VEKTORN

FŐ+RÓ

F/KF

SIDOR: 80 ST

PRIS: ~~25 KR~~

35 kr

VEKTORFÄLT & KLASSISK FYSIK

Vad lär man sig i vektor?
- räkna på flöden
- räkna ut laddning / laddningsförd. i en kondensator
- beskriva fält matematiskt t.ex. magnetfält

Vad är ett fält?
en skalär fkn. i rummet - storlek
en vektorvärd fkn. i rummet - storlek = "längd", riktning

$f(x,y,z)$ skalär fkn. om utvärderna tillhör $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
$f(x,y,z)$ vektor fkn. om $V_f \subset \mathbb{R}^3$

- ett sätt att behandla fjärrverkande krafter
- en variation av någon storhet i hela rummet

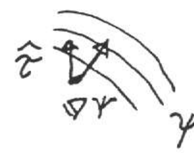
Vektor:
- att räkna integraler
  $dS = \hat{u}|ds|$, dr , $\hat{z} \times dr$, Gauss sats , Green's formel

- varför uppstår fält , matematiskt - diffekv. ← fysik.
- lösa diffekv.

VA 2.2

Vi har ett skalärt fält $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{x}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{z}{a}\tan\left(\frac{\pi y}{a}\right)$

Beräkna riktningsderivatan av $\Psi(\mathbf{r})$ i pkten
$A = (a, 0, -2a) = a\hat{x} - 2a\hat{z}$ i riktningen $\overrightarrow{AB}$, där $B = (3a, -3a, 4a)$



Ψ = konst.

riktningsderivatan i riktn. $\hat{\tau} = \hat{\tau} \cdot \nabla\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \hat{x} \nabla \Psi$$

Här: $\hat{\tau} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = \frac{(2a, -3a, 6a)}{7a}$

$$\nabla\Psi = \left(\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right), \frac{x\pi}{a^2}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \frac{z\pi}{a^2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right), \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right)$$

$\nabla\Psi(A) = \left(0, \frac{\pi}{a} - \frac{2\pi}{a}, 0\right) \Rightarrow$ riktningsderivatan i

$\overrightarrow{AB}$ rikt $= \nabla\Psi(A) \cdot \hat{\tau} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{7a}}}$

Nivåyta $f =$ konst. (f skalärt fält)
ekvipotentialyta om f är en potential
isoterm om f är en temperatur
isobar om f är ett tryck

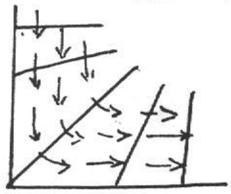
---

fältlinje – har tangent i varje pkt. som är det vektorvärda fältet

---

fältlinjer för vektorfält $\mathbb{F}$ med potential ϕ ($\mathbb{F} = -\nabla\phi$)
är $\perp$ mot ekvpot. linjerna för ϕ

vatten strömmar



Temperaturen $T(\mathbf{r})$ & värmeströmningstätheten $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\lambda \nabla T$

(Fouriers lag)

Värmeeffekten hos en yta $S = P = \int_S \mathbf{J}\, d\mathbf{S}$

värmetätheten $Q = \underset{\substack{\text{värmekapacitet} \\ [\mathrm{J/kg\,K}]}}{c}\ \underset{\substack{\text{masstätheten} \\ [\mathrm{kg/m^3}]}}{\rho}\ T$ $\quad [\mathrm{J/m^3}]$

(värmeinnehållet)

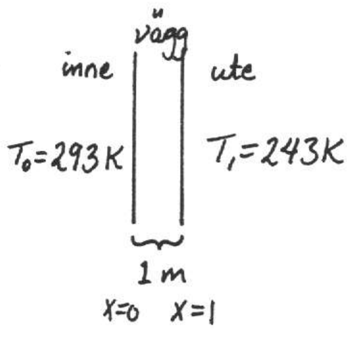
$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial t}\, dV = -\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = [\text{Gauss sats}] = -\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dV$$

Eftersom V var godtycklig så måste integranderna vara lika,

dvs. $$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = \lambda \nabla^2 T \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \nabla^2 T} = \frac{\lambda}{c\rho}\left(T''_{xx} + T''_{yy} + T''_{zz}\right)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ex



Hur ser den stationära värmefördelningen ut i väggen? Hur mkt. värme behöver vi tillföra?

Värmeledningsekv. $T''_{xx} = 0$

$T(x) = Ax + B$

$T(x) = -50x + T_0$

Hur mycket värme strömmar ut?

$$\mathbf{J} = -\lambda T'(x)\hat{x} = 50\hat{x} \Rightarrow \int_{\text{väggen}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{väggen}} (\lambda 50 \hat{x}) \cdot \hat{x}\, dy\, dz = \lambda 50 A \ [\mathrm{J/s}]$$

VA 2.6

Skalärt fält $\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 (2xz - y^2)/a^2$

I vilken riktning är riktningsderivatan störst (i pkt. $P=(a,3a,2a)$)? Hur stort är maximat?

Riktningen ges av $\nabla\phi'(P)$
Storlek ges av $|\nabla\phi(P)|$

$$\nabla\phi = \frac{\phi_0}{a^2}(2z, -2y, 2x)$$

$$\nabla\phi(P) = \frac{2\phi_0}{a^2}(2a, -3a, a)$$

$$|\nabla\phi(P)| = \frac{|\phi_0|}{|a|^2} 2\sqrt{14}\,|a| = \frac{2\sqrt{14}\,|\phi_0|}{|a|}$$

maximala förändr. riktn. $(2,-3,1)$

VA 2.8

Ekv. för isotermerna nära ett yttre hörn i en vägg är
$\frac{xy}{a^2} = \text{konstant} = (T(x,y))$

Värmeströmtätheten ges av Fouriers lag $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T(x,y)$

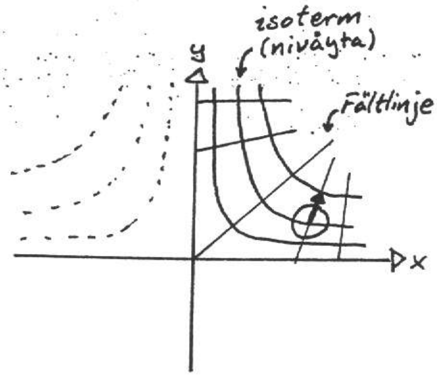
I vilken riktning strömmar $\mathbf{J}$ i $P=(a,3a)$?

Skissera fältlinjerna för $\mathbf{J}$

Riktningen ges av $-\nabla T$
vi vet $T \propto \frac{xy}{a^2}$, $T = C\frac{xy}{a^2} \Rightarrow \mathbf{J} \propto -(y,x)\frac{1}{a}$

$\Rightarrow \mathbf{J}(P) \propto -(3,1)$

<u>VA.2.8 forts.</u>



Räcker att betrakta 1:a kvadranten, eftersom vi betraktar hörnet vid en vägg.

ekv. för fältlinje?

Här $\frac{d\mathbb{r}}{d\tau} = \frac{-1}{a}(y,x) = -\frac{1}{a}(y(\tau), x(\tau))$

$\mathbb{r}(\tau)$ = ekv. för "fältlinje pkt."

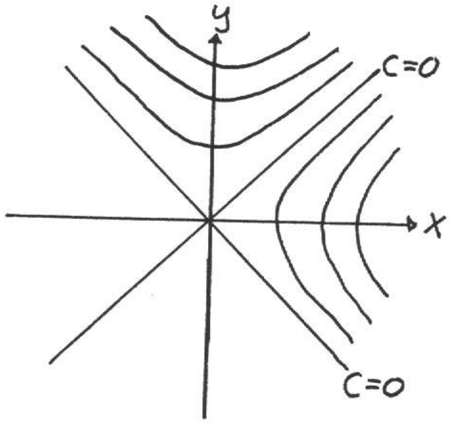
$$\frac{d\mathbb{r}}{d\tau} = k\,\mathbb{J}(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

$$\frac{d\mathbb{r}}{d\tau} = x'(\tau)\hat{x} + y'(\tau)\hat{y} \Rightarrow \begin{cases} x'(\tau) = -\frac{1}{a}\,y(\tau) & = \frac{dx}{d\tau} \\ y'(\tau) = -\frac{1}{a}\,x(\tau) & = \frac{dy}{d\tau} \end{cases}$$

dividera med varandra $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)} = \frac{x}{y}$

Separabel diffekv.

$$\Rightarrow y\,dy = x\,dx \Rightarrow y^2 = x^2 + C$$



VA 4.2

$\mathbb{a}$ konstant vektor

$\mathbb{r}$ ortsvektor

$\hat{\mathbb{r}} = \frac{\mathbb{r}}{r}$, $|\mathbb{r}| = r$

Visa att ① $(\mathbb{a}\cdot\nabla)\mathbb{r} = \mathbb{a}$

② $\nabla(\mathbb{a}\cdot\mathbb{r}) = \mathbb{a}$

③ $\nabla\times(\mathbb{a}\times\mathbb{r}) = 2\mathbb{a}$

$$\mathbb{r} = (x,y,z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{x}_i$$

$$\mathbb{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{x}_i$$

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

① $$(\mathbb{a}\cdot\nabla)\mathbb{r} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\sum_{j=1}^{3}\hat{x}_j x_j = \left\{ \delta_{ij} = \begin{matrix} 1 \text{ om } i=j \\ 0 \text{ annars} \end{matrix} \right\} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i \hat{x}_j \cdot \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{x}_i = \mathbb{a}$$

② $$\nabla(\mathbb{a}\cdot\mathbb{r}) = [4.27] = (\mathbb{a}\cdot\nabla)\mathbb{r} + (\mathbb{r}\cdot\nabla)\mathbb{a} + (\mathbb{a}\times(\nabla\times\mathbb{r})) + (\mathbb{r}\times(\nabla\times\mathbb{a})) =$$

$$= \mathbb{a} + 0 + 0 + 0 = \mathbb{a}$$

$$\left(\nabla\times\mathbb{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial z} y\right) + \ldots = 0 \right)$$

Alt.

$$\nabla(\mathbb{a}\cdot\mathbb{r}) = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3} a_j x_j\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \hat{x}_i a_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i a_i = \mathbb{a}$$

③ $$\nabla\times(\mathbb{a}\times\mathbb{r}) = [4.25] = (\mathbb{r}\cdot\nabla)\mathbb{a} - (\nabla\cdot\mathbb{a})\mathbb{r} - (\mathbb{a}\cdot\nabla)\mathbb{r} + (\nabla\cdot\mathbb{r})\mathbb{a} =$$

$$= 0 + 0 - \mathbb{a} + 3\mathbb{a} = 2\mathbb{a}$$

$$\left(\nabla\cdot\mathbb{r} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z = 3 \right)$$

Produktderiveringsregler

Kedjeregeln

$$\nabla u(f,g,h\ldots) = \frac{\partial u}{\partial f}\nabla f + \frac{\partial u}{\partial g}\nabla g + \ldots = \nabla_f u + \nabla_g u + \ldots = (\nabla_f + \nabla_g + \ldots)\, u$$

$$\nabla(fg) = \big((\nabla_f + \nabla_g)(fg)\big) = (\nabla_f f)g + f(\nabla_g g) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

$$\nabla\cdot(f\mathbb{A}) = (\nabla_f + \nabla_{\mathbb{A}})\cdot(f\mathbb{A}) = (\nabla_f + \nabla_{A_x} + \nabla_{A_y} + \nabla_{A_z})\cdot(f\mathbb{A}) =$$
$$= (\nabla_f f)\mathbb{A} + f(\nabla_{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{A}) = (\nabla f)\mathbb{A} + f(\nabla\mathbb{A})$$

$$\nabla\times(f\mathbb{A}) = (\nabla_f + \nabla_{\mathbb{A}})\times(f\mathbb{A}) = (\nabla_f f)\times\mathbb{A} + f(\nabla_{\mathbb{A}}\times\mathbb{A}) = (\nabla f)\times\mathbb{A} + f(\nabla\times\mathbb{A})$$

$$\nabla\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = (\nabla_{\mathbb{A}} + \nabla_{\mathbb{B}})\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = \nabla_{\mathbb{A}}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) - \nabla_{\mathbb{B}}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{A}) =$$
$$= \mathbb{B}\cdot(\nabla_{\mathbb{A}}\times\mathbb{A}) - \mathbb{A}\cdot(\nabla_{\mathbb{B}}\times\mathbb{B}) = \mathbb{B}\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) - \mathbb{A}\cdot(\nabla\times\mathbb{B})$$

$$\nabla\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = (\nabla_{\mathbb{A}} + \nabla_{\mathbb{B}})\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B})$$

använd: $\mathbb{a}\times(\mathbb{b}\times\mathbb{c}) = (\mathbb{a}\cdot\mathbb{c})\mathbb{b} - (\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})\mathbb{c}$

$$\nabla_{\mathbb{A}}\times(\mathbb{A}\times\underset{\uparrow}{\mathbb{B}}) = \nabla_{\mathbb{A}}\times\big(B_0(\hat{x}A_y - \hat{y}A_x)\big) = B_0\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_y & -A_x & 0\end{vmatrix} = B_0\Big(\hat{x}\frac{\partial}{\partial z}A_x + \hat{y}\frac{\partial}{\partial z}A_y + \hat{z}\frac{-\partial}{\partial x}A_x - \frac{\partial}{\partial y}A_y\Big)$$

Konstant vektor

antag $\mathbb{B} = B_0\hat{z}$

$$\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ 0 & 0 & B_0\end{vmatrix} = (\hat{x}A_y - \hat{y}A_x)B_0$$

$$+ B_0\hat{z}\Big(\frac{\partial}{\partial z}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_z\Big) =$$

$$= (\mathbb{B}\cdot\nabla)\mathbb{A} - \mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{A})$$

$$\left.\begin{aligned} &\therefore\ \nabla_{\mathbb{A}}\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = (\mathbb{B}\cdot\nabla)\mathbb{A} - \mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{A})\\ &\text{P.s.s.}\ \ -\nabla_{\mathbb{B}}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{A}) = -(\mathbb{A}\times\nabla)\mathbb{B} + \mathbb{A}(\nabla\cdot\mathbb{B})\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\nabla\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) =\\ &= (\mathbb{B}\cdot\nabla)\mathbb{A} - (\mathbb{A}\cdot\nabla)\mathbb{B} +\\ &+ \mathbb{A}(\nabla\cdot\mathbb{B}) - \mathbb{B}(\nabla\cdot\mathbb{A})\end{aligned}$$

__VA 4.5__ Låt vektorfältet $\mathbf{A} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} f(r)$, $\mathbf{a}$ är en fix vektor, $f(r)$ en obekänt skalär fkn. Bestäm $f(r)$ s.a. $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$
Beräkna $\nabla\times\mathbf{A}$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\big(f(r)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\big)\cdot\mathbf{r} + f(r)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{r}}_{=3} = \nabla f(r)\cdot\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) + \underbrace{(\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}))}_{=\mathbf{a}} f(r)\cdot\mathbf{r} +$$

$$+3f(r)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = (\nabla r)\frac{\partial f(r)}{\partial r}\cdot\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) + 4f(r)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \ldots$$

$$\left[\nabla r = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \ (=\hat{r})\right]$$

$$\ldots = \left(\frac{r^2}{r} f'(r) + 4f(r)\right)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$$

$$\Leftrightarrow r f'(r) + 4f(r) = 0$$

$$r^4 f'(r) + 4r^3 f(r) = 0 \Rightarrow r^4 f(r) = C \quad \Rightarrow \underline{\underline{f(r) = Cr^{-4}}}$$

Om $f(r) = \dfrac{C}{r^4}$ så är $\mathbf{A}$ källfritt i hela $\mathbb{R}^3$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \overset{\text{formelsamlingen}}{[B6]} = (\nabla f(r)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}))\times\mathbf{r} + f(r)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\underbrace{(\nabla\times\mathbf{r})}_{=0} = \left\{\nabla\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix} = 0\right\} =$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\nabla f(r))\times\mathbf{r} + f(r)(\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}))\times\mathbf{r} =$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\underbrace{(\nabla r)\times\mathbf{r}}_{=\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{r}=0}\frac{\partial f(r)}{\partial r} + f(r)\,\mathbf{a}\times\mathbf{r} = \underline{\underline{\frac{C}{r^4}\,\mathbf{a}\times\mathbf{r}}}$$

__VA 4.7__ $\mathbf{V}_1 = -\nabla\phi$, $\mathbf{V}_2 = \nabla\times\mathbf{M}$ där $\phi = \dfrac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{M} = \dfrac{\mathbf{P}\times\mathbf{r}}{r^3}$

$\mathbf{P}$ fix vektor Visa $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$

$$\mathbf{V}_1 = -\nabla\left(\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right) = [B9] = -(\mathbf{P}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \underbrace{\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\nabla\right)\mathbf{P}}_{=0,\ \mathbf{P}\text{ konst.}} + \mathbf{P}\times\underbrace{\left(\nabla\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)}_{=0,\ \mathbf{r}\text{ virvelfritt}} + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\times\underbrace{(\nabla\times\mathbf{P})}_{=0,\ \mathbf{P}\text{ konst.}} = -(\mathbf{P}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\left[\mathbf{r}\cdot\nabla = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = 0\right] \qquad r^3$$

$$\mathbf{V}_2 = \nabla\times\left(\frac{\mathbf{P}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) = [B8] = \underbrace{\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\nabla\right)\mathbf{P}}_{=0,\ \mathbf{P}\text{ konst.}} - \underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{P})\frac{\mathbf{r}}{r^3}}_{=0,\ \mathbf{P}\text{ konst.}} - (\mathbf{P}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\mathbf{P} = -(\mathbf{P}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \left(\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)\mathbf{P} =$$

$$= [B5] = -(\mathbf{P}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \Big(\underbrace{\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)}_{\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right)\nabla r}\cdot\mathbf{r}\Big)\mathbf{P} + \left(\frac{1}{r^3}(\nabla\cdot\mathbf{r})\right)\mathbf{P} = -(\mathbf{P}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{P}\underbrace{\left(\frac{-3}{r^4}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r} + \frac{3}{r^3}\right)}_{=0} = -(\mathbf{P}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{V}_1$$

$$[\nabla\times f(r)\mathbf{r} = [B6] = (\nabla f(r))\times\mathbf{r} + f(r)(\nabla\times\mathbf{r}) = \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial r}\nabla r\times\mathbf{r} = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{r} = 0$$

VA 2.10 Potentialfältet $\Psi(x,y)$ har ekvipotentiallinjerna

$$x^2+y^2-2ax\frac{1+c}{1-c}+a^2=0 \quad \text{där } c=e^{-\Psi/\Psi_0}$$

Skissera fältbilden.

