS$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi R^2 I B_0}{a}\hat{x}}}$$

Flödet: $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{B_0 x}{a} \, dS$

$= \{$ Byt variabler till $x' = x - x_0,\ y' = y - y_0,\ z' = z$ så att cirkeln hamnar centrerat $\}$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \frac{B_0}{a} \int_{S'} x' \, dS' + \frac{B_0}{a} \int_{S'} x_0 \, dS'$$

$= \{$ 1:a integralen ger 0 ty x' är udda $\}$

$$= \frac{B_0 x_0}{a} \int_{S'} dS' = \underline{\underline{\frac{\pi R^2 B_0 x_0}{a}}}$$

---

3. Flödet $\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \{$ Gauss Sats $\}$

$$= \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_V \Delta \phi \, dV$$

$$\phi = 3r^2 - r^4$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \phi \right) = \frac{1}{r^2} \partial_r \left(6r^3 - 4r^5 \right)$$

$$= 18 - 20r^2$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \int_V (18 - 20r^2) \, dV$$

Integranden är större än noll endast då $18 - 20r^2 > 0$ dvs $r < \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow$ Maximalt flöde fås om man integrerar ut till $r = 3/\sqrt{10}$.

$\Rightarrow$ Den sökta ytan S är $\underline{\underline{\text{skalet } r = \frac{3}{\sqrt{10}}}}$.

$\underline{\text{Flödet}}$ $\Phi = \int_V (18 - 20r^2) \, dV = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{10}}} (18 - 20r^2) r^2 dr \int d\Omega$

$$= 4\pi \left[6r^3 - 4r^5 \right]_0^{3/\sqrt{10}} = 4\pi \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^3 \left(6 - \frac{4 \cdot 9}{100} \right)$$

$$= \underline{\underline{4\pi \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^3 \frac{564}{100}}}$$

4. Analogi med elektriskt fält:

$$4\pi\varepsilon_0 \int_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = 4\pi Q \qquad Q \text{ är innesluten laddning}$$

$$\frac{1}{G}\int_S \bar{g} \cdot d\bar{S} = 4\pi M \qquad M \text{ är innesluten massa}$$

där tyngdaccelerationen är storleken på g i $-\hat{r}$-riktningen. $\Rightarrow \quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G M(r)$

Uttryck ρ som funktion $g_0 = g(R)$:

$$\Rightarrow \quad 4\pi R^2 g(R) = 4\pi G\left[4\pi\int_0^{R/3} \rho\, r'^2 dr' + 4\pi\int_{\frac{2R}{3}}^{R} \rho\, r'^2 dr'\right]$$

$$\Rightarrow \quad g_0 = \frac{4\pi G\rho}{3R^2}\left(\left[r'^3\right]_0^{R/3} + \left[r'^3\right]_{\frac{2R}{3}}^{R}\right)$$

$$= \frac{4\pi G\rho}{3R^2}\,\frac{1+27-8}{27}R^3 = \frac{80\pi G\rho R}{81}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\rho = \frac{81\, g_0}{80\pi G R}}}$$

Tyngdaccelerationen som funktion av r:

$0 < r < \frac{R}{3}$: $\quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G \cdot 4\pi\int_0^r \rho\, r'^2 dr'$

$$\Rightarrow \quad g(r) = \frac{4\pi G}{r^2}\cdot\frac{81\, g_0}{80\pi G R}\cdot\frac{r^3}{3} = \underline{\underline{\frac{27}{20} g_0 \frac{r}{R}}}$$

$\frac{R}{3} < r < \frac{2R}{3}$: $\quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3 \cdot \frac{81\, g_0}{80\pi G R}$

$$\Rightarrow \quad g(r) = \frac{4\cdot 3^4}{3^4\cdot 80} g_0 \frac{R^2}{r^2} = \frac{g_0}{20}\frac{R^2}{r^2}$$

$\frac{2R}{3} < r < R$: $\quad 4\pi r^2 g(r) = 4\pi G\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3 \frac{81}{80}\frac{g_0}{\pi G R} + 4\pi\int_{\frac{2R}{3}}^{r} \rho\, r'^2 dr'\right]$