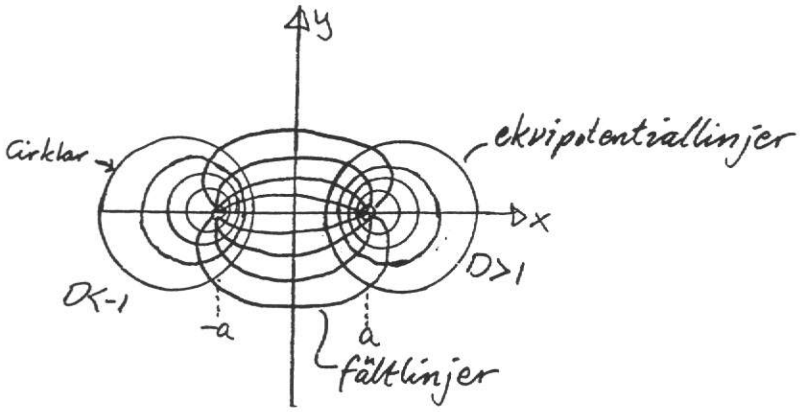
$$\frac{1+c}{1-c}=D>1 \text{ om } \Psi>0 \qquad (\Psi_0>0)$$

$$<-1 \text{ om } \Psi<0$$

$$(x-aD)^2+y^2=D^2a^2-a^2=(D^2-1)a^2$$

cirkel med centrum i $(x,y)=(aD,0)$ & radie $a\sqrt{D^2-1}$

$R=\sqrt{D^2-1}\,a<aD$



$$\Psi=\Psi_0 \ln\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} \qquad ,\left(k=\frac{1}{\Psi_0}\right)$$

$$\frac{d\mathbb{r}}{d\tau}=k\nabla\Psi \Rightarrow x'(\tau)=\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}-\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2}$$

$$y'(\tau)=\frac{2y}{(x-a)^2+y^2}-\frac{2y}{(x+a)^2+y^2}$$

MATLAB ⇒ fältlinjer.

Två dd-op. & ett fält

Skalärt fält

① $\nabla\cdot\nabla\psi = \nabla^2\psi = \Delta\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi$

② $\nabla\times(\nabla\psi) = (\nabla\times\nabla)\psi = \mathbb{0}$

Vektorfält

③ $\nabla(\nabla\cdot\mathbb{A})$ ej förenklingsbart se på varje enskilt fall

④ $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) = \left[\begin{matrix}\text{Skalär}\\ \text{trippel prod.}\end{matrix}\right] = (\nabla\times\nabla)\cdot\mathbb{A} = 0$

⑤ $\nabla\times(\nabla\times\mathbb{A}) = \left[\mathbb{a}\times(\mathbb{b}\times\mathbb{c}) = (\mathbb{a}\cdot\mathbb{c})\mathbb{b} - (\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})\mathbb{c}\right] = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{A}) - (\nabla\cdot\nabla)\mathbb{A}$

$\nabla^2\mathbb{A} = \Delta\mathbb{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$ Om vi tittar på prob. i kroklinj. koord. så används ⑤ som def. på $\Delta\mathbb{A}$ dvs. $\nabla^2\mathbb{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{A}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbb{A})$

VA 4.11a Beräkna $\nabla^2\mathbb{V}$ med anv. av $\nabla^2\mathbb{V} = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{V}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbb{V})$ då $\mathbb{V} = f(r)\hat{r}$

① $\nabla\cdot\mathbb{V} = \nabla\cdot(f(r)\hat{r}) = \nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\mathbb{r}\right) = [B5] = \frac{f(r)}{r}(\nabla\cdot\mathbb{r}) + \left(\nabla\left(\frac{f(r)}{r}\right)\right)\cdot\mathbb{r} =$

$= \frac{f(r)}{r}\cdot 3 + \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{f(r)}{r}\right)\nabla_r\cdot\mathbb{r} = \frac{3f(r)}{r} + \left(\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2}\right)\underbrace{\hat{r}\cdot\mathbb{r}}_{r} = 2\frac{f(r)}{r} + f'(r)$

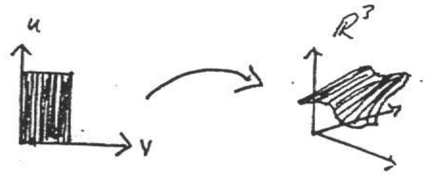
② $\nabla\times\mathbb{V} = \nabla\times(f(r)\hat{r}) = f(r)\underbrace{(\nabla\times\hat{r})}_{=0} + \nabla f(r)\times\hat{r} = f'(r)\underbrace{\hat{r}\times\hat{r}}_{=0}$

③ $\nabla(\nabla\cdot\mathbb{V}) = \nabla\left(\frac{2f(r)}{r} + f'(r)\right) = (\nabla f)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2f(r)}{r} + f'(r)\right) =$

$= \hat{r}\left(f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r} - 2\frac{f(r)}{r^2}\right)$

$\nabla r = \nabla\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{2x\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \Rightarrow \nabla_r = \frac{(x,y,z)}{r} = \frac{\mathbb{r}}{r} = \frac{r\hat{r}}{r} = \hat{r}$

$\nabla g(r) = \frac{\partial g(r)}{\partial r}\nabla_r$	$\frac{\partial g(r)}{\partial x} = \frac{\partial g(r)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$	$\frac{\partial g(r)}{\partial \mathbb{r}} = \frac{\partial g(r)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \mathbb{r}}$



$r = (x, y, z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$r = (x, y, z(x,y))$

$r = a x_1 + b x_2$

Parametrarna

VA 5.1 Härled en parameterframställning för skärningskurvan C mellan ytorna S_1 & S_2

$$S_1 = \{(x,y,z) : 4(x^2+y^2) + z^2 = 20a^2\}$$

$$S_2 = \{(x,y,z) : \arctan\left(\frac{z}{x+y}\right) = \frac{\pi}{3}\}$$

$$\arctan\left(\frac{z}{x+y}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{z}{x+y} = \sqrt{3} \Rightarrow z = \sqrt{3}(x+y)$$

$\Rightarrow$ parameterframställning för S_2 $\quad r(x,y) = (x, y, \sqrt{3}(x+y))$

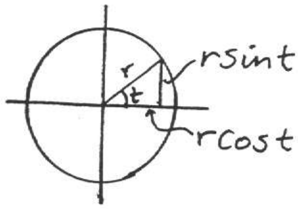
alla pkter på C uppfyller

$$\begin{cases} z = \sqrt{3}(x+y) \\ 4(x^2+y^2) + z^2 = 20a^2 \end{cases} \Rightarrow 4(x^2+y^2) + 3(x^2+y^2+2xy) = 20a^2$$

$$\Rightarrow 7\left(x + \frac{3}{7}y\right)^2 - \frac{9}{7}y^2 + 7y^2 = 20a^2$$

$$7\left(x + \frac{3}{7}y\right)^2 + \frac{40}{7}y^2 = 20a^2$$

$\therefore$ ellips $\Rightarrow$ parameterframställning



$x^2+y^2 = r^2$

$y = r\sin t$

$x = r\cos t$

$$\underline{y} = \sqrt{\frac{20\cdot 7}{40}}\, a\sin t = \underline{\sqrt{\frac{7}{2}}\, a\sin t}$$

$$x + \frac{3}{7}y = \sqrt{\frac{20}{7}}\, a\cos t \Rightarrow x = \underline{\frac{-3}{\sqrt{14}}\, a\sin t + \sqrt{\frac{20}{7}}\, a\cos t}$$

$$\underline{z} = \sqrt{3}(x+y) = \sqrt{3}\sqrt{\frac{20}{7}}\, a\cos t + \frac{(-3)\sqrt{3}}{\sqrt{14}}\, a\sin t + \sqrt{3}\sqrt{\frac{7}{2}}\, a\sin t =$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{20}\cos t + 2\sqrt{2}\sin t\right)}. \qquad t \in [0, 2\pi]$$

VA 5.3

Härled en parameterframställning för ytan

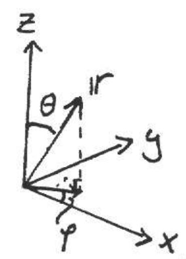
$$S: |2\mathbb{r} - z\hat{z}| = 4a \qquad z>0$$

$$\Leftrightarrow |(2x, 2y, 2z-z)|^2 = 16a^2$$

$$4x^2+4y^2+z^2=16a^2$$

En parameterframställning för en sfär

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad \theta\in[0,\pi]$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$
$$z = r\cos\theta$$



$\Rightarrow$ en parameterframst. för S:

$$\begin{cases} x = 2a\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2a\sin\theta\sin\varphi \\ z = 4a\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2+4y^2+z^2 = 4\cdot 4a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 16a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + 16a^2\cos^2\theta = 16a^2$$

$$d\mathbb{r} = |\mathbb{r}'(u)|\,du\,\hat{u} \qquad \text{(riktat längs kurvan)}$$

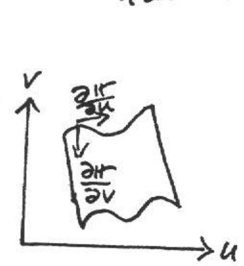
litet element riktat längs en parameterframställd kurva

$|\mathbb{r}'(u)|$ skalfaktor för parametern u

ytelement $d\mathbb{S} = \hat{n}\,du\,dv$ (plan yta)

$\hat{n}$ = normal

$$d\mathbb{S} = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial v}\,du\,dv \qquad u, v \text{ parameterframst.}$$



litet volymselement $dV = dx\,dy\,dz$ i kart. koord. $= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right| du_1\,du_2\,du_3$

funktionaldet.

$\mathbb{r}(u_1,u_2,u_3)$ $\quad (\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbb{r}} \mathbb{R}^3$ 1-1 & kont. deriverbar)

tangentbasvektorer $\quad \mathbb{t}_i = \dfrac{\partial\mathbb{r}}{\partial u_i} \quad i = 1,2,3$

normalbasvektorer $\quad \mathbb{n}_i = \nabla u_i$

ex kart. koord.

$$u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = z$$

$$\mathbb{t}_x = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial x} = (1,0,0) = \hat{x} \qquad \mathbb{t}_y = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial y} = (0,1,0) = \hat{y} \qquad \mathbb{t}_z = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial z} = (0,0,1) = \hat{z}$$

$$\mathbb{n}_x = \nabla x = \hat{x} \qquad \mathbb{n}_y = \nabla y = \hat{y} \qquad \mathbb{n}_z = \nabla z = \hat{z}$$

sfäriska koord.

$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

$\mathbf{t}_r = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \quad (= \hat{r})$

$\mathbf{t}_\theta = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$

$\mathbf{t}_\varphi = r\sin\theta(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$\mathbf{t}_r \cdot \mathbf{t}_\theta = 0 \qquad |\mathbf{t}_r| = 1$
$\mathbf{t}_r \cdot \mathbf{t}_\varphi = 0 \qquad |\mathbf{t}_\theta| = r$
$\mathbf{t}_\theta \cdot \mathbf{t}_\varphi = 0 \qquad |\mathbf{t}_\varphi| = r\sin\theta$

$\mathbf{t}_j \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$

$\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$

Nu: ortogonala system
def. av skalfaktor

$h_{u_i} = \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right| \qquad$ då gäller $\left.\begin{aligned} \mathbf{t}_i &= h_{u_i}\hat{u}_i \\ \mathbf{n}_i &= \frac{\hat{u}_i}{h_{u_i}} \end{aligned}\right\} \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n}_i = 1$

$|d\mathbf{r}|$ = bågelementet ds

$d\mathbf{r} = h_1 u_1 \hat{u}_1 du_1 + h_2 u_2 \hat{u}_2 du_2 + h_3 u_3 \hat{u}_3 du_3$

$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$

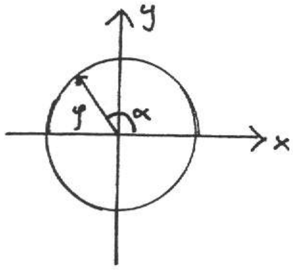
VA 5.6 Cylindriska koord. def. av $\mathbf{r} = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, z)$

$0 \leq \rho < \infty$

$0 \leq \alpha < 2\pi$

Visa att syst. är ort.

beräkna skalfaktor & bågelement



$$\mathbf{t}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$$

$$\mathbf{t}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \rho(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$

$$\mathbf{t}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0,0,1)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}_\rho \cdot \mathbf{t}_\alpha &= 0 \\ \mathbf{t}_\rho \cdot \mathbf{t}_z &= 0 \\ \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{t}_z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Systemet är ortogonalt.}$$

$$\left.\begin{aligned} h_\rho &= |\mathbf{t}_\rho| = 1 \\ h_\alpha &= |\mathbf{t}_\alpha| = \rho \\ h_z &= |\mathbf{t}_z| = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\mathbf{t}_\rho}{h_\rho} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) \\ \hat{\alpha} &= \frac{\mathbf{t}_\alpha}{h_\alpha} = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) \\ \hat{z} &= (0,0,1) \end{aligned}$$

bågelementet $ds = |d\mathbf{r}| = |h_\rho d\rho\,\hat{\rho} + h_\alpha d\alpha\,\hat{\alpha} + h_z dz\,\hat{z}| = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\alpha^2 + dz^2}$

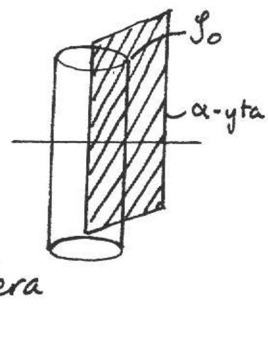
Skissa koord. ytor & koord. kurvor

koord. yta: håll koord. konst. & variera övriga parametrar

ρ-yta: cylinder med radie ρ_0 längs z-axeln

α-yta: halvplan längs z-axeln riktat i x_0-riktn.

z-yta: plan // xyplanet på höjden z_0

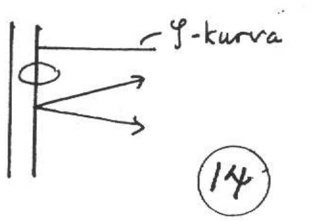


koord. kurva: håll övriga parametrar konst & variera aktuell parameter.

ρ-kurva: stråle ut från z-axeln

α-kurva: cirkel runt z-axeln

z-kurva: linje // z-axeln



u, v, w kroklinj. koord.

koord. kurvor variera en koord. övriga = konst.

de tangenter som finns till koord. kurvorna utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ om u, v, w entydigt beskriver rummet

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$ OBS! att basvektorerna är funktioner av positionen i rummet.

koord. yta, håll en koord. konst. variera de övriga

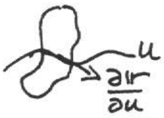
$\Rightarrow \exists$ en normal till ytan

Den kan skrivas som $\nabla u, \nabla v, \nabla w$

Även dessa beskriver hela $\mathbb{R}^3$

Specialfall ortogonala basvektorer

om tangentbasvektorerna, ett ortogonalt system så är normalbasvektorerna riktade i samma riktn.



$$\nabla u \parallel \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

Skalfaktorer $h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|$ etc.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i = h_i^2 \nabla u_i}$$

VA 5.7

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

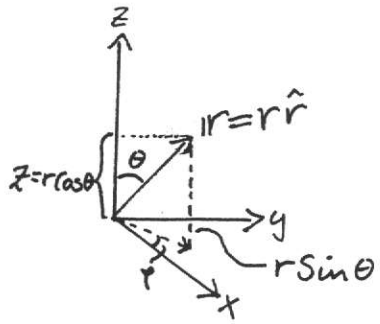
$$\varphi = \pi - \left(\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \operatorname{Sign}(y)$$

Bestäm tangent & normalbasvekt. samt skalfaktor, bågelement & volymelement

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{O}$: $r \in [0, \infty[$

$\theta \in [0, \pi]$

$\varphi \in [0, 2\pi[$ 1-1 utom på randen



$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$\mathbb{n}_r = \nabla r = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mathbb{r}}{r} \qquad \left((\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\mathbb{n}_\theta = \nabla_\theta = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}}\left(-\frac{xz}{r^3}, -\frac{yz}{r^3}, \frac{-z^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(xz, yz, -(x^2+y^2)\right)$$

$$\mathbb{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$
$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \hat{r} = \mathbb{n}_r$$
$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta} = r(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) = r\hat{\theta} = r^2\mathbb{n}_\theta$$
$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi} = r\sin\theta(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = r\sin\theta\,\hat{\varphi} = r^2\sin^2\theta\,\mathbb{n}_\varphi$$

$$\left(\left|\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta}\right| = r = h_\theta \qquad |\mathbb{n}_\theta| = \frac{1}{h_\theta} \qquad \mathbb{n}_\theta /\!/ \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta} \qquad \mathbb{n}_\theta = \frac{\theta}{h_\theta} = \frac{\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta}}{h^2\theta}\right)$$

bågelementet ds: $ds^2 = d\mathbb{r}\cdot d\mathbb{r} = h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2$

$$\left(\begin{aligned} &\text{kedjereg.}\quad \partial\mathbb{r} = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial u}du + \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial w}dw \\ &d\mathbb{r} = h_r\hat{r}\,dr + h_\theta\hat{\theta}\,d\theta + h_\varphi\hat{\varphi}\,d\varphi \end{aligned}\right)$$

Volymelementet $= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = h_r h_\theta h_\varphi = r^2\sin\theta$ (alltid pos.)

__VA 5.11__ En typ av elliptiska koord. ξ, η, φ def. av

$$\mathbf{r} = a(\sinh\xi\cos\eta\cos\varphi, \sinh\xi\cos\eta\sin\varphi, \cosh\xi\sin\eta)$$

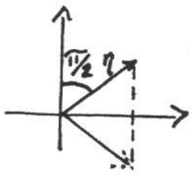
Skissera koord. ytan och uttryck bågelementet i ξ, η, φ

$\xi \in [0, \infty[$

$\eta \in [-\pi/2, \pi/2]$

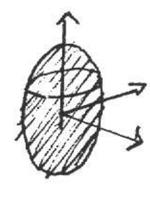
$\varphi \in [0, 2\pi[$

ξ-yta: $\mathbf{r} = (b\cos\eta\cos\varphi, b\cos\eta\sin\varphi, c\sin\eta)$



$$\sin\underbrace{\left(\tfrac{\pi}{2} - \eta\right)}_{\theta \in [0, \pi]} = \cos\eta$$

$$\mathbf{r} = (b\sin\theta\cos\varphi, b\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta)$$

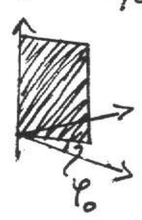


$$\Rightarrow \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \qquad b = a\sinh\xi_0$$
$$c = a\cosh\xi_0$$

φ-yta: z fri

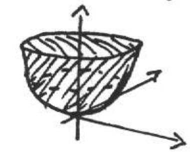
$\frac{y}{x} = \tan\varphi_0 \Rightarrow y = x\tan\varphi_0$ $\qquad$ φ ett tecken

$\Rightarrow$ halvplan



η-yta: $\mathbf{r} = (b\sinh\xi\cos\varphi, b\sinh\xi\sin\varphi, c\cosh\xi)$

$\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{b^2}\right) = 1$ $\qquad$ rotationshyperboloid



tangent basvektorer

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi} = a(\cosh\xi\cos\eta\cos\varphi, \cosh\xi\cos\eta\sin\varphi, \sinh\xi\sin\eta)$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\eta} = a(\sinh\xi - \sin\eta\cos\varphi, \sinh\xi - \sin\eta\sin\varphi, \cosh\xi\cos\eta)$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = a(-\sinh\xi\cos\eta\sin\varphi, \sinh\xi\cos\eta\cos\varphi, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\eta} &= 0 \\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} &= 0 \\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ortogonalt}$$

$$h_\xi = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}\right| = a\sqrt{\cosh^2\xi\cos^2\eta + \sinh^2\xi\sin^2\eta} = a\sqrt{\cosh^2\xi - \sin^2\eta}$$

$$h_\eta = a\sqrt{\sinh^2\xi\sin^2\eta + \cosh^2\xi\cos^2\eta}$$

$$\partial \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}dw$$

$$h_\varphi = a|\sinh\xi\cos\eta| = a\sinh\xi\cos\eta$$

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2$$

KAP 6

skalärt fält, kedjereg.

① $$\nabla\phi(u_1,u_2,u_3) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\cdot\nabla u_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\frac{\hat{u}_i}{h_{u_i}}$$

② $$\nabla^2\phi(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\right)$$

③ $$\nabla\cdot\underbrace{\mathbf{A}(u_1,u_2,u_3)}_{=A_1\hat{u}_1+A_2\hat{u}_2+A_3\hat{u}_3} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}A_i\right)$$

④ $$\nabla\times\mathbf{A}(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

VA6.2 Cylindriska koord. ρ, α, z $\quad \mathbf{r} = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, z)$ $\quad \rho\in[0,\infty[$, $\alpha\in[0,2\pi[$, $z\in\mathbb{R}$

$\phi(\rho,\alpha,z) = z\sin\alpha$

$\mathbf{A} = \rho^2\hat{\rho} + z^2\cos\alpha\,\hat{\alpha} + \rho z\hat{z}$

Beräkna ① $\nabla\phi$
② $\nabla^2\phi$
③ $\nabla\cdot\mathbf{A}$
④ $\nabla\times\mathbf{A}$

$h_\rho = 1$, $h_\alpha = \rho$, $h_z = 1$

① $$\nabla\phi = \frac{1}{h_\rho}\hat{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{h_\alpha}\hat{\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{h_z}\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 + \frac{z}{\rho}\cos\alpha\,\hat{\alpha} + \sin\alpha\,\hat{z}$$

② $$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{1^2}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\rho}{\rho^2}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{1^2}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right) = \frac{1}{\rho}\left(0 - \frac{z}{\rho}\sin\alpha + 0\right) = -\frac{z}{\rho^2}\sin\alpha$$

$\rho \neq 0$

③ $$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{1}A_\rho\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\rho}{\rho}A_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{1}A_z\right)\right) = \frac{1}{\rho}\left(3\rho^2 - z^2\sin\alpha + \rho^2\right) = 4\rho - \frac{z^2}{\rho}\sin\alpha$$

④ $$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\alpha & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho}(-\rho\cos\alpha\cdot 2z) + \frac{1}{\rho}(-\hat{\alpha}\rho z) + \frac{1}{\rho}\hat{z}z^2\cos\alpha =$$

$$= -2z\cos\alpha\,\hat{\rho} - z\hat{\alpha} + \frac{z^2}{\rho}\cos\alpha\,\hat{z}$$

VA6.4

$$\mathbb{F} = \underbrace{(a\cos\theta + r\cos^2\theta)}_{F_r}\hat{r} - \underbrace{\sin\theta(a + r\cos\theta)}_{F_\theta}\hat{\theta}$$

Beräkna ① $\nabla \cdot \mathbb{F}$

② $\nabla \times \mathbb{F}$

$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\varphi = r\sin\theta$

① $\nabla \mathbb{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\, F_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\, F_\theta\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta}(a2r\cos\theta + 3r^2\cos^2\theta)\,\cdot$

$\cdot\sin\theta + \frac{r}{r^2\sin\theta}(-2\sin\theta\cos\theta(a + r\cos\theta) + \sin^2\theta\, r\sin\theta) =$

$= \frac{2a}{r}\cos\theta + 3\cos^2\theta - \frac{2a}{r}\cos\theta - 2\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

② $\nabla \times \mathbb{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & F_\theta & F_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}(\hat{r}\cdot 0 + r\hat{\theta}\cdot 0 + r\sin\theta\hat{\varphi}(-\sin\theta\cdot a - 2r\sin\theta\cos\theta +$

$+ a\sin\theta + r\cos\theta\sin\theta\cdot 2) = 0$

Virvelfritt

VA6.7

De paraboliska cylinderkoord. $u\,v\,z$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \\ z = z \end{cases}$ $u, z \in \mathbb{R}$, $v \in [0, \infty[$

Visa att koord. syst. är ort.

Beräkna bågelementet & Δ samt $\nabla\cdot\mathbb{A}$ vars fysikaliska komponenter är

$$\underbrace{\frac{uv^2}{\sqrt{u^2+v^2}}}_{A_u}, \underbrace{\frac{u^2v}{\sqrt{u^2+v^2}}}_{A_v}, \underbrace{-z}_{A_z}$$

1) Beräkna tangentbasvektorer, visa att de är ort. beräkna skalfaktor.

2) Utnyttja 1) & formelsaml.

Basvektorer.

$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = (u, v, 0) \qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (-v, u, 0) \qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = 0$

Skalfakt: $h_u = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right| = \sqrt{u^2+v^2} \qquad h_v = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{u^2+v^2} \qquad h_z = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right| = 1$

Bågelementet $ds^2 = h_u^2du^2 + h_v^2dv^2 + h_z^2dz^2 = (u^2+v^2)(du^2+dv^2) + dz^2$

$\Delta = \nabla^2$ i uvz

$$\Delta \phi = \frac{1}{u^2+v^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^2+v^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2+v^2}{1}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}\phi+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\phi\right)+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{A} = [C5] = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}A_u\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^2+v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}A_v\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2+v^2}{1}A_z\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left(v^2+u^2+(u^2+v^2)(-1)\right)=0 \qquad \mathbb{A} \text{ källfritt}$$

<u>VA6.10</u> Paraboliska koord. kan bildas ur sfäriska genom subst.

$$u^2 = r(1+\cos\theta) \qquad u,v \in [0,\infty[$$
$$v^2 = r(1-\cos\theta) \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$
$$\varphi = \varphi$$

Beräkna bågelementet, beräkna $\nabla\cdot\mathbb{F}$ där $\mathbb{F}$ är ett vektorfält med de kontravarianta komp. $\frac{1}{v}, \frac{1}{u}, \frac{\varphi}{uv}$ (s.63, 5.15)

dvs $\mathbb{F} = \frac{1}{v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}+\frac{1}{u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}+\frac{\varphi}{uv}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ $\left(=\frac{h_u}{v}\hat{u}+\frac{h_v}{u}\hat{v}+\frac{\varphi}{uv}uv\hat{\varphi}= =\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v}\hat{u}+\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u}\hat{v}+\varphi\hat{\varphi}\right)$

Sfäriska: $\mathbf{r} = (\underline{r\sin\theta}\cos\varphi, \underline{r\sin\theta}\sin\varphi, \underline{r\cos\theta})$

$$r\cos\theta = \tfrac{1}{2}(u^2-v^2)$$
$$r\sin\theta = \sqrt{r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{u^2v^2} = |uv| = uv$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = (uv\cos\varphi, uv\sin\varphi, \tfrac{1}{2}(u^2-v^2))$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= (v\cos\varphi, v\sin\varphi, u)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (u\cos\varphi, u\sin\varphi, -v)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= [r\sin\theta\hat{\varphi} = uv\hat{\varphi}] = (-uv\sin\varphi, uv\cos\varphi, 0)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}&=0\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}&=0\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2} \qquad h_\varphi = uv$$

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,uv\,F_u\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\,uv\,F_v\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left((u^2+v^2)F_\varphi\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{uv(u^2+v^2)}\left(u^2+v^2+2u^2+u^2+v^2+2v^2+u^2+v^2\right)=\frac{5}{uv}$$

$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ = tangentlinjeintegralen, arbetet som uträttas av $\mathbb{F}$ om man flyttar sig längs C.

$\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$ = ytintegral "mäter" hur mkt som strömmar genom ytan S p.g.a. fältet $\mathbb{F}$

Stokes sats

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_S (\nabla\times\mathbb{F})\, d\mathbb{S}$$ C randkurva till S

$$d\mathbb{S} = \hat{n}\cdot dxdy$$

$\hat{n}$ riktad positiv rikt. för positiv genomloppsriktn. för C.

$\nabla\times\mathbb{F} = 0$ i alla pkter $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ vägoberoende

$\Rightarrow$ går att def. potential ϕ $\quad \mathbb{F} = -\nabla\phi$

<u>ex</u> Elektromagnetiska fältet $\mathbb{E}(\mathbb{r})$ pktladdning i origo.

$$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} + \underbrace{\phi_0(\infty)}_{=0}$$

<u>VA7.1</u> En partikel påverkas av kraftfältet

$$\mathbb{F} = F_0\left[\left(\frac{\pi y}{a} + \sin\frac{\pi z}{a}\right)\hat{x} + \frac{x}{a}\hat{y} + \frac{\pi y}{a}\cos\frac{\pi z}{a}\hat{z}\right]$$

Villket arbete uträttar fältet då partikeln beskriver cirkeln $\begin{cases} x = z \\ x^2+y^2+z^2 = a^2 \end{cases}$

Arb. $= \pm\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ parameterframst. av C

C: $x^2+y^2+x^2 = a^2$ $\quad \mathbb{r} = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$ $t\in[0,2\pi]$

$2x^2+y^2 = a^2$ $\quad x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \mathbb{r} = (\cos t, \sin t)$

$$d\mathbb{r} = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}dt = a\,dt\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$$

$$\Rightarrow \text{Arb.} = \pm\int_0^{2\pi} dt\, aF_0\left[-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin^2 t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos t\right) + \frac{\cos^2 t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\cos t\sin t\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos t\right)\right] =$$

$$= \left[\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right] = \pm aF_0\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\pi\right) = \pm\frac{aF_0\pi}{\sqrt{2}}(1-\pi)$$

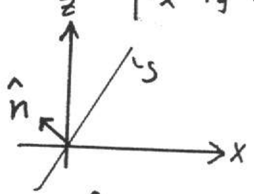
VA7.1 $\mathbb{F} = F_0\left[\left(\frac{\pi y}{a} + \sin\frac{\pi z}{a}\right)\hat{x} + \frac{x}{a}\hat{y} + \frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{a}\hat{z}\right]$

Vilket arbete uträttar $\mathbb{F}$ då en partikel beskriver cirkeln C: $\begin{matrix} x = z \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{matrix}$

Arb: $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_S (\nabla\times\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S}$

S = cirkelskivan vars rand är C

$$\nabla\times\mathbb{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{x}(0-0) + \hat{y}\Big(\underbrace{\frac{F_0\pi}{a}\cos\frac{\pi z}{a} - \frac{\pi F_0}{a}\cos\frac{\pi z}{a}}_{=0}\Big) + \hat{z}\left(\frac{F_0}{a} - \frac{\pi F_0}{a}\right)$$



$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)(\pm)$

utan normalen

$$\int_S (\nabla\times\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S} = \int_S \frac{F_0}{a}(1-\pi)\hat{z}\cdot\hat{n}\,\underset{\text{ytelement}}{ds} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{F_0}{a}(1-\pi)\underbrace{\int_S ds}_{\text{Arean}} = \pm\frac{\pi a F_0(\pi-1)}{\sqrt{2}}$$

VA7.5 Bestäm tangentlinjeint. av $\mathbb{A}$ runt skärningskurvan C mellan ytorna S_1 & S_2 där $\mathbb{A} = \left(\frac{a^3 y}{x^2+y^2} - az,\ ax - \frac{a^3 x}{x^2+y^2},\ ay + x^2\right)$

$S_1: 4x^2+4y^2+z^2 = 40a^2$

$S_2: x^2+y^2-z^2 = 0\quad, z>0$

$x^2+y^2 = 8a^2$

$\Rightarrow \mathbb{r} = (2\sqrt{2}a\cos t, 2\sqrt{2}a\sin t, 2\sqrt{2}a) \qquad t\in[0,2\pi]$

$d\mathbb{r} = 2\sqrt{2}a\,dt(-\sin t, \cos t, 0)$

$\mathbb{A}(t) = \left(\frac{2\sqrt{2}a^4\sin t}{8a^2} - 2\sqrt{2}a^2,\ 2\sqrt{2}a^2\cos t - \frac{2\sqrt{2}a^4\cos t}{8a^2},\ 2\sqrt{2}a^2\sin t + 8a^2\cos^2 t\right)$

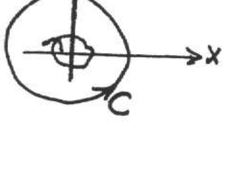
$\Rightarrow \pm\int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \ldots = \pm 6\pi a^3$

Mha Stokes sats:

$$\nabla\times\mathbb{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x}(a-0) + \hat{y}(-a-2x) + \hat{z}\left(a - \frac{a^3}{x^2+y^2} + \frac{2a^3x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{a^3}{x^2+y^2} + \frac{2a^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$= (a, -a-2x, a)$

$(x^2+y^2\neq 0)$ dvs $\mathbb{A}$ ej kont. der. på z-axeln



VA 7.7

$$\mathbb{F}(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{r}{a}\right)^3\hat{r}+\left(1+\frac{a}{r\sin\theta}\right)\hat{\varphi}$$

$S_1: x^2+y^2=4a^2$

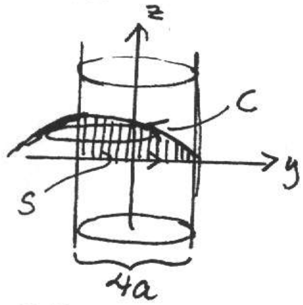
$S_2: x^2+(y+a)^2+z^2=9a^2 \quad , z>0$

Bestäm tangentlinjeint. av $\mathbb{F}$ runt skärningskurvan C (av S_1 & S_2)

Stokes sats tillämplig?

$$\nabla\times\mathbb{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{r^3}{a^3} & 0 & r\sin\theta+a\end{vmatrix}=\hat{r}\frac{1}{r^2\sin\theta}(r\cos\theta)+\frac{r\hat{\theta}}{r^2\sin\theta}(-\sin\theta)=$$

$$=\hat{r}\left(\frac{\cot\theta}{r}\right)-\frac{\hat{\theta}}{r} \quad , r\sin\theta\neq 0 \text{ (ej z-axeln)}$$



Låt $C'=C+C_{cyl.}$ & använd stokes sats på ytan S som omsluts av C'

S: normal : $\hat{\varphi} \Rightarrow d\mathbb{S}=\hat{\varphi}\,\rho\, d\alpha\, dz$ $\quad \alpha\in[0,2\pi]$

$0\leq z\leq\sqrt{8a^2-\rho^2-2a\rho\sin\alpha}$ (från S_2) $\rho=2a$

$$\therefore \int_{C'}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}=\int_S(\nabla\times\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{formelsaml.}\\ \hat{\rho}=\hat{r}\sin\theta+\\ +\hat{\theta}\cos\theta\end{matrix}\right\}=\int_S dS\left(\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\cos\theta}{r}\right)=0$$

$$\Rightarrow\int_C\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}=\int_{-cyl.}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}=\left\{\begin{matrix}\mathbb{r}=(2a\cos t,2a\sin t,0)\\ d\mathbb{r}=2a\,dt(-\sin t,\cos t,0)\\ =2a\,dt\,\hat{\rho}\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}2a\,d\rho\;\mathbb{F}\cdot\hat{\rho}=$$

$$=\int_0^{2\pi}2a\left(1+\frac{a}{r\sin\theta}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}2a\left(1+\frac{a}{2a}\right)d\rho=3a\cdot 2\pi=6a\pi$$

Ingen given riktn. på $C\Rightarrow\int_C\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}=\pm 6a\pi$

Gauss sats: S sluten, utåtriktad normal, begr. yta för område V

$\int_S\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}=\int_V(\nabla\cdot\mathbb{F})\,dV$ Om $\mathbb{F}$ kont. der. i ett öppet område som innehåller S & V

Andra satser med Stokes sats:

Stokes sats: $\underbrace{\int_C d\mathbb{r}\cdot}\mathbb{F}=\int_S(\nabla\times\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S}=\underbrace{\int_S(d\mathbb{S}\times\nabla)}\cdot\mathbb{F}$

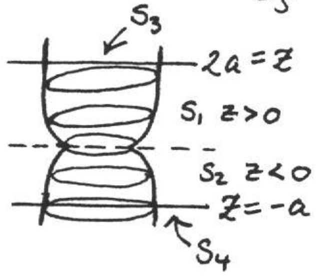
$$\int_C d\mathbb{r}\times\mathbb{F}=\int_S(d\mathbb{S}\times\nabla)\times\mathbb{F}$$

(vektorfunktional)

$$\int_C d\mathbb{r}\,\phi=\int_S(d\mathbb{S}\times\nabla)\,\phi$$

VA7.13 En volym begränsas av hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=a^2$ och planen $z=-a$ & $z=2a$

Beräkna $\int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$ över begränsningsytan om $\mathbb{A}=\frac{xz}{x^2+y^2}\hat{x}+\frac{yz}{x^2+y^2}\hat{y}$



($\hat{n}$ utåtriktad)

$\left(\mathbb{A}=\frac{\rho\cos\alpha\, z}{\rho^2}\hat{x}+\frac{\rho\sin\alpha\, z}{\rho^2}\hat{y}\right)$

Sök parametrisering av ytan:

S_3: $\hat{n}=(0,0,1)$ parametrisering ρ,α men $\int_{S_3}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=0$

S_4: $\hat{n}=(0,0,-1)$ — " — ρ,α men $\int_{S_4}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=0$

S_1: $\mathbb{r}=(x,y,\sqrt{x^2+y^2-a^2})$ $\quad a^2\leq x^2+y^2\leq 5a^2$ $\quad \hat{n}=\frac{1}{r}(x,y,-z)$

cylind. koord. $\mathbb{r}=(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha,\sqrt{\rho^2-a^2})$

$$\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha,-z)$$

S_2: $\mathbb{r}=(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha,-\sqrt{\rho^2-a^2})$ $\quad \hat{n}=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha,-z)$, $a^2\leq\rho^2\leq 2a^2$

$$\int_{S_1}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_a^{\sqrt5 a}\int_0^{2\pi}\rho\, d\rho\, d\alpha\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)z=\int_a^{\sqrt5 a}\int_0^{2\pi}\rho\, d\rho\, d\alpha\frac{\sqrt{\rho^2-a^2}}{\sqrt{2\rho^2-a^2}}=\ldots$$

Går det att tillämpa Gauss sats?

$$\int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_V(\nabla\cdot\mathbb{A})\,dV$$

$$\nabla\cdot\mathbb{A}=\frac{z}{x^2+y^2}-\frac{2x^2z}{(x^2+y^2)^2}+\frac{z}{x^2+y^2}-\frac{2y^2z}{(x^2+y^2)^2}=0$$

, $x^2+y^2\neq0$ dvs. ej sant på z-axeln

$$\int_S\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_V\nabla\cdot\mathbb{A}\,dV+\int_{S_\varepsilon}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$$

, där S_ε = cylinder runt z-axeln, radie ε, utåtriktad normal

normal $\hat{\rho}=\cos\alpha\,\hat{x}+\sin\alpha\,\hat{y}$

parametrisering: $-a\leq z\leq 2a$, $0\leq\alpha\leq 2\pi$, $\rho=\varepsilon$

$$\Rightarrow\int_{S_\varepsilon}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_{-a}^{2a}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, dz\, d\alpha\left(\frac{\varepsilon\cos^2\alpha}{\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon\sin^2\alpha}{\varepsilon^2}\right)z=2\pi\int_{-a}^{2a}dz\cdot z=2\pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-a}^{2a}=$$

$$=2\pi\left(2a^2-\frac{a^2}{2}\right)=3\pi a^2$$

$$\int_S\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int\underbrace{(\nabla\cdot\mathbb{A})}_{=0}dV+\int_{S_\varepsilon}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=3\pi a^2$$