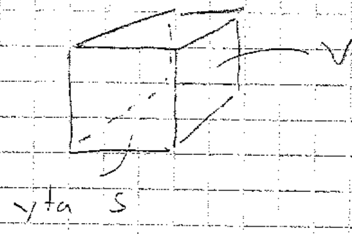
$$\Rightarrow \quad g(r) = \frac{G}{r^2}\left\{\frac{g_0 R^2}{20 G} + \frac{4\pi}{3}\,\frac{81\, g_0}{80\pi G R}\left[r^3 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3\right]\right\}$$

$$= \frac{g_0}{20}\frac{R^2}{r^2} + \frac{27}{20} g_0 \frac{r}{R} - \frac{27}{20} g_0 \frac{8}{27}\frac{R^2}{r^2}$$

$$= \frac{27}{20} g_0 \frac{r}{R} + \frac{1-8}{20} g_0 \frac{R^2}{r^2}$$

$$= \underline{\frac{27}{20} g_0 \frac{r}{R} - \frac{7}{20} g_0 \frac{R^2}{r^2}}$$

5) a)



$$\begin{cases} \text{densitet: } n(r,t) \\ \text{tillväxt: } \gamma n(r,t) \\ \text{utfiskning: } g(r,t) \\ \text{ström: } -a\nabla g \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_V n(r, t+\Delta t)\, dV = \int_V n(r,t)\, dV$$
$$+ \int_V \gamma n(r,t)\, dV \cdot \Delta t$$
$$- \int_V g(r,t)\, dV \cdot \Delta t$$
$$+ \int_S (-a\nabla g)\, dS \cdot \Delta t \quad ✱$$

$$✱ = \int_V a\nabla^2 g\, dV$$

$$\Longrightarrow \int_V \frac{dn}{dt}\, dV = \int_V \left(\gamma n - g + a\nabla^2 g\right) dV$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\frac{dn}{dt} = \gamma n - g + a\nabla^2 g}}$$

b)
$$\begin{cases} \text{stationärt} \Rightarrow \frac{dn}{dt} = 0 \\ g = g_0 \frac{R^2 - r^2}{R^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \gamma n(r) = g_0 \frac{R^2 - r^2}{R^2} - a\nabla^2 g_0 \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a\nabla^2 g_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - a g_0 \left(-\frac{4}{R^2}\right)$$
$$= g_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{n(r) = \frac{g_0}{\gamma}\left(1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{4a}{R^2}\right)}}$$

5) $\underline{\underline{r < a}}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \ldots = \frac{\Phi_0 a}{r^2}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$\underline{\underline{r > a}}$

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi = \ldots = \frac{6\Phi_0 a^3}{r^4}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0 a^3}{r^4}\sin\theta\,\hat{\theta}$$

- Ytkälla vid $r=a$?

$$\begin{cases} \mathbb{F}_- = \frac{\Phi_0}{a}\hat{r} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta} \\ \mathbb{F}_+ = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\,\hat{\theta} \end{cases}$$

$$\sigma = (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-)\cdot\hat{r} = \frac{6\Phi_0}{a}\cos\theta - \frac{\Phi_0}{a} + \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta$$

$$= \underline{\underline{\frac{\Phi_0}{a}\left(8\cos\theta - 1\right)}}$$

- Rymdkällor ?

$\underline{\underline{r<a:}}$ $$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left[\frac{\Phi_0 a}{r^2} - \frac{2\Phi_0}{a}\cos\theta\right]\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\left[\frac{2\Phi_0}{a}\sin\theta\right]\right)$$

$$= -\frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta + \frac{4\Phi_0}{ar^2}\cos\theta = \underline{\underline{0}}$$

$\underline{\underline{r>a:}}$ $$\nabla\cdot\mathbb{F} = \ldots = \underline{\underline{-\frac{8\Phi_0 a^3\cos\theta}{r^5}}}$$

- Punktkällor ?

$\underline{\underline{r>a:}}$ inga singulariteter

$\underline{\underline{r<a:}}$ punktkälla i origo $\underline{\underline{q = 4\pi\Phi_0 a}}$