<u>VA 7.16</u> $\quad \mathbb{B} = \frac{1}{x^2+y^2}(-6a^2x, -6a^2y, (x^2+y^2)(z+a))$

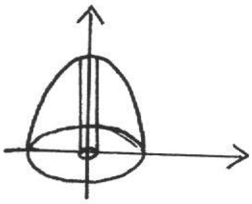
$S: x^2+4y^2+9z^2 = 36a^2 \quad , z>0 \quad$ (halvellipsoid)

Bestäm normalytint. av $\mathbb{B}$ över S, $\int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S}$

$$\nabla\cdot\mathbb{B} = \frac{-6a^2}{x^2+y^2}\left(1-\frac{2x^2}{x^2+y^2}+1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)+1 = 1 \quad , x^2+y^2\neq 0$$

Slut S så att vi får en sluten yta som inte innehåller z-axeln. Slut med en bottenplatta S_0 och en liten cylinder runt z-axeln S_ε där ε = radien $\to 0$

$$\therefore \int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \int_V (\nabla\cdot\mathbb{B})dV + \underbrace{\int_{S_0}}_{\text{normal}=\hat{z}} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} + \lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\int_{S_\varepsilon}}_{\substack{\text{utåtrikt. normal}\\ \text{normal}=\hat{\rho}}} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S}$$



$$\int_V \nabla\cdot\mathbb{B}\,dV = \int_V dV = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot 6a\cdot 3a\cdot 2a = (\text{Beta, volym för halvellipsoid}) = 24\pi a^3$$

$$\left\{\mathbb{B} = \frac{-6a^2}{\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}}\rho\hat{\rho} + (z+a)\hat{z}\right\}$$

$$\int_{S_0}\mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \int_{S_0} dS\,\mathbb{B}\cdot\hat{z} = \int_{S_0} dS\,a = a\cdot \underbrace{A}_{\substack{\text{(arean för ellipsen}\\ \text{i xy-planet } x^2+4y^2=36a^2)}} = a\pi 6a\cdot 3a = 18\pi a^3$$

$$\int_{S_\varepsilon}\mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \int_0^{2a} dz\int_0^{2\pi}\varepsilon\,d\alpha\,\mathbb{B}\cdot\hat{\rho} = \int_0^{2a}\int_0^{2\pi} dz\,\varepsilon\,d\alpha\left(\frac{-6a^2}{\varepsilon}\right) = -24\pi a^3$$

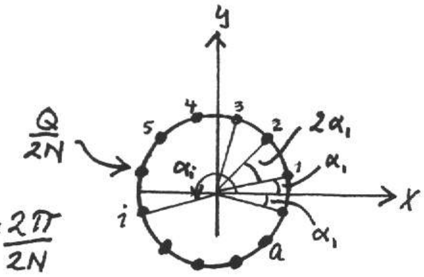
$$\therefore \int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = 24\pi a^3 + 18\pi a^3 - 24\pi a^3 = 18\pi a^3$$

Men ingen angiven riktning på normalen

$$\Rightarrow \int_{\pm S}\mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \pm 18\pi a^3$$

VA8.1

Lösning:



$2\alpha_1 = \frac{2\pi}{2N}$

tot. laddn. Q

$2N = 12$ st.

a = radien på cirkeln

Vi söker den elektriska fältstyrkan på z-axeln.

Fältet i $\mathbb{r}$ pga. en laddning i origo ges av $\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\hat{r}$

Fältet av flera laddningar ges m.h.a. superposition.

Avst. från laddning i till pkten $z\hat{z}$ ges av längden

$$|z\hat{z} - a\hat{\rho}(\alpha_i)| = |z\hat{z} - a(\cos\alpha_i\,\hat{x} + \sin\alpha_i\,\hat{y})| = (z^2+a^2)^{1/2}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\mathbb{r}$$

Totala fältet ges av $\sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2N}\frac{(z\hat{z} - a\hat{\rho}(\alpha_i))}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \sum_{i=1}^{2N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2N}\frac{(z\hat{z} - a\cos\alpha_i\hat{x} - a\sin\alpha_i\hat{y})}{(z^2+a^2)^{3/2}}$

$\alpha_{i+N} = \alpha_i + \pi \Rightarrow \sum \cos\alpha_i = 0 \quad , \sum \sin\alpha_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{2N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2N}\frac{z\hat{z}}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz\hat{z}}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$N \to \infty$ Pkt laddningarna blir en kont. fördelning av laddning runt hela cirkeln dvs. en linjeladdning med laddningstätheten $\frac{Q}{2\pi a}$  ex. en ytladdning på en cylinder där $h \ll z$

VA7.20

$\phi = (x-a)^2 + (y-3a)^2 + (z-5a)^2$

$S: 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36a^2$

Bestäm $\int_S \phi \, dS$

Med Gauss-analog sats: $\int_S F d\mathbb{S} = \int_S d\mathbb{S}\cdot\mathbb{F} = \int_V dV\,\nabla\cdot\mathbb{F}$

$$\int_S \phi\, d\mathbb{S} = \int_V dV\,\nabla\phi$$

$$\int_V dV\,\nabla\phi = \int_V dV\,2(x-a, y-3a, z-5a) = 2\int_V dV\,\mathbb{r} - 2\int_V dV(a, 3a, 5a) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{spegla} \\ \text{volymen i origo}\end{matrix}\right\} = \underbrace{-2\int_V dV\mathbb{r}}_{=0} - 2a(1,3,5)V = -2a(1,3,5)\frac{4\pi}{3}\cdot 2a\cdot 3a\cdot 6a =$$

$$= -96a^4\pi(1,3,5)$$

Ellipsoiden som innesluts av S är invariant under spegling i origo. Men $\mathbb{r} \to -\mathbb{r}$ vid spegling i origo. $\Rightarrow \int_V dV\mathbb{r} \to -\int_V dV\mathbb{r}$ vid spegling. Men världen oberoende av spegling dvs ser likadan ut (är oberoende av hur vi beskriver den) $\Rightarrow \int_V dV\mathbb{r} = 0$

Gauss lag: $\int_S \mathbb{D}\cdot d\mathbb{S} = Q$ ← Fri laddning innanför S.

$\mathbb{D}$ = det elektriska förskjutningsfältet.

När ett medium är polariserbart rättar sig inneboende dipoler (med viss sannolikhet) efter det yttre fältet ($\mathbb{E}$)
⇒ Förstärkning av det verkliga fältet.

$\mathbb{D} = \varepsilon_0 \mathbb{E} + \mathbb{P}$ (↑ polarisationsfältet) oftast är $\mathbb{P} \propto \mathbb{E} \Rightarrow \mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E}$ (↑ dielektricitetskonst.)

ex. dest. vatten $\varepsilon = 80\varepsilon_0$ ← diel. konst. för vakuum
luft ≃ vakuum $\varepsilon = \varepsilon_0$
papper $\varepsilon \simeq 3\varepsilon_0$

En diff. form av Gauss lag är $\nabla\cdot\mathbb{D} = \rho$ − laddningstätheten
$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

PLK 8.1 Bestäm $\mathbb{E}$-fältet överallt i rummet från en sfäriskt symm. laddningsfördelning bestående av en rymdladdning $\rho(r) = \rho_0$, $r < \frac{a}{2}$ och en ytladdning $\sigma = -\rho_0 \frac{a}{24}$ på sfären $r = a$

Vi vet (Gauss lag) $\int_S \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}$ = innesluten laddning $= \int_V dV \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ← laddn. förd.

(Antag luft är mediet i hela $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{D} = \varepsilon_0 \mathbb{E}$)

Problemet sfäriskt symm. + coulombkraften riktad "rakt" ⇒ Elektriska fältet också sfäriskt symm. dvs $\mathbb{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{r}$

Låt S vara en sfär med radie r (utåt riktad normal)

$$\Rightarrow d\mathbb{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial\varphi} d\theta d\varphi = r\hat{\theta} \times r\sin\theta\,\hat{\varphi}\, d\theta d\varphi = r^2 \sin\theta\, \hat{r}\, d\theta d\varphi \quad (\hat{r} \text{ utåt, ok})$$

$$\Rightarrow \int_S \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta d\varphi\, r^2 \underbrace{\sin\theta}_{(2\cdot 2\pi)} E(r) = r^2 E(r)\, 4\pi$$

$$\int_V dV \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \rho_0 \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0} & r < \frac{a}{2} \\ \rho_0 \frac{4\pi (a/2)^3}{3\varepsilon_0} = \rho_0 \frac{4\pi a^3}{24\varepsilon_0} & a/2 < r < a \\ \rho_0 \frac{4\pi (a/2)^3}{3\varepsilon_0} + \frac{-\rho_0 a \cdot 4\pi a^2}{24\varepsilon_0} = 0 & r > a \end{cases}$$

$$\therefore \mathbb{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{r} \text{ där } E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r^2}\cdot \frac{\rho_0 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} & r < a/2 \\ \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\frac{\rho_0 4\pi a^3}{24\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 a^3}{24\varepsilon_0 r^2} & \frac{a}{2} < r < a \\ \frac{1}{4\pi r^2}\cdot 0 = 0 & r > a \end{cases}$$

$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt$ $\quad$ $\mathbf{r}(t) \leftarrow$ parameterframst.

Ex. φ (i sfäriska koord.) är parametern

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi = r\sin\theta\, \hat{\varphi}\, d\varphi$$

ρ i cyl. koord.

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} d\rho = \hat{\rho}\, d\rho \leftarrow (\text{rå})$$

$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du\,dv$ ev. är normalen riktad i fel riktn.

Ex. sfär med utåt riktad normal

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\theta\, d\varphi = r\hat{\theta} \times r\sin\theta\, \hat{\varphi}\, d\theta\, d\varphi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}$$

en cirkelskiva:

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\rho\, d\alpha = \rho\, \hat{z}\, d\rho\, d\alpha$$

en cylinder:

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} d\alpha\, dz = \rho\, \hat{\rho}\, d\alpha\, dz$$

$$dV = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) \right| du\,dv\,dw = h_u h_v h_w\, du\,dv\,dw$$

Ex. sfär. $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, kub $dV = dx\,dy\,dz$

cylinder $dV = \rho\, d\rho\, d\alpha\, dz$

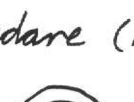
Def. av magn. induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (i pkten $\mathbf{r}$)

Låt $d\mathbf{r}$ vara en del av en infinitesimal ledare (mellan $\mathbf{r}$ & $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$) med strömmen i. Om delen påverkas av en kraft $d\mathbf{F}$ är ledaren belägen i ett magnetfält

$d\mathbf{F} = i\, d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ dvs kraften $\perp$ ledaren, magn. fältet

Om $d\mathbf{r} \perp \mathbf{B} \Rightarrow d\mathbf{r}, \mathbf{B}, d\mathbf{F}$ bildar högersystem jmfr. FIB-regeln

Biot-Savarts lag.

magnetfältet kring en oändligt lång ledare (riktad i $\hat{z}$-led) med strömmen i ges av $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \hat{\alpha}$  μ_0-permeabilitet.

Magn. fältstyrka

$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \leftarrow$ magnetisering hos fältet $\quad$ för icke-ferromagn. material ($\mathbf{M} \propto \mathbf{B}$)

$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ $\quad$ $\mu = \mu_r \mu_0 \simeq 1\mu_0$

Amperes lag: $\oint_{\underset{\text{sluten kurva}}{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = i = \left[\begin{matrix}\text{Summan av} \\ \text{innesluten ström}\end{matrix} \right] = \int_{\underset{\text{innesluten yta av } C}{S}} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

$\mathbf{J}$: strömtäthet $[A/m^2]$

VA8.2 En oändligt lång rak ledare har cirkulärt tvärsnitt med radien a och leder en likström med strömstyrkan i. Använd Amperes lag för att härleda magnetfältet i och kring ledaren.

Antag strömmen jämnt fördelad, antag icke ferromagn.

$\Rightarrow \mu \simeq \mu_0 \Rightarrow \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{H}$

$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{J} = \mu_0 \frac{i}{\pi a^2} \hat{z}$

$\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J}$

Problemet har cylindrisk symmetri $\Rightarrow$ [Biot-Savarts] $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{B} = \mathbb{B}(\rho)\hat{\alpha} \Rightarrow$ [Amperes lag] $\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\mathbb{B}}{\mu_0} \cdot \underbrace{\rho \hat{\alpha}\, d\alpha}_{\text{dr för cirkel med radie } \rho} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \rho' d\alpha d\rho' \mathbb{J}\cdot\hat{z} =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} \cdot \pi \rho i & \rho < a \\ i & \rho > a \end{cases} = 2\pi B(\rho)\rho$$

$$\therefore B(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi a^2} & \rho < a \\ \frac{i \mu_0}{2\pi \rho} & \rho > a \end{cases}$$

$\mathbb{B}(\mathbb{r}) = B(\rho)\hat{\alpha}$

VA8.4 För ett tidsberoende magnetfält gäller Faradays lag $\left\{\begin{array}{l}\text{Inducerad ström} \\ \text{pga förändring} \\ \text{av magn. fält}\end{array}\right.$ som i differentialform lyder $\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbb{E} = 0$

för $\mathbb{B}$ gäller $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$

Amperes lag $\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{J}$ och strömtätheten $\mathbb{J}$ uppfyller Ohms lag $\mathbb{J} = \sigma \mathbb{E}$ σ = resistiviteten $(\simeq \frac{1}{R})$

Kombinera till en fältekv. för $\mathbb{B}$

$$\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{\mathbb{J}}{\sigma}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) \frac{1}{\mu_0 \sigma} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = -\nabla^2 \mathbb{B} + \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \cdot \mathbb{B})}_{=0} = -\nabla^2 \mathbb{B} \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbb{B} \cdot \frac{1}{\mu_0 \sigma} =$$

$$= \nabla^2 \mathbb{B} \frac{1}{D}$$

D ← Differentialkonst.

VA 7.8 $\quad \mathbb{B} = B_0\left(\frac{x}{a}\right)^3\hat{z} \qquad C: \mathbb{r} = (a\cos\alpha, a\sin\alpha, b\alpha)\ ,\ \alpha\in[0, 2n\pi]$

Beräkna $\mathbb{F} = i\int_C d\mathbb{r}\times\mathbb{B}$

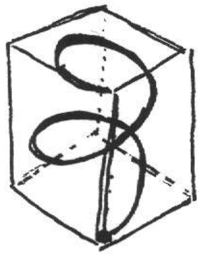
$d\mathbb{r} = (-a\sin\alpha, a\cos\alpha, b)d\alpha$

$d\mathbb{r}\times\mathbb{B} = d\alpha(-a\sin\alpha\hat{x} + a\cos\alpha\hat{y} + b\hat{z})\times\hat{z}\left(\frac{x}{a}\right)^3 B_0 = \Big(d\alpha\left(\frac{x}{a}\right)^3 a\sin\alpha\hat{y} +$

$+ d\alpha\left(\frac{x}{a}\right)^3 a\cos\alpha\hat{x}\Big)B_0 = B_0 d\alpha\, a(\cos^3\alpha\sin\alpha\hat{y} + \cos^4\alpha\hat{x})$

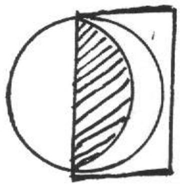
$\Rightarrow \mathbb{F} = i\int_C d\mathbb{r}\times\mathbb{B} = iB_0 a\int_0^{2n\pi}(\cos^3\alpha\sin\alpha\,\hat{y} + \cos^4\alpha\,\hat{x})d\alpha =$

$= iB_0 a\left(\hat{y}\int_0^{2n\pi}\cos^3\alpha\sin\alpha\, d\alpha + \hat{x}\int_0^{2n\pi}\cos^4\alpha\, d\alpha\right) = B_0 a\frac{3\pi n}{4}\hat{x}$



VA 7.11 $\quad \phi = a^2 + x^2 + 4xy + 4y^2$

$$C: \begin{cases} S_1: x^2 + 4y^2 + z^2 = 4a^2\ ,\quad y<0 \\ S_2: x + 2y = 0 \end{cases}$$



Bestäm $\int_C \phi\, d\mathbb{r}$

$S_1 + S_2 \Rightarrow 8y^2 + z^2 = 4a^2$

$\mathbb{r} = (a\sqrt{2}\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}a\sin t, 2a\cos t) \qquad t\in[0,\pi]$

$\left(\ y = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t \quad z = 2a\sin t \quad t\in[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\ \right)$

$\Rightarrow d\mathbb{r} = a\,dt(\sqrt{2}\cos t, \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos t, -2\sin t)$

$\Rightarrow \phi = a^2 + 2a^2\sin^2 t - 4a^2\sin^2 t + 2a^2\sin^2 t = a^2$

$\Rightarrow \int_C \phi\, d\mathbb{r} = a^3\int_0^{\pi} dt(\sqrt{2}\cos t\hat{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\hat{y} - 2\sin t\hat{z}) = -4a^3\hat{z}$

C godt. orienterad $\Rightarrow \int_C \phi\, d\mathbb{r} = \pm 4a^3\hat{z}$

VA9.2 $\mathbb{F} = \begin{cases} \frac{a}{\rho}\hat{\rho} + \frac{\rho}{a}\hat{\alpha} + \frac{z}{a}\hat{z} & \rho < a \\ \frac{a}{\rho}\hat{\alpha} + \frac{z}{\rho}\hat{z} & \rho > a \end{cases}$

Bestäm käll- & virvelfördeln. för fältet. $\mathbb{F}$ ej kont. der. för $\rho=0, \rho=a$

$\mathbb{F}$ begr. utom för $\rho=0$ (z-axeln

Vilka fördelningar bygger upp fältet?

3D ① Rymdfördelningar (kan förekomma där fältet kont. deriverbart)

2D ② Ytfördelningar (kan förekomma där fältet ej kont. (der.))

1D ③ Linjefördelningar (kan förekomma där fältet linj. sing.)

0D ④ Pktkällor (kan förekomma där fältet kvadr. sing.)

① Kan förekomma $0<\rho<a$, $\rho>a$

a) Rymdkälla? (rymdförd. ej $=\rho$)

$\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \int_V \rho_0 \, dV \Rightarrow \nabla\cdot\mathbb{F} = \rho_0$ dvs om $\nabla\cdot\mathbb{F} \neq 0$ i pkter kont. der. $\Rightarrow$ rymdkälla.

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \begin{cases} 0+0+\frac{1}{a} & 0<\rho<a \\ 0+0+\frac{1}{\rho} & \rho>a \end{cases}$$

∴ Fältet $\mathbb{F}$ beror på en rymdkälla i cylindern $0<\rho<a$ med styrkan $\frac{1}{a}$ och för $\rho>a$ med styrkan $\frac{1}{\rho}$

b) Rymdkurvor?

Det finns en rymdvirvelfördelning i rummet om $\nabla\times\mathbb{F}\neq 0$ där $\mathbb{F}$ kont. der.

$$\nabla\times\mathbb{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a/\rho & \rho^2/a & z/a \end{vmatrix} = \hat{z}\frac{2\rho}{\rho a} = \hat{z}\frac{2}{a}, \quad \rho<a$$

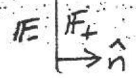
$$\nabla\times\mathbb{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & a & z/\rho \end{vmatrix} = \hat{\alpha}\frac{z}{\rho^2} \quad \rho>a$$

∴ En rymdvirveltäthet för $0<\rho<a$ med styrka (och riktning) $\frac{2}{a}\hat{z}$ och för $\rho>a$ $\hat{\alpha}\frac{z}{\rho^2}$

② Kan förekomma för $\varrho = a$

Sats: Om $\hat{n}$ normal till ytan säges ytkällans styrka av $\hat{n}\cdot(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-)$ och ytvirveltätheten ges av $\hat{n}\times(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{F}(\text{ytan} + \varepsilon\hat{n}) = \mathbb{F}_+$$



här: $\hat{n} = \hat{\varrho}$

$$\mathbb{F}_+ = \hat{\alpha} + \frac{z}{a}\hat{z}$$

$$\mathbb{F}_- = \hat{\varrho} + \hat{\alpha} + z\hat{z}$$

$\Rightarrow \hat{\varrho}\cdot(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = -1$ (ytkälla med styrka -1)

$\hat{\varrho}\times(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = 0$ ingen ytvirvel

③ Linjeförd. kan förekomma för $\varrho = 0$

a) linjekälla:

lägg en testcylinder, S_ε, kring en del av z-axeln (från z_1 till z_2)

Cylinder: S_ε – cylinderns mantelyta med radie ε

S_1: bottenplatta $\qquad S_2$: topplatta

Betrakta $\varepsilon \to 0$

$$\therefore \int_{S_\varepsilon + S_1 + S_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_{z_1}^{z_2} \underset{\uparrow \atop \varepsilon}{\varrho}\, d\alpha\, dz\, \frac{a}{\underset{\nwarrow \varepsilon}{\varrho}}}_{S_\varepsilon} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \varrho\, d\alpha\, d\varrho \left(\frac{-z_1}{a}\right)}_{S_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \varrho\, d\alpha\, d\varrho \left(\frac{z_2}{a}\right)}_{S_2} =$$

$$= 2\pi a(z_2 - z_1) + \frac{(z_2 - z_1)^2 \varepsilon^2}{a \quad 2} \overset{\nearrow 0}{\longrightarrow} 2\pi a(z_2 - z_1)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \underbrace{2\pi a}_{\text{linjetäthet.}}\, dz \Rightarrow \text{linjekälla längs } z\text{-axeln med styrka } 2\pi a$$

b) linjevirvel (virveltråd)

lägg en testcirkel C_ε runt z-axeln ($z = z_0$)

C_ε: cirkel med radie ε $\quad \mathbb{r} = (\varepsilon\cos\alpha, \varepsilon\sin\alpha, z_0)$

$\Rightarrow d\mathbb{r} = \varepsilon\, d\alpha(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) = \varepsilon\, d\alpha\, \hat{\alpha}$

$$\therefore \int_{C_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\alpha \frac{\varepsilon}{a} = \frac{\varepsilon^2}{a} 2\pi \to 0 \text{ då } \varepsilon \to 0$$

$\therefore$ ingen virveltråd (annars: linjevirveltätheten $= \int_{C_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$)

④ Pktkällor: inga pktkällor för $\mathbb{F}$ ty $\mathbb{F}$ ej kvadr. sing. någonstans. Man undersöker pktkällor genom en testsfär S_ε runt pkten (radie ε)

$\therefore$ Pktkällans styrka $= \int_{S_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \mathbb{F}\cdot\hat{r}$

$\therefore$ Punktkälla med ändlig styrka om.m. $\mathbb{F}$ kvadr. sing. i $\hat{r}$-riktn.

<u>VA9.8</u>

$$\mathbb{F} = \begin{cases} \dfrac{F_0}{ar^2}(a^3 - r^3)\hat{r} & r<a \\ \dfrac{F_0 a^3}{r^3}|\cos\theta|(2\hat{r} + \tan\theta\,\hat{\theta}) & r>a \end{cases}$$

Bestäm käll- & virvelförd. för $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F}$ ej kont. der. för $r=a$ & ($\theta = \frac{\pi}{2}$ då $r>a$)

$\mathbb{F}$ kvadratiskt sing. i origo.

① Rymdfördelningar

a) Rymdkällor:

$r<a$: $\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{-3F_0 r^2}{a}\right) = -\frac{3F_0}{a}$

$r>a, \theta<\frac{\pi}{2}$ $\nabla\cdot\mathbb{F} = \cos\theta \frac{2a^3}{r^2}F_0\left(-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{F_0 a^3}{r^4 \sin\theta} 2\sin\theta\cos\theta = 0$

$r>a, \theta>\pi/2$ $\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{2a^3}{r^4}F_0\cos\theta - \frac{2a^3}{r^4}F_0\cos\theta = 0$

$\therefore$ rymdkälla i sfären $0<r<a$ med täthet $-\frac{3F_0}{a}$

b) Rymdvirvlar:

$r<a$: $\nabla\times\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$r>a, \theta<\frac{\pi}{2}$: $\nabla\times\mathbb{F} = \ldots = 0$

$r>a, \theta>\frac{\pi}{2}$: $\nabla\times\mathbb{F} = 0$

② Ytfördelningar: $r=a$

$r>a, \theta = \frac{\pi}{2}$

<u>$r=a$:</u> normal $\hat{n} = \hat{r}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{F}_- = 0$

$\mathbb{F}_+ = F_0|\cos\theta|(2\hat{r} + \tan\theta\,\hat{\theta})$

ytkälla? $\hat{r}\cdot(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = 2F_0|\cos\theta|$

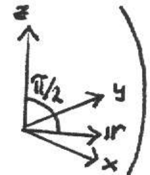
$\therefore$ ytkälla med styrkan $2F_0|\cos\theta|$

ytvirvel: $\hat{r}\times(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = F_0|\cos\theta|\tan\theta\,\hat{\varphi}$

$\therefore$ ytvirvel med täthet $F_0|\cos\theta|\tan\theta\,\hat{\varphi}$
(styrka)

$\theta=\frac{\pi}{2}$, $r>a$ normal: $\hat{z}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{F}_+ = \frac{F_0 a^3}{r^3}\hat{\theta}(\frac{\pi}{2}) = \frac{F_0 a^3}{r^3}\hat{z}$

$$\left(\hat{\theta} = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \theta}\frac{1}{r} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \Rightarrow \hat{\theta}(\tfrac{\pi}{2}) = -\hat{z}\right)$$



$$\mathbb{F}_- = \frac{F_0 a^3}{r^3}\hat{z}$$

$$\hat{z}\cdot(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = -\frac{2F_0 a^3}{r^3}$$

$$\hat{z}\times(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = 0$$

$\therefore$ Ytkälla på $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r>a$, ingen ytvirvel

③ Linjefördelningar

Inga linj. sing. $\Rightarrow$ inga linjeförd.

④ Pktkällor $r=0$ kandidat

Lägg en testsfär kring origo (S_ε)

$$\Rightarrow \int_{S_\varepsilon}\mathbb{F}\cdot d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,\frac{F_0}{a\varepsilon^2}(a^3-\varepsilon^3) = \frac{4\pi F_0}{a}(a^3-\varepsilon^3) \to 4\pi a^2 F_0$$

$\therefore$ pktkälla i origo med styrkan $4\pi a^2 F_0$

VA9.4 $\mathbb{F} = \begin{cases} \dfrac{aF_0}{x^2+y^2}(x-y, x+y, 0) & x^2+y^2<a^2 \\ \dfrac{aF_0}{x^2+y^2}(-y, x, 0) & x^2+y^2>a^2 \end{cases}$

Bestäm käll- och virvelfördeln.

$$\mathbb{F} = \frac{aF_0}{\rho^2}(\rho\cos\alpha - \rho\sin\alpha, \rho\cos\alpha + \rho\sin\alpha, 0) = \frac{aF_0}{\rho}(\hat{\rho}+\hat{\alpha}), \quad \rho^2<a^2$$

$$\mathbb{F} = \frac{aF_0}{\rho}\hat{\alpha} \qquad \rho>a$$

$$\mathbb{F} = \begin{cases} \dfrac{aF_0}{r^2\sin^2\theta} r\sin\theta(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta} + \hat{\varphi}) & r\sin\theta<a \\ \dfrac{aF_0}{r\sin\theta}\hat{\varphi} & r\sin\theta>a \end{cases}$$

$\mathbb{F}$ kont. der. utom för $\rho=a$, $\rho=0$

1) Rymdfördelningar:

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_\alpha) = 0+0=0 \qquad \rho<a$$

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}(F_\alpha) = 0$$

$\therefore$ inga rymdkällor

$$\nabla\times\mathbb{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{aF_0}{\rho} & aF_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \rho<a$$

$$\nabla\times\mathbb{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & aF_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rho>a$$

$\therefore$ inga rymdvirvlar

2) Ytfördelningar: kan förekomma på $\rho=a$

$\rho=a$: normal $\hat{\rho}$ $\Rightarrow \mathbb{F}_+ = F_0\hat{\alpha}$

$\mathbb{F}_- = F_0(\hat{\rho}+\hat{\alpha})$

$\Rightarrow \hat{\rho}\cdot(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = -F_0$

$\hat{\rho}\times(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = 0$

$\therefore$ Ytkälla med styrka $-F_0$ på $\rho=a$

$\therefore$ Ingen ytvirvel

3) Linjefördelningar: kan förekomma på $\rho=0$ (z-axeln)

Lägg en testcylinder $S_\varepsilon+S_1+S_2$ runt en bit av z-axeln

$$\Rightarrow \int_{S_\varepsilon+S_1+S_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S} = \underbrace{\int_0^{2\pi}\varepsilon\, d\alpha \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{aF_0}{\varepsilon}}_{S_\varepsilon} + 0 + 0 = 2\pi a F_0 (z_2 - z_1)$$

$\therefore$ Linjekälla på z-axeln med styrkan $2\pi a F_0$

Virveltråd?

Lägg en testcirkel C_ε runt z-axeln.

$$\int_{C_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\alpha\, \hat{\alpha}\cdot \frac{aF_0}{\varepsilon}(\hat{\rho}+\hat{\alpha}) = 2\pi a F_0$$

$\therefore$ Virveltråd längs z-axeln med styrka $2\pi a F_0$

4) Pktkällor: inga! (fältet ej kvadr. sing. någonstans)

$\therefore$ ytkälla på $\rho = a$ $\quad -F_0$

linjekälla på z-axeln $\quad 2\pi a F_0$

virveltråd på z-axeln $\quad 2\pi a F_0$

POTENTIALER:

Betrakta fältet $\mathbb{F}$

① $\nabla\cdot\mathbb{F}=0 \Rightarrow \mathbb{F}$ källfritt i ett enkelt sammanhängande område

$\Rightarrow \exists$ Vektorpot. $\mathbb{A}$ s.a. $\underline{\mathbb{F}=\nabla\times\mathbb{A}}$

$\mathbb{A}$ bestämt så när som på en godt. gradient av en fkn.

dvs $\mathbb{A}$ & $\boxed{\mathbb{A}'=\mathbb{A}+\nabla f}$ är ekvivalenta m.a.p. den mätbara verkligheten.

gauge transf.

② $\nabla\times\mathbb{F}=0 \Rightarrow \mathbb{F}$ virvelfritt i ett område ($\mathbb{R}^3$)

$\Rightarrow \exists$ skalär pot. $\varnothing$ s.a. $\underline{\mathbb{F}=-\nabla\varnothing}$

$\varnothing$ bestämt så när som på en godt. konst. dvs. verkligheten påverkas inte av valet av ref. pot.

$\mathbb{F}$ vägoberoende dvs $\int_{\mathbb{r}_1}^{\mathbb{r}_2} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = -(\varnothing(\mathbb{r}_2)-\varnothing(\mathbb{r}_1))$

③ Det går (alltid) att beskriva $\mathbb{F}$ med två potentialer, en skalär $\varnothing$ & en vektor pot. $\mathbb{A}$ s.a. $\mathbb{F}=-\nabla\varnothing+\nabla\times\mathbb{A}$

ex. elektromagn. (tidsberoende Maxwells ekv.)
Det går här att beskriva $\mathbb{E}$ & $\mathbb{B}$ med en skalär pot. & en vektor pot. i tidsberoende fallet

$$\underbrace{\nabla \times \mathbb{E} = 0}_{\text{i elektrostatiken}} \rightarrow \underbrace{\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}}_{\text{induktion}} \qquad \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$$

VA10.2 Ett vektorfält $\mathbb{F} = \mathbb{a}(\mathbb{r}\cdot\mathbb{b}) + \mathbb{b}(\mathbb{r}\cdot\mathbb{a}) + \mathbb{r}(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})$ är bestämt av de konstanta vektorerna $\mathbb{a}$ & $\mathbb{b}$ samt ortsvektorn $\mathbb{r}$. Bestäm lösningen ϕ till $\mathbb{F} = -\nabla\phi$, dvs pot till $\mathbb{F}$.

Lösning:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = a_x(b_x x + b_y y + b_z z) + b_x(a_x x + a_y y + a_z z) + x(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = a_y(b_x x + b_y y + b_z z) + b_y(a_x x + a_y y + a_z z) + y(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = a_z(b_x x + b_y y + b_z z) + b_z(a_x x + a_y y + a_z z) + z(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})$$

$$\phi = -(2a_x b_x + \mathbb{a}\cdot\mathbb{b})\frac{x^2}{2} - (a_x b_y + a_y b_x)xy - (a_x b_z + a_z b_x)xz + f(y,z)$$

$$\phi = \ldots$$

$$\phi = \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \phi = -(\mathbb{a}\cdot\mathbb{r})(\mathbb{b}\cdot\mathbb{r}) - \frac{1}{2}r^2(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})$$

VA10.9 Härled en vektorpot. $\mathbb{A}$ till fältet $\mathbb{H} = \frac{\hat{\alpha}}{\rho}$ under antagandet
① $\mathbb{A} = A_\rho \hat{\rho}$
② $\mathbb{A} = A_z \hat{z}$

$\nabla\cdot\mathbb{H} = 0 \Rightarrow \exists$ vektorpot.

$$① \quad \mathbb{H} = \frac{\hat{\alpha}}{\rho} = \nabla\times\mathbb{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left(\rho\hat{\alpha}\frac{\partial}{\partial z}A_\rho + \hat{z}\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}A_\rho\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z}A_\rho = \frac{1}{\rho} \Rightarrow A_\rho = \frac{z}{\rho} + f(\alpha,\rho) \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}A_\rho = 0 \Rightarrow A_\rho = g(\rho,z) \end{array}\right\} \Rightarrow A_\rho = \frac{z}{\rho} + f(\rho), \text{ där } f(\rho) \text{ godt. fkn.}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) = (\nabla\times\nabla)\cdot\mathbb{A} = 0$$

$$\nabla\times(-\nabla\phi) = -(\nabla\times\nabla)\phi = 0$$

② $\nabla\times A = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & A_z\end{vmatrix} = \frac{\hat{\rho}}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} + (-\hat{\alpha})\frac{\partial}{\partial\rho}A_z \overset{!}{=} H = \frac{\hat{\alpha}}{\rho}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} = 0 \Rightarrow A_z = g(\rho, z)\\ -\frac{\partial A_z}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow A_z = -\ln\rho + h(\alpha, z)\end{array}\right\} \Rightarrow A_z = -\ln\rho + q(z)$$

Invarians av H : det fysikaliska fältet

$\Rightarrow A_\rho\hat{\rho} = A_z\hat{z} + \nabla S(\rho,\alpha,z)$

↑ S godt. fkn. (som vi ej vet)

<u>VA10.11</u> Ett vektorfält F är definierat genom sin potential

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases}\frac{a}{r}(1+\cos\theta) & r<a\\ \frac{a^2}{r^2}\cos\theta & r>a\end{cases}$$

Bestäm fältets käll- & dipolfördelning

$\exists$ pot. $\phi \Rightarrow F$ virvelfritt i ett e.s. område dvs här är F virvelfritt utom möjligen på $r=a$

ϕ två ggr kont der. utom i origo och $r=a$.

① Rymdkällor

$0<r<a$: $\nabla\cdot F = -\nabla^2\phi = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0 + \frac{2a}{r^3}\cos\theta$

$r>a$: $\nabla\cdot F = -\nabla^2\phi = -\frac{a^2}{r^4}2\cos\theta + \frac{a^2}{r^4}2\cos\theta = 0$

$\therefore$ Rymdkälla i sfären $r<a$ med styrkan $\frac{2a}{r^3}\cos\theta$

② Ytfördelningar: , $r=a$ enda kandidaten

ytkälla: $\hat{r}\cdot(F_+ - F_-) = \hat{r}\cdot(\nabla\phi_- - \nabla\phi_+) = \frac{\partial\phi_-}{\partial r} - \frac{\partial\phi_+}{\partial r} = -\frac{1}{a}(1+\cos\theta) + \frac{2}{a}\cos\theta =$
$= \left(\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \ldots\right) = \frac{1}{a}(\cos\theta - 1)$

Ytdipol ges av diskont. i potentialen vid ytan

ytdipoltätheten $\mu(r) = \phi_+ - \phi_-$ här på sfären $r=a$

$\mu = \phi_+ - \phi_- = \cos\theta - (1+\cos\theta) = -1$

③ Linjekällor: inga ty ϕ & $\nabla\phi$ är begr. utom i origo.

④ Pktkällor möjligtvis i origo
Lägg en testsfär kring origo

$$\int_S (-\nabla\phi)\cdot d\mathbb{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cdot \hat{r}(-\nabla\phi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \frac{a}{\varepsilon^2}(1+\cos\theta) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \cos\theta \text{ udda} \\ \text{kring } \theta = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} = 4\pi a$$

∴ Pktkälla i origo med styrka $4\pi a$

<u>VA10.16</u> Ett fält är givet genom sin vektorpot.

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}) = F_0\left(a\left(\frac{z}{\rho} + \frac{z}{a}\sin\alpha\right)\hat{\rho} + z\cos\alpha\,\hat{\alpha} + \frac{\rho^2}{a}\hat{z}\right)$$

Bestäm fältets käll- & virvelförd.

$\exists$ vekt. pot. $\Rightarrow$ fältet inte har några källor ty $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) = 0$

$\mathbb{A}$ två ggr kont. der. utom på z-axeln.

① Rymdvirvel $\nabla\times\mathbb{F} = \nabla\times(\nabla\times\mathbb{A})$

$$\nabla\times\mathbb{A} = \frac{F_0}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a\left(\frac{z}{\rho} + \frac{z}{a}\sin\alpha\right) & \rho z\cos\alpha & \frac{\rho^2}{a} \end{vmatrix} = -F_0\cos\alpha\,\hat{\rho} + F_0\hat{\alpha}\left(\frac{a}{\rho} + \sin\alpha - \frac{2\rho}{a}\right) + \hat{z}F_0\underbrace{\left(\frac{z}{\rho}\cos\alpha - \frac{z}{\rho}\cos\alpha\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\mathbb{A} = \frac{F_0}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (-\cos\alpha) & \rho\left(\frac{a}{\rho} + \sin\alpha - \frac{2\rho}{a}\right) & 0 \end{vmatrix} = \hat{\rho}\cdot 0 + \hat{\alpha}\cdot 0 + \frac{\hat{z}F_0}{\rho}\left(\sin\alpha - \frac{4\rho}{a} - \sin\alpha\right) =$$

$$= -\frac{4F_0}{a}\hat{z}$$

② Ytvirvel ingen

③ Linjevirvel (virveltråd) Lägg en testcirkel runt z-axeln (C_ε)

$$\Rightarrow \int_{C_\varepsilon} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\varepsilon\, d\alpha\,\hat{\alpha}}_{d\mathbb{r}}\cdot\mathbb{F}$$

$$\mathbb{F} = \nabla\times\mathbb{A} = -\cos\alpha\,\hat{\rho}F_0 + \hat{\alpha}\left(\boxed{\frac{a}{\rho}} + \sin\alpha - \frac{2\rho}{a}\right)F_0 \Rightarrow F_0\int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\alpha\,\frac{a}{\varepsilon} + O(\varepsilon) =$$

$$= 2\pi a F_0 + O(\varepsilon) \to 2\pi a F_0 \text{ då } \varepsilon \to 0$$

∴ Virveltråd längs z-axeln med styrkan $2\pi a F_0$

VA7.23 $\mathbb{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(ax+ay,\ ay-ax,\ \frac{x^2y}{a}+\frac{y^3}{a}\right)$

$S: x^2+y^2+4z^2=4a^2$

Beräkna $\int_S d\mathbb{S}\times\mathbb{F}$

$\left(\begin{array}{l}\hat{\rho}=(\cos\alpha,\sin\alpha,0)\\ \hat{\alpha}=(-\sin\alpha,\cos\alpha,0)\end{array}\right)$

$\mathbb{F}=\frac{1}{\rho^2}\left(a\rho\hat{\rho}-a\rho\hat{\alpha}+\frac{\rho^3\sin\alpha}{a}\hat{z}\right)$

Med Gauss-analog sats $\int_V dV\,\nabla\times\mathbb{F}=\int_{S} d\mathbb{S}\times\mathbb{F}$ (S sluten)

$$\nabla\times\mathbb{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{a}{\rho} & -a & \frac{\rho}{a}\sin\alpha\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\hat{\rho}\left(\frac{\rho}{a}\cos\alpha-0\right)+\hat{\alpha}\left(-\frac{1}{a}\sin\alpha\right)+\hat{z}\cdot 0=$$

$(\rho\neq 0)$

$$=\frac{1}{a}(\hat{x}\cos^2\alpha+\hat{y}\cos\alpha\sin\alpha+\hat{x}\sin^2\alpha-\hat{y}\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{\hat{x}}{a}$$

$$\int_{S-S_\varepsilon} d\mathbb{S}\times\mathbb{F}=\int_V dV\,\nabla\times\mathbb{F}=\frac{\hat{x}}{a}\int_V dV=\frac{\hat{x}}{a}\frac{4\pi}{3}\cdot 2a\cdot 2a\cdot a=\frac{16a^2\pi}{3}\hat{x}$$

S_ε: cylinder kring z-axeln

$$-a\le z\le a:\ \int_{S_\varepsilon} d\mathbb{S}\times\mathbb{F}=\int_{-a}^{a}\int_0^{2\pi}\varepsilon\, d\alpha\, dz\left(\frac{-a}{\varepsilon}\hat{z}-\frac{\varepsilon}{a}\sin\alpha\,\hat{\alpha}\right)\to -4\pi a^2\hat{z}$$

$d\mathbb{S} = -\hat{\rho}\,dS$

$$\int_S d\mathbb{S}\times\mathbb{F}=\frac{16a^2\pi}{3}\hat{x}-4\pi a^2\hat{z}$$

VA11.1 En metallkula, radie a med laddning Q i origo. Inga andra laddn. i sikte $\Rightarrow$ $\mathbb{E}$-fältet radiellt runt kulan, beror endast av avståndet från origo/kulan. Använd Gauss lag för att bestämma $\mathbb{E}$-fältet & beräkna dess totala energi.

Gauss lag: $\int_S \varepsilon_0\mathbb{E}\cdot d\mathbb{S}$ = innesluten laddn.

Ansätt $\mathbb{E}(\mathbf{r})=E(r)\hat{r}\Rightarrow\int_{S_r}\mathbb{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbb{S}=E(r)\int_{S_r}dS=E(r)\cdot 4\pi r^2$

Q är troligen en ytladdning $\Rightarrow \varepsilon_0 E(r)4\pi r^2=0 \quad r<a$

$\varepsilon_0 E(r)4\pi r^2=Q \quad r>a \Rightarrow E(r)=\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$

Totala energin:

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbb{E}(\mathbf{r})|^2dV=\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,dV\right)=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2r^4}=\frac{Q^2}{8\pi a\varepsilon_0}$$

$\rho(\mathbf{r})$: laddn. förd. $\phi(\mathbf{r})$: pot. till $\mathbf{E}$

VAII.2 $\quad \Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2) & r<a \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & r>a \end{cases}$

är pot. från en konstant laddningsförd. ($=\rho_0$) som är sfäriskt symm. med radien a. Ställ upp motsvarande vektorfält i det elektrostatiska fältet. Jmfr. energin från

① $W = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})\,dV$ & ② $W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV$

Jmfr. med 11.1 (förra prob.) & diskutera vad som händer i de två fallen när $a \to 0$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & r<a \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r>a \end{cases}$$

① $$W = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\; \rho_0 \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2) = \frac{\rho_0^2\pi}{3\varepsilon_0}\left[a^5 - \frac{a^5}{5}\right] = \frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\varepsilon_0}$$

② $$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, \frac{\rho_0^2 r^2}{3^2\varepsilon_0^2} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, \frac{\rho_0^2 a^6}{9\varepsilon_0^2 r^4} =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0^2}{18\varepsilon_0}\left[\frac{a^5}{5} + a^5\right] = \underbrace{\frac{4\pi\rho_0^2 a^5}{15\varepsilon_0}}_{\rho_0 = \text{konst.}} \to 0 \text{ då } a \to 0$$

11.1: $W = \underbrace{\dfrac{Q^2}{8\pi a\varepsilon_0}}_{\text{pkt laddning } Q = \text{konst.}} \to \infty$, då $a \to 0$

$$Q = \frac{4\pi a^3}{3}\rho_0$$

Här: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad r>a$

11.1: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r} \quad r>a$

$Q = \dfrac{4\pi\rho_0 a^2}{3} \Rightarrow$ $\mathbf{E}$-fälten samma i de två fallen

VA 11.7 Det elektrostatiska fältet $\mathbb{E}$ är givet av sin potential ϕ som i sfäriska koord. har formen

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \phi_0 \frac{r}{a} \cos\theta & r<a \\ \phi_0 \frac{a^2}{r^2} \cos\theta & r>a \end{cases}$$

Bestäm dess käll- & dipolfördeln. samt beräkna fältets energi.

① Rymdkällor:

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = -\nabla^2\phi = \begin{cases} -\frac{2}{r}\phi_0\frac{1}{a}\cos\theta + \frac{2\phi_0}{ra}\cos\theta = 0 & r<a \\ -\frac{2a^2}{r^4}\phi_0\cos\theta + \frac{2a^2}{r^4}\phi_0\cos\theta = 0 & r>a \end{cases}$$

∴ Inga rymdkällor.

② Ytfördelningar: möjligt på $r=a$

a) ytdipol $\phi_+ - \phi_- = \phi_0\cos\theta - \phi_0\cos\theta = 0 \Rightarrow$ Ingen ytdipol.

b) ytkälla: normal $\hat{r}$

ytkälltäthet: $\hat{r}\varepsilon_0(\mathbb{E}_+ - \mathbb{E}_-) = \varepsilon_0\hat{r}\cdot(\nabla\phi_- - \nabla\phi_+) = \varepsilon_0\phi_0\cos\theta\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\right) =$
$= \frac{3\varepsilon_0\phi_0}{a}\cos\theta$

③ Linjekälla: ingen (ej sing. i pot. der.)

④ Pktkälla: inga

Fältets energi:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi|^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \cdot \frac{\phi_0^2}{a^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) +$$

$$+ \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \frac{\phi_0^2 a^4}{r^6}(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{\phi_0^2\varepsilon_0 2\pi a}{3} + \frac{\phi_0^2 a\, 2\pi\varepsilon_0 2}{3} =$$

$$= 2\pi a\varepsilon_0\phi_0^2$$

VA11.3 I området mellan två koncentriska sfärer med radie a resp. b $(a<b)$ finns en konstant rymdkällsfördelning ρ_0. Beräkna i hela rymden den härigenom uppkomna pot.

Gauss lag på differentialform $\nabla\cdot\mathbf{D} = \begin{cases} \rho_0 & a<r<b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$\mathbf{D} = -\nabla\phi$$

$$-\nabla^2\phi = \begin{cases} \rho_0 & a<r<b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Sfärisk symmetri $\Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \phi(r) \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)\right) = \begin{cases} -\rho_0 & a<r<b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 r^2}{6} - \frac{C}{r} + F & a<r<b \\ -\frac{D}{r} + G & r<a \\ -\frac{E}{r} + H & r>b \end{cases}$$

randvillkor? Vi behöver 6 st.

① ref. pot. godt. $\Rightarrow \phi(r) \to 0$ då $r \to \infty$ (standardval)

② inga ytdipoler $\Rightarrow \phi(r)$ kont.

③ inga ytkällor $\Rightarrow \nabla\phi(r)$ kont. över $r=a$, $r=b$ dvs $\hat{r}\cdot\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}$ kon

④ inga pktkällor (i origo) $\Rightarrow$ ingen kvadr. sing. hos $\nabla\phi$ eller sing. hos ϕ

① $\Rightarrow -\frac{E}{r} + H \to H$, då $r \to \infty \Rightarrow H = 0$

④ $\Rightarrow -\frac{D}{r} + G \to \infty$ då $r \to 0$ om inte $D=0 \Rightarrow$ välj $D=0$

③ $\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial r}$ kont $\quad r=a \quad \overset{(D=0)}{0} = -\frac{\rho_0 a^3}{3} + C$

$$r=b \quad -\frac{\rho_0 b^3}{3} + C = E$$

$$\therefore C = \frac{\rho_0 a^3}{3}, \quad E = \frac{\rho_0(a^3-b^3)}{3}$$

② $\phi(r)$ kont.

$$\left.\begin{aligned} r=a \quad & G = -\frac{\rho_0 a^2}{6} - \frac{\rho_0 a^2}{3} + F \\ r=b \quad & -\frac{\rho_0 a^2}{6} - \frac{\rho_0 a^3}{3b} + F = \frac{\rho_0(a^3-b^3)}{3b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{\rho_0 b^2}{2}, \quad G = \frac{\rho_0(b^2-a^2)}{2}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0(b^2-a^2)}{2} & , r<a \\ -\frac{\rho_0 r^2}{6} + \frac{\rho_0 a^3}{3r} + \frac{\rho_0 b^2}{2} & a<r<b \\ \frac{\rho_0(b^3-a^3)}{3r} & r>b \end{cases}$$

<u>PLK 11.3</u> På sfären $r=a$ finns en ytdipol $\mu(\theta,\varphi)=\mu_0 \sin\theta \sin\varphi$. Bestäm pot. från denna ytdipol överallt i rummet. Om ytdipolen är elektrisk, bestäm motsvarande E-fält samt energin i detta. Ledning: ansätt $\phi(r,\theta,\varphi) = f(r)\sin\theta\sin\varphi$

$\because$ På sfären $r=a$ $\phi_+ - \phi_- = \mu(\theta,\varphi)$

I övrigt måste ϕ uppfylla Laplace ekv. $\nabla^2\phi = 0$
(Poissons ekv.)

$$0 = \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right) =$$

$$= \left[\phi = f(r)\sin\theta\sin\varphi\right] = \ldots = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{r^2}\left(2rf'(r) + r^2 f''(r) - 2f(r)\right)$$

$\Rightarrow 2f(r) - 2rf'(r) - r^2 f''(r) = 0$ (om diff. ekv. ska gälla för alla pkter i $\mathbb{R}^3$)

Randvillkor för $f(r)$:

① $f(r) \to 0$ då $r \to \infty$

② inga pktkällor

③ ytdipol på $r=a$ dvs. $\underset{r>a}{f(a)} - \underset{r<a}{f(a)} = \mu_0$

④ ingen ytkälla dvs $\frac{\partial f}{\partial r}$ kont.

Ansätt $f(r) = Cr^k \Rightarrow Cr^k(2-2k-k(k-1)) = 0 \Rightarrow k = -2, +1$ eller $f(r)\equiv 0$

$$\because f(r) = \begin{cases} Ar + \frac{B}{r^2} & r>a \\ Cr + \frac{D}{r^2} & r<a \end{cases}$$

① $\Rightarrow$ $A = 0$

② $\Rightarrow$ ingen sing. i $f(r)$ när $r \to 0$ $\Rightarrow$ $D = 0$

③ ytdipol på $r=a \Rightarrow \frac{B}{a^2} - Ca = \mu_0$

④ ingen ytkälla $\Rightarrow -\frac{2B}{a^3} - C = 0 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 a^2}{3}$ $\quad C = \frac{-2\mu_0}{3a}$

$$\therefore\ \phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\dfrac{2M_0 r}{3a}\sin\theta\sin\varphi & r<a \\ \dfrac{M_0 a^2}{3r^2}\sin\theta\sin\varphi & r>a \end{cases}$$

$\mathbb{D}$-fältet tar hänsyn till materialet.

$$\mathbb{D} = -\nabla\phi = \begin{cases} \dfrac{2M_0}{3a}\sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \dfrac{2M_0}{3a}\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \dfrac{2M_0}{3a}\cos\varphi\,\hat{\varphi} & r<a \\ \dfrac{2M_0 a^2}{3r^3}\sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} - \dfrac{M_0 a^2}{3r^3}\cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} - \dfrac{M_0 a^2}{3r^3}\cos\varphi\,\hat{\varphi} & r>a \end{cases}$$

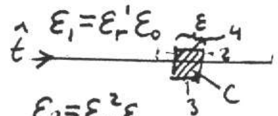
totala energin

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbb{E}(\mathbf{r})|^2\,dV = \{\mathbb{D}=\varepsilon_0\mathbb{E}\} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbb{D}(\mathbf{r})|^2\,dV =$$

$$= \Bigg(\frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,\frac{4M_0^2}{9a^2} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\,\frac{M_0^2 a^4}{9r^6}\Bigg)\Big(4\sin^2\theta\sin^2\varphi +$$

$$+\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\Big) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{M_0^2}{9a^2}\left(4\,\frac{4\pi a^3}{3} + 2\,\frac{4\pi a^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi M_0^2 a}{9\varepsilon_0}}}$$

Titta på en gränsyta mellan två material



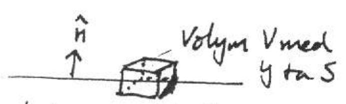
Hur ser $\mathbb{E}$-fältet resp $\mathbb{D}$-fältet ut på ytan i de två materialen?

Vi vet att $\mathbb{E}$ virvelfritt dvs $\int_C \mathbb{E}\cdot d\mathbf{r} = 0 =$

$$= \int_S \underbrace{(\nabla\times\mathbb{E})}_{=0}\cdot d\mathbf{S} = \mathbb{E}_1\cdot\hat{t}\varepsilon - \mathbb{E}_2\cdot\hat{t}\varepsilon \Rightarrow \mathbb{E}_1\big|_{tang.} = \mathbb{E}_2\big|_{tang}$$

ingår ej i kursen.

$\mathbb{D}$-fältet? $\nabla\times\mathbb{D}\varepsilon$ använd testkub.



$$\int_S \mathbb{D}\cdot d\mathbf{S} = \hat{n}\cdot(\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2)\,\varepsilon^2 = \int_V \nabla\cdot\mathbb{D}\,dV = \text{innesluten laddning}$$

$$\Rightarrow \hat{n}\cdot(\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2) = \text{innesluten ytladdning.}$$

Vad är skalfaktorerna?

-Ett uttryck för att vektorer i kroklinj. koord. inte skalas likadant som kartesiska vid derivation eller integration m.a.p. koord. Detta beror bl.a. på att basvektorerna i de kroklinj. koord. också är beroende av i vilken pkt. man befinner sig. För ortogonala system fungerar de t.ex. vid kryssprodukt & skalärmult., som de kart.

ex $\hat{\alpha} \times \hat{x} = (-\sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y}) \times \hat{x} = -\cos\alpha\hat{z}$

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ högersyst.

$\Rightarrow \hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$

$\hat{x}\times\hat{z} = -\hat{y}$

$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$

p.s.s. $\hat{\rho}, \hat{\alpha}, \hat{z}$ högersyst.

$\hat{\rho}\times\hat{\alpha} = \hat{z}$

$\hat{z}\times\hat{\alpha} = -\hat{\rho}$

$\hat{z}\times\hat{\rho} = \hat{\alpha}$

$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ högersyst.

$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\varphi}$

$\hat{\rho}\cdot\hat{\alpha} = 0$

$\hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$

$\hat{r}\cdot\hat{\alpha} = 0 \quad (\hat{\alpha} = \hat{\varphi})$

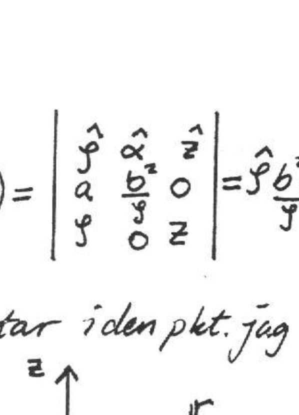
$\hat{\alpha}\cdot\hat{x} = (-\sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y})\cdot\hat{x} = -\sin\alpha$

$$\boxed{dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\, du\, dv}$$

ex $\left(a\hat{\rho} + \frac{\hat{\alpha} b^2}{\rho}\right) \times \mathbf{r} = (\mathbf{r} \text{ i cyl. koord.} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}) = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\alpha} & \hat{z} \\ a & \frac{b^2}{\rho} & 0 \\ \rho & 0 & z \end{vmatrix} = \hat{\rho}\frac{b^2 z}{\rho} - \hat{\alpha} a z - \hat{z} b^2$

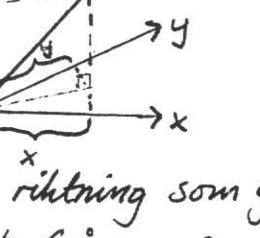
$\mathbf{r}$ - vektor som startar i origo och slutar i den pkt. jag befinner mig.

I kartesiska: $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$



I sfäriska: Hur är basvektorerna riktade i pkten $\mathbf{r}$?

$\hat{r}$ riktad i $\mathbf{r}$:s förändringsriktn. dvs i den riktning som går från origo till pkten. - en stråle från origo. Avst. från origo till pkten $\mathbf{r}$ är $r \Rightarrow \mathbf{r} = r\hat{r} \quad |\hat{r}| = 1$



I cylindriska: Hur pekar $\hat{\rho}$ i pkten $\mathbf{r}$?

$\hat{\rho}$ har samma riktn. som en vektor från z-axeln på höjd z genom pkten $\mathbf{r}$. ρ avst. från z-axeln till pkten $\mathbf{r}$.

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\because \mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} = r\hat{r}$ dvs $\rho\hat{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} =$

$= \rho\cos\alpha\,\hat{x} + \rho\sin\alpha\,\hat{y} \qquad (\hat{\rho} = \cos\alpha\hat{x} + \sin\alpha\hat{y})$

PLK A.13. Ett krokling. koord. syst. $\alpha\beta\gamma$ ges av sambandet
$$\mathbf{r} = a(\cosh\alpha\sin\beta\cos\gamma, \cosh\alpha\sin\beta\sin\gamma, \sinh\alpha\cos\beta)$$
med $0 \le \alpha < \infty$, $0 \le \beta \le \pi$, $0 \le \gamma < 2\pi$.
I detta koord. syst. är ϕ givet av
$$\phi(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} \phi_0 \arctan(\sinh\alpha_0) & \alpha < \alpha_0 \\ \phi_0 \arctan(\sinh\alpha) & \alpha > \alpha_0 \end{cases}, \text{ där } \phi_0, \alpha_0 \text{ är konst.}$$
Bestäm käll- & dipolförd. för pot. Ge ev. ex. på fysikalisk situation där ϕ uppkommer.

Lösningsgång:

① Beräkna tangentbasvektorer (el. normalbasvektorer)

② Kolla ort. räkna ut skalfakt.

③ Kolla källor & dipoler

④ Fysikalisk situation?

Lättast med tangentbasvektorer.
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha} = a(\sinh\alpha\sin\beta\cos\gamma, \sinh\alpha\sin\beta\sin\gamma, \cosh\alpha\cos\beta)$$
$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\right| = a\sqrt{\sinh^2\alpha\sin^2\beta + \cosh^2\alpha\cos^2\beta} = a\sqrt{\sinh^2\alpha + \cos^2\beta}$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta} = a(\cosh\alpha\cos\beta\cos\gamma, \cosh\alpha\cos\beta\sin\gamma, -\sinh\alpha\sin\beta)$$
$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right| = a\sqrt{\sinh^2\alpha + \cos^2\beta}$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\gamma} = a(-\cosh\alpha\sin\beta\sin\gamma, \cosh\alpha\sin\beta\cos\gamma, 0)$$
$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\gamma}\right| = a|\cosh\alpha\sin\beta| = a\cosh\alpha\sin\beta$$
$$\Rightarrow \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\gamma} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\gamma} = 0 \quad \therefore \text{ Syst. ort.}$$
$$\Rightarrow \text{def. av skalfaktorer} \quad \left(h_\alpha = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\right|,\ h_\beta = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right|,\ h_\gamma = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\gamma}\right|\right)$$

Källor och dipoler: Möjligt med ytförd. på ytan $\alpha = \alpha_0$, inga linje- eller pkt-källor.

① Rymdkällor:
$$\nabla\cdot\mathbf{F} = -\nabla^2\phi = \frac{-1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_\alpha h_\beta h_\gamma}{h_\alpha^2}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\right) + 0 + 0 =$$

$$=\begin{cases} 0 & \alpha<\alpha_0 \\ \dfrac{-1}{a^3(\sinh^2\alpha+\cos^2\beta)\cosh\alpha\sin\beta}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(a\cosh\alpha\sin\beta\,\phi_0\dfrac{\cosh\alpha}{\underbrace{1+\sinh^2\alpha}_{\cosh^2\alpha}}\right)=0 & \alpha>\alpha_0 \end{cases}$$

$\therefore$ inga rymdkällor

② Ytkälla $\alpha=\alpha_0$, normal till ytan: $\hat{\alpha}$

($\hat{\alpha}$ riktad i samma riktn. som $\nabla\alpha$ = normalbasv.
$\nabla\alpha \perp$ mot nivåytan α = konst.)

$$\hat{\alpha}\cdot(\underset{\alpha>\alpha_0}{\mathbb{F}_+}-\underset{\alpha<\alpha_0}{\mathbb{F}_-})=\hat{\alpha}\cdot(\underbrace{\nabla\phi_-}_{=0}-\nabla\phi_+)=-\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial\phi_+}{\partial\alpha}=\frac{-\phi_0}{a\sqrt{\sinh^2\alpha_0+\cos^2\beta}}\cdot\frac{\cosh\alpha_0}{1+\sinh^2\alpha_0}=$$

$$=\underbrace{\frac{-\phi_0}{a\cosh\alpha_0\sqrt{\sinh^2\alpha_0+\cos^2\beta}}}_{\text{ytkällans styrka}}$$

$\therefore$ ytkälla på $\alpha=\alpha_0$

③ Ytdipol:

$$\phi_+-\phi_-=\phi_0\arctan(\sinh\alpha_0)-\phi_0\arctan(\sinh\alpha_0)=0$$

$\therefore$ Ingen ytdipol

④ Linjekälla: ingen

⑤ Pktkälla: ingen

Fys. ex. en α-ytformad metallisk "kula" uppladdad med tillr. med laddn. för att få pot. $\phi_0\arctan(\sinh\alpha_0)$

Notera: $\phi(\infty)=\phi_0\frac{\pi}{2}$

PLK 9.7 $\quad \mathbb{F}=\dfrac{xy^2}{y^2+z^2}\hat{x}+\boxed{\dfrac{y\hat{y}+z\hat{z}}{y^2+z^2}}$ – definiera egna cyl. koord. runt x-axeln ist.f. z-axeln

om ist. $\dfrac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2}=\dfrac{\rho\hat{\rho}}{\rho^2}=\dfrac{\hat{\rho}}{\rho}$ ← Linjekälla längs z-axeln

$$\left.\begin{array}{l} x\to y\to z\to x \\ x\to y\to z\to x \end{array}\right\}\begin{array}{l} x\to z \\ y\to x \\ z\to y \end{array}\quad \text{ok vid } h_s\to h_s$$

dx $\quad d\mathbf{r}$ - (kurvelement) $= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha$ $\quad \alpha$ parametrisering av kurvan

ex. x-axeln mellan $x=-1$ & $x=2$ $\quad d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha = (1,0,0)\, d\alpha = \hat{x}\, dx$

$dx\,dy$ $\quad dS$ - (ytelement) $\quad = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\alpha\, d\beta$ $\left(= \hat{\alpha} \times \hat{\beta}\, h_\alpha h_\beta\, d\alpha\, d\beta\right)$

gäller om den 3:e koord. = konst. på ytan.

α, β är parametrar på ytan

ex. sfär med radie a $\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = a\hat{\theta}$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = a \sin\theta\, \hat{\varphi}$

$\mathbf{r} = a(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

$dx\,dy\,dz$ $\quad dV$ - (volymselement) $= \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}\right|}_{\text{beloppet av funktionaldet.}} d\alpha\, d\beta\, d\gamma = h_\alpha h_\beta h_\gamma\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$

ex. sfär $dV = \underset{h_r}{1} \cdot \underset{h_\theta}{r} \cdot \underset{h_\varphi}{r\sin\theta}\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Exempel på dS för några ytor

$S: x^2+y^2=a^2$ cylinder

Lämpliga parametriseringskoord. α, z

$\mathbf{r} = (a\cos\alpha, a\sin\alpha, z) \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = a\hat{\alpha}$ $\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}$ $\Rightarrow dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} d\alpha\, dz = a\hat{J}\, d\alpha\, dz$

$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad$ elliptisk cylinder

(rekomendation: byt kartesiska koord. s.a. S blir en cylinder

$x = ax'$

$y = y'b$ $\quad dV = dx\,dy\,dz = \frac{1}{ab} dx'dy'dz'$

$z = z$)

parametrisering med α, z $\quad \mathbf{r} = (a\cos\alpha, b\sin\alpha, z)$

$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = (-a\sin\alpha, b\cos\alpha, 0)$ $\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0,0,1)$

$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \overset{(d\alpha dz)}{=} a\sin\alpha\,\hat{y} + b\cos\alpha\,\hat{x}$

$S: x^2+y^2+z^2=a^2$ $\quad$ parametrisering: sfär. koord.

med $r=a \Rightarrow dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\theta\, d\varphi = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid

1:a hand byt koord. s.a. S blir en sfär

2:a hand $\mathbb{r}=(a\sin\theta\cos\varphi, b\sin\theta\sin\varphi, c\cos\theta)$

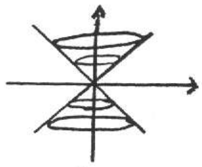
$\Rightarrow \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial\theta}=(a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\sin\varphi, -c\sin\theta)$

$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial\varphi}=(-a\sin\theta\sin\varphi, b\sin\theta\cos\varphi, 0) \qquad \Rightarrow d\mathbb{S}=\ldots$

$S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ hyperboloid parameterframst. α,β

$\mathbb{r}=(a\cosh\alpha\cos\beta, b\cosh\alpha\sin\beta, c\sinh\alpha)$

$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial\alpha}=\ldots \qquad \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial\beta}=\ldots$



kon med spetsen i origo

$S: x^2+y^2-z^2=0 \qquad \rho=|z|$

parametrar: (för delarna $z>0$ & $z<0$) ρ,α eller z,α

t.ex. ρ,α , $z>0$

$\mathbb{r}=(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, \rho) \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial\rho}=(\cos\alpha,\sin\alpha,1)=\hat{\rho}+\hat{z}$

$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial\alpha}=\rho\hat{\alpha} \Rightarrow d\mathbb{S}=(\hat{\rho}+\hat{z})\times\rho\hat{\alpha}\,d\rho\,d\alpha=\rho(\hat{z}-\hat{\rho})\,d\rho\,d\alpha$

$S: x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ eller $r=2a\cos\theta$ sfär ej cent. i origo.
Hur ser $d\mathbb{S}$ ut om man parametriserar med θ,φ (vanliga sfär vinklar)

(1:a hand: Translatera origo till $(0,0,a)$ och använd sfär. koord. därifrån

$\mathbb{r}=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)=2a(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\theta\sin\varphi, \cos^2\theta$

$\Rightarrow \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial\theta}=\ldots$

PLK B22 $\quad \mathbb{F}$ & kurvan C i cylinderkoord. ges av

$$\mathbb{F}=F_0\left[\left(\frac{a\rho}{a^2+\rho^2}-\frac{a^3\rho}{a^4+\rho^4}\right)\hat{\rho}+\frac{z}{a}\hat{z}\right]$$

$$C: \begin{cases} \rho^2+z^2=2az \Rightarrow \rho^2+(z-a)^2=a^2 \text{ - sfär ej cent. i origo} \\ \alpha=\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Beräkna tangentlinjeint. från origo till pkten $\rho=a, z=a, \alpha=\frac{3\pi}{4}$

$I=\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ Translatera origo till $(0,0,a)$

$z' = z - a$, $dz = dz'$ $\Rightarrow C': \begin{cases} \rho^2 + (z')^2 = a^2 & \text{från } (0,0,-a) \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

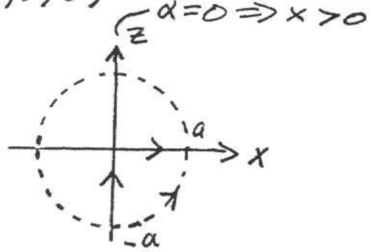
till $\rho = a$, $z = 0$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

$\mathbf{F}: F_z \to \frac{F_0(z'+a)}{a}\hat{z}$

$\mathbf{F}$ oberoende av α (utom i basv.)

Rotera koord. sys. till $\alpha = 0$ $\left(\alpha' = \alpha - \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \rho = x$, $\hat{\rho} = \hat{x}$

$\Rightarrow C: \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 & \text{från } (0,0,-a) \text{ till } (a,0,0) \\ y = 0 \end{cases}$



$$\mathbf{F} = F_0\left[\left(\frac{ax}{a^2+x^2} - \frac{a^3x}{a^4+x^4}\right)\hat{x} + \left(\frac{z+a}{a}\right)\hat{z}\right]$$

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Stokes sats: $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ eftersom F_x endast beror på x
F_z — " —— " — z

$\therefore$ Slut med kurvbitarna längs z-axeln och x-axeln

$(0,0,-a)$ till $(0,0,0)$ – C_1

$(0,0,0)$ till $(a,0,0)$ – C_2

$$\therefore I = \begin{bmatrix}\text{Stokes sats} \\ \text{på området}\end{bmatrix} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-a}^{0} F_z\, dz + \int_0^a F_x\, dx =$$

$$= F_0 \int_{-a}^{0} \frac{z+a}{a}\, dz + F_0 \int_0^a \left(\frac{ax}{a^2+x^2} - \frac{a^3x}{a^4+x^4}\right) dx = \frac{F_0 a}{2}\left(1 + \ln 2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Hur handskas man med t.ex. $(\hat{\rho} \times \nabla) \times \mathbf{B}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \{\nabla = (\nabla_a + \nabla_b)$

$(\hat{\rho} \times \nabla_B) \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times (\hat{\rho} \times \nabla_B) = -(\mathbf{B}\cdot\nabla_B)\hat{\rho} + (\mathbf{B}\cdot\hat{\rho})\nabla_B =$

$= -(\nabla_B \cdot \mathbf{B})\hat{\rho} + \nabla_B(\mathbf{B}\cdot\hat{\rho}) = -(\nabla_B\cdot\mathbf{B})\hat{\rho} + (\hat{\rho}\cdot\nabla_B)\mathbf{B} + \hat{\rho}\times(\nabla_B \times \mathbf{B}) =$

$= -(\nabla\cdot\mathbf{B})\hat{\rho} + (\hat{\rho}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \hat{\rho}\times(\nabla\times\mathbf{B})$

Problem: Vi känner källor, virvlar etc. i rummet. Hur ser fält & potentialer (skalär, vektor) ut som funktioner av koord. i rummet

Betrakta ett fält $\mathbf{F}$ med rymdförd. $f(r)$ = rymdkälltätheten, $\mathbf{J}(r)$ = rymdvirvelstyrkan. $\nabla\cdot\mathbf{F} = \rho$, $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{J}$

$\mathbf{F}$ är linjärt $\Rightarrow$ betrakta istället de två delfälten $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ s.a. $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$

$\nabla \cdot \mathbb{G} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbb{H} = 0$
$\nabla \times \mathbb{G} = 0 \quad \nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J}$ $\Big\} \Rightarrow \exists$ skalär pot. ϕ till $\mathbb{G} = -\nabla \phi$
och vektorpot. $\mathbb{A}$ till $\mathbb{H} = \nabla \times \mathbb{A}$

$\Rightarrow -\nabla^2 \phi = \rho, \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \mathbb{J}$

$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = -\nabla^2 \mathbb{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbb{A})$ vi kan alltid välja gauge s.a. $\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$

Då: (Poissons ekv. & vektor ekv.)

① $\nabla^2 \phi = -\rho$

② $\nabla^2 \mathbb{A} = -\mathbb{J}$

Potentialerna (& därmed fälten) är entydigt bestämda av ① & ② ($\mathbb{F} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbb{A}$) (bortsett från gauge och ref.pot. transf.) går att bevisa (se boken)

I princip påverkas pot. & fältet i en pkt. $\mathbb{r}_p$ av två saker:

1) Käll- & virvelstyrkan i en godt. pkt. $\mathbb{r}$

2) avst. (t.ex. riktning) till denna pkt. $|\mathbb{r} - \mathbb{r}_p|$

Jmfr. pot. från en pktkälla i origo ($\mathbb{r} = \mathbb{0}$) i en pkt.

$\mathbb{r}_p \qquad \phi = \dfrac{q}{4\pi r_p}$ ← styrkan hos pkt källan

$r_p = |\mathbb{r}_p|$

$\Rightarrow$ pkt. ϕ kan skrivas som $\phi(\mathbb{r}_p) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\mathbb{r})}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}_p|}\, dV + \underbrace{\text{randtermer}}_{\to 0 \text{ då } V \to \mathbb{R}^3}$

OBS! $\mathbb{r}$ är integrationsvariabeln
$\mathbb{r}_p$ är <u>konstant</u> m.a.p. integralen.

Förutsättn: ρ integrerbar över hela rummet. (i princip inte ∞ mkt. energi) + val att $\phi \to 0$ i ∞.

$\phi(\mathbb{r}_p) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\mathbb{r})}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}_p|}$ Denna int. är likf. konv.

$\Rightarrow$ det går att derivera m.a.p. $\mathbb{r}_p$ innanför integraltecknet dvs vi kan skriva fältet $\mathbb{G} = -\nabla\phi$ som

$$\mathbb{G}(\mathbb{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_V \rho(\mathbb{r}) \frac{(\mathbb{r}_p - \mathbb{r})}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}_p|^3}\, dV$$

VA 12.3 I en cylinder med radien R och höjden h finns en konstant rymdkällsförd. ρ_0. Låt $\mathbb{F}$ vara det vektorfält som svarar mot denna källförd. samt går mot noll i oändligheten. Bestäm $\mathbb{F}$ längs hela symmetriaxeln.

Inför cylindriska koord. Låt cylindern ligga mellan $z=-\frac{h}{2}$ och $z=\frac{h}{2}$ $(0\leq\rho\leq R)$ Låt z-axeln vara symmetriaxeln

Rymdkällstätheten i hela rymden: $\rho(\mathbb{r}) = (\rho_0\theta(R-\rho)((\theta(z+\frac{h}{2})-\theta(z-\frac{h}{2}))))$

$\mathbb{r}_p = z_p\hat{z}$ $\quad \rho(\mathbb{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{inuti cylindern} \\ 0 & \text{i övrigt} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{F}(z_p\hat{z}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbb{r})\frac{(z_p\hat{z}-\mathbb{r})}{|\mathbb{r}-z_p\hat{z}|^3}\,dV \Rightarrow \mathbb{F} = \frac{1}{4\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho\,d\alpha\,dz\,d\rho\,\rho_0\frac{(z_p\hat{z}-\rho\hat{\rho}-z\hat{z})}{(\rho^2+(z-z_p)^2)^{3/2}}$$

$$= \left[\int_0^{2\pi} d\alpha\,\hat{\rho}=0\right] = \frac{1}{2}\rho_0\int_0^R\int_{-\frac{h}{2}}^{h/2}\rho\,d\rho\,dz\frac{(z_p-z)\hat{z}}{(\rho^2+(z-z_p)^2)^{3/2}} = \frac{\hat{z}\rho_0}{2}\int_0^R\rho\,d\rho\left[\frac{1}{(\rho^2+(z-z_p)^2)^{1/2}}\right]_{-h/2}^{h/2} =$$

$$= \frac{\hat{z}\rho_0}{2}\int_0^R\rho\,d\rho\left[\frac{1}{(\rho^2+(\frac{h}{2}-z_p)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(\rho^2+(\frac{h}{2}+z_p)^2)^{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{\hat{z}\rho_0}{2}\left[-(R^2+(\tfrac{h}{2}+z_p)^2)^{1/2} + \left|\tfrac{h}{2}+z_p\right| + (R^2+(\tfrac{h}{2}-z_p)^2)^{1/2} - \left|\tfrac{h}{2}-z_p\right|\right]$$

$$\phi(\mathbb{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\mathbb{r})}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_p|}$$

$\rho(\mathbb{r})$ rymdfördelningen , $\mathbb{r}$ integrationsvariabel

$\mathbb{r}_p$ = konst. m.a.p. integrationen

Lösn. till Poissons ekv. $\nabla^2\phi(\mathbb{r}) = \rho(\mathbb{r})$

$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -\nabla\phi(\mathbb{r})$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\mathbb{r})(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_p|^3}\,dV$$

Gäller även för rymdvirvlar, ytkällor, ytvirvlar, linjekällor, virveltråd

<u>t.ex.</u> rymdvirvel, täthet $\mathbb{J}(\mathbb{r})$ vektorpot. $\mathbb{A}(\mathbb{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{J}(\mathbb{r})}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_p|}\,dV$

lösn. till Poissons vektorekv. $\nabla^2\mathbb{A} = -\mathbb{J}$

fältet $\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{A}$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbb{J}(\mathbb{r}) \times (\mathbb{r}_p - \mathbb{r})}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}_p|^3}$$

ex. linjekälla, källtäthet $\tau(\mathbb{r})$

$$\phi(\mathbb{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{\tau(\mathbb{r})}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}_p|}|d\mathbb{r}|$$, C linjekällans utbredning

OBS! Linjekällan får ej vara oändligt lång med konstant täthet t.ex. $\tau(\mathbb{r}) = \tau_0$ på z-axeln, leder till oändlig mängd energi.

Bestäm den stationära temperaturförd. T och värmeströmningen ($\mathbb{J} = -\lambda \nabla T$) runt en ljuslåga så långt möjligt.

Ljuslåga: källa till värme.

möjligheter att modellera lågan:

 – pktkälla – bra för stora avstånd

– cylinder som sträcker sig en bit upp i luften ovanför lågan (rymdförd.)

VA12.2 → – sfär som är varmare på ovansidan.

– en kon som är varmare i toppen

– ellips

– kon, halvsfär under

Förslag till källa:

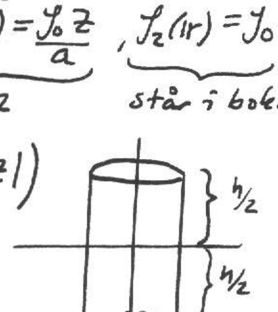
sfär: $J(\mathbb{r}) = \frac{J_0}{a}(z + a)$

– rymdkälla med maxprod. i toppen och ingen prod. i botten, kan ses som en superpositionering av $\underbrace{J_1(\mathbb{r}) = \frac{J_0 z}{a}}_{VA12.2}$, $\underbrace{J_2(\mathbb{r}) = J_0}_{\text{står i boken}}$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

cylinder: höjd h, radie a $J(\mathbb{r}) = \frac{J_0 2}{h}\left(\frac{h}{2} - |z|\right)$

bättre: $J(\mathbb{r}) = \frac{2J_0}{h}\left(\frac{3h}{4} - \left|z - \frac{h}{4}\right|\right)$



för sfären: rotationssymm. runt z-axeln

∴ räcker att undersöka temp. förd. i xy-planet dvs i alla pkter $\mathbb{r}_p = (x_p, 0, z_p)$

1) Ställ upp int. för att hitta temp. förd. i $\mathbb{r}_p$.

2) Ställ upp diff. ekv. för prob.

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{a}(z+a) \quad , r<a$$

$$T(\mathbf{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr\, \frac{\rho_0}{a}\frac{(r\cos\theta + a)}{\sqrt{r^2 + x_p^2 + z_p^2 - 2r(x_p \sin\theta\cos\varphi + z_p\cos\theta)}}$$

$$\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p| = \sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)} = \sqrt{r^2+x_p^2+z_p^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_p} = \sqrt{r^2+x_p^2+z_p^2-2r(x_p\sin\theta\cos\varphi+z_p\cos\theta} \right.$$

$\left.\left[\text{antag } x_p = 0 \text{ för att vi ska kunna räkna analytiskt}\right]\right)$

$$T(z_p\hat{z}) = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{a}\int_0^a\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr\, \frac{(r\cos\theta + a)}{\sqrt{r^2+z_p^2-2rz_p\cos\theta}} = \begin{bmatrix} -\cos\theta = t \\ \sin\theta\, d\theta = dt \\ \theta=\pi \Leftrightarrow t=1 \\ \theta = 0 \Leftrightarrow t=-1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\rho_0}{2a}\int_0^a\int_{-1}^{1} r^2 dt\, dr\, \frac{(-rt+a)}{\sqrt{r^2+z_p^2+2rtz_p}} = [\text{P.I. i } t\text{-int.}] =$$

$$= \frac{\rho_0}{2a}\int_0^a r^2 dr \left[\left(\frac{-rt+a}{rz_p}\sqrt{r^2+z_p^2+2rtz_p}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{dt}{z_p}\sqrt{r^2+z_p^2+2rtz_p} \right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{2a}\int_0^a r^2 dr \left[\frac{1}{rz_p}(a-r)\underbrace{\sqrt{(r+z_p)^2}}_{=|r+z_p|} - \frac{1}{rz_p}(r+a)\underbrace{\sqrt{(r-z_p)^2}}_{=|r-z_p|} + \frac{1}{3rz_p^2}\left(|r+z_p|^3 - |r-z_p|^3\right)\right] =$$

① $z_p > a$

$=$ ② $z_p < -a$

③ $0 < z_p < a$

④ $0 > z_p > -a$

$$① = \begin{bmatrix} |r+z_p| = r+z_p \\ |r-z_p| = z_p - r \end{bmatrix} = \frac{\rho_0}{2a}\int_0^a \frac{r\,dr}{z_p}\left[2arz_p - 2r^2z_p + \frac{1}{3}(2r^2+6rz_p^2)\right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{2az_p^2}\left(\frac{a^4 2z_p}{3} - \frac{1}{2}a^4 z_p + \frac{2}{15}a^5 + \frac{2a^3z_p^2}{3}\right)$$

② Teckenbyte jämfört med ①: sign(z_p)

$$③ = \left[\int_0^a = \underbrace{\int_0^{z_p}}_{\text{samma som i ①}} \underbrace{\int_{z_p}^a}_{\substack{|z_p+r|=r+z_p \\ |r-z_p| = r-z_p}}\right] = \frac{\rho_0}{2a}\left[\int_{z_p}^a r\,dr(2az_p^2 - 2r^2z_p + \frac{1}{3}(6r^2z_p + 2z_p^3)) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{z_p} r\,dr(2arz_p - 2r^2z_p + \frac{1}{3}(2r^3 + 6rz_p^2))\right] = \frac{\rho_0}{2az_p^2}\left[az_p^2(a^2-z_p^2) - \frac{1}{2}z_p(a^4-z_p^4) + \right.$$

$$\left. + \frac{z_p}{2}(a^4-z_p^4) + \frac{1}{3}z_p^3(a^2-z_p^2) + \frac{2a^4z_p}{3} - \frac{1}{2}z_pa^4 + \frac{2}{15}a^5 + \frac{2}{3}a^3z_p^2\right]$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0(z+a)}{a} \quad \mathbf{r} < a$$

$T(z_p\hat{z}) \Rightarrow T = \frac{1}{\lambda} T$ - "sidan innan"

$\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$

$\nabla \mathbf{J} = \rho(\mathbf{r})$

Möjligt att lösa detta prob. direkt från Poissons ekv.

$\nabla^2 T = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\lambda}$ vilket i sfäriska koord. blir:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{a}(r\cos\theta + a) & r < a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Vår källa beror av r & θ $\Rightarrow$ Den "naturliga" ansatsen är:

$T(r,\theta) = f(r)\cdot\cos\theta + g(r)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(f'(r)\cos\theta + g'(r)\right)\right)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta f(r)(-\sin\theta)\right) + 0 =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(2r\left[f'(r)\cos\theta + g'(r)\right] + r^2\left[f''(r)\cos\theta + g''(r)\right]\right) - \frac{f(r)\,2\sin\theta\cos\theta}{r^2\sin\theta} \stackrel{!}{=}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{cases} 0 & r > a \\ \frac{\rho_0}{a}(r\cos\theta + a) & r < a \end{cases}$$

Skall gälla för alla θ $\Rightarrow$ vi kan separera koeff. för $\cos\theta$ och koeff för 1.

$\Rightarrow$ två diff. ekv.

① $\frac{2}{r}f'(r) + f''(r) - \frac{2}{r^2}f(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{a} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$

② $\frac{2}{r}g'(r) + g''(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$

②: $2rg'(r) + r^2 g''(r) = \begin{cases} \rho_0 r^2 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \Rightarrow r^2 g'(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^3}{3} + D & r < a \\ E & r > a \end{cases}$

$$\Rightarrow g(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{6} - \frac{D}{r} + F & r < a \\ -\frac{E}{r} + G & r > a \end{cases}$$

①: Ansätt $f(r) = Cr^k \Rightarrow 2k + k(k-1) - 2 = 0$ för homogena fallet.

$\Rightarrow k = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = 1, -2 \Rightarrow f_h(r) = Cr + \frac{H}{r^2}$

Partikulärlösn: Ansätt $f_p(r) = Kr^3$

$$\Rightarrow 2K + 6K - 2K = \frac{J_0}{a}$$

$$K = \frac{J_0}{6a} \Rightarrow f(r) = \begin{cases} \frac{J_0 r^3}{6a} + Cr + \frac{H}{r^2} & r<a \\ \lambda r + \frac{M}{r^2} & r>a \end{cases}$$

Randvillkor

$T \to T_0$ i ∞ (A)

T begr. i origo (B)

T kont. över $r=a$ (C)

$\frac{\partial T}{\partial r} = \nabla T \cdot \hat{r}$ kont. över $r=a$ (D)

(A) $\Rightarrow G = T_0$, $\lambda = 0$

(B) $\Rightarrow D=0$, $H=0$

(C) $\Rightarrow f(r)$ kont. : $\frac{M}{a^2} = J_0 a^2 + Ca$

$g(r)$ kont : $T_0 - \frac{E}{a} = \frac{J_0 a^2}{6} + F$

(D) $\Rightarrow f'(r)$ kont : $\frac{-2M}{a^3} = \frac{J_0 a}{2} + C$

$g'(r)$ kont : $\frac{E}{a^2} = \frac{J_0 a}{3}$

$\Rightarrow \ldots$

$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right)$ Detta kan ses som en operator som verkar på funktionen T eller som en matris i det oändliga rummet $\mathbb{C}^2$, dess egenvektorer är 1 : egenvärde 0

$\cos\theta$ — " — -2

$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ — " — -6

Litet **OBS!**

Vid mer än en sorts rymdfördelning / ytfördelning etc. räknas det totala fältet enklast ut m.h.a. superposition av de olika dellösn. för varje separat förd.

t.ex. fältet från en pktkälla i origo med styrkan 4π, en virveltråd längs z-axeln, styrka $2\pi\hat{z}$

$\mathbb{F}_1$ från pktkällan ges av $\mathbb{F}_1(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi}\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\hat{r}}{r^2}$

$\mathbb{F}_2$ från virveltråd ges av $\mathbb{F}_2(\mathbb{r}) = \frac{2\pi\hat{\alpha}}{2\pi\rho} = \frac{\hat{\alpha}}{\rho}$

ev. visa att $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ ger dessa källor

linjekälla längs z-axeln med styrka 2π ger fältet

$\mathbb{F}_3 = \frac{2\pi\hat{\rho}}{2\pi\rho} = \frac{\hat{\rho}}{\rho}$, $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ & $\mathbb{F}_3$ är käll och virvelfria utom i

origo resp. z-axeln => ok att behandla dessa separat.

<u>Pktdipol:</u> Finns det andra sorters källor än pktkällor som är lokaliserade till en punkt? - Ja

I så fall måste potentialen till källan satisfiera Laplace ekv. i alla pkter utom källpkten (= origo här) dvs

$$0 = \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}}_{=\frac{K\cdot\phi}{r^2}}$$

Måste vara uppfyllt $\forall$ vinklar θ, φ

ansats $\Rightarrow \phi = f(r)g(\theta,\varphi)$ s.a. $g(\theta,\varphi)$ är en egenfkn till vinkeloperatorn.

exempel. $g(\theta,\varphi) = 1$ egenvärde 0 ①

$g(\theta,\varphi) = \cos\theta$ -- " -- -2 ② o.sv. ($\exists\infty$ många)

$\mathbb{A}$ = matris $= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

$\binom{a}{b} = a\cos\theta + b \Rightarrow \mathbb{A}\binom{a}{b} = -2a\cos\theta = \binom{-2a}{0} \Rightarrow A = (\quad)$

① pktkälla Ansats med $g(\theta,\varphi) = 1 \Rightarrow \phi = \frac{q}{4\pi r} \Rightarrow \mathbb{F} = \frac{q\hat{r}}{4\pi r^2}$

eller $q = 4\pi \lim_{\mathbb{r}\to\mathbb{r}_Q} |\mathbb{r} - \mathbb{r}_Q|\phi(\mathbb{r})$, där $\mathbb{r}_Q$ = koord. för pktkällan.

② pktdipol Ansats med $g(\theta,\varphi) = \cos\theta \Rightarrow \phi = \frac{m}{4\pi}\cdot\frac{\cos\theta}{r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{F} = \frac{m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$, m = dipolens styrka här riktad i $\hat{z}$-led.

$m\hat{z}$ = dipolmomentet hos dipolen i pkten $\mathbb{r}_P$ med dipolen i pkten $\mathbb{r}_Q$ fås pot. resp. fältet

$$\phi(\mathbb{r}_P) = \frac{1}{4\pi}(\mathbb{m}\cdot\nabla_P)\frac{1}{|\mathbb{r}_P - \mathbb{r}_Q|}$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}_P) = \frac{-1}{4\pi}(\mathbb{m}\cdot\nabla_P)\frac{(\mathbb{r}_P - \mathbb{r}_Q)}{|\mathbb{r}_P - \mathbb{r}_Q|^3}$$

Exempel på pktdipoler: permanentmagnet

En stor permanentmagnet består av ett stort antal likriktade atomiska magneter eller pktdipoler jämnt fördelade i rummet.

elektrisk dipol t.ex. HCl.

$$\phi = \frac{m\cos\theta}{4\pi r^2}$$

$\mathbb{F} = \frac{m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$, m = beloppet av dipolmomentet

här riktat i $\hat{z}$-led.

<u>VA 13.1</u> En pktdipol i origo har dipolmomentet $\mathbb{m} = m_0\hat{y}$. Uttryck dess potential och fält i sfäriska koord.

$$\phi(\mathbb{r}) = -\frac{1}{4\pi}(\mathbb{m}\cdot\nabla)\frac{1}{r} = \frac{-m_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} = \frac{m_0}{4\pi r^2}\frac{y}{r} = \{\text{sfäriska}\} = \frac{m_0\sin\theta\sin\varphi}{4\pi r^2}$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = \frac{-1}{4\pi}(\mathbb{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbb{r}}{r^3} = \frac{-1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{r^3}\right) = \frac{-m_0}{4\pi}\left(\frac{\hat{y}}{r^3} - \frac{3y}{r^4}\hat{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^3}(3\hat{r}\sin\theta\sin\varphi - \hat{r}\sin\theta\sin\varphi - \hat{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\,\hat{\varphi})$$

tecken på en pktdipol: kubisk sing. i ngn pkt. + vinkelberoende.

<u>Ytdipoler och rymdvinklar</u>

Vad var en ytdipol?

- en diskontinuitet i potentialen över en yta $\phi_+ - \phi_- = \mu(\mathbb{r})$ på ytan

En ytdipol kan också ses som två ytkällor som förs ihop eller som en (konstant) täthet av pktdipoler på ytan

Hur ser då potentialen ut som beror på en ytdipol med styrka $\mu(\mathbb{r})$ på ytan S?

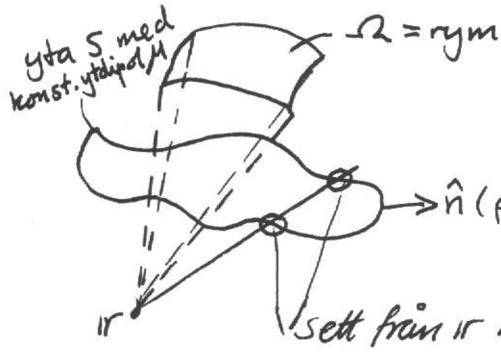
t.ex. $\mu(\mathbb{r}) = \text{konstant} = \mu_0$

Vi vet att $\phi = 0$ i ∞

För att ta sig till pkten $\mathbb{r}$ från ∞ rör vi oss i en rät linje.

Eftersom ∞ är i alla riktn. så finns det många sätt att nå pkten $\mathbb{r}$. Potentialen påverkas av om vi passerar ytan S på vägen och därmed disk. $\Rightarrow \phi(\mathbb{r}) = \mu_0 \times \left\{\begin{matrix}\text{sannolikheten att}\\ \text{passera ytan på}\\ \text{vägen från } \infty\end{matrix}\right\} =$

$= -\mu_0\frac{\Omega}{4\pi}$, där Ω = rymdvinkeln av S sett från $\mathbb{r}$.

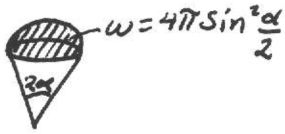


Sett från $\mathbf{r}$ bidrar dessa pkter lika mycket till rymdvinkeln men med olika tecken.

Ω räknas pos. om man ser ytans negativa sida och neg. om man ser den positiva.

Ex på rymdvinklar:

En halvsfär kring origo $(z>0)$

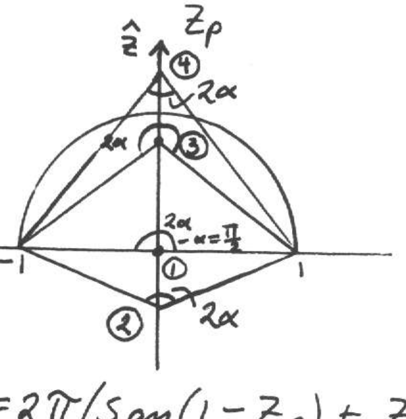


① i origo $\Omega = 2\pi$ (med utåt normal)

$z_p<0$ ② $\alpha = \arctan\frac{1}{|z_p|} \Rightarrow \Omega = 4\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\pi\left(1+\frac{z_p}{\sqrt{1+z_p^2}}\right)$

$z_p<1$ ③ $\alpha = \frac{\pi}{2} + \arctan z_p \Rightarrow \Omega = 4\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\pi\left(1+\frac{z_p}{\sqrt{1+z_p^2}}\right)$

$z_p>1$ ④ $\alpha = \arctan\frac{1}{z_p} \Rightarrow \Omega = -4\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\pi\left(-1+\frac{z_p}{\sqrt{1+z_p^2}}\right)$



① origo
② $z_p<0$
③ $z_p<1$ (>0)
④ $z_p>1$

$\Rightarrow$ skillnaden i rymdvinkel är 4π, "ytan vänds ut & in"

$$\Omega = 2\pi\left(\operatorname{sgn}(1-z_p) + \frac{z_p}{\sqrt{1+z_p^2}}\right)$$

Vad händer för icke-konst. ytdipoler $\mu(\mathbf{r})$?

- Vi måste ta hänsyn till precis hur S ser ut. Resonemanget för konstant ytdipol kan genomföras för dS och $d\Omega$

$\Rightarrow \phi(\mathbf{r}_p) = \frac{-1}{4\pi}\int_S \mu(\mathbf{r})\,d\Omega$, där $d\Omega$ är rymdvinkelelementet av dS sett från $\mathbf{r}_p$.

ex. för $\mathbb{r}_p = 0$ och S = sfär ocentrerad kring origo: $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

Det går också att visa $\phi(\mathbb{r}_p) = \frac{1}{4\pi}\int_S \mu(\mathbb{r})\left((\hat{n}\cdot\nabla)\frac{1}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_p|}\right)dS$

dvs $d\Omega = -\left((\hat{n}\cdot\nabla)\frac{1}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_p|}\right)dS$

$\left(\mathbb{F}(\mathbb{r}_p) = -\nabla_p\phi(\mathbb{r}_p)\right)$

VA 13.10 En plan, cirkulär, ringformad skiva med försumbar tjocklek begränsad av två koncentriska cirklar med radierna a&b ($a<b$) har en konstant ytdipoltäthet μ_0. Bestäm vektorfältet på z-axeln.

P.g.a. symmetri är fältet på z-axeln riktat i $\hat{z}$-led (lika bidrag från alla α-riktn.) $\Rightarrow \mathbb{F}(z_p\hat{z}) = \frac{-\partial\phi}{\partial z}(z_p\hat{z})\hat{z}$ dvs det räcker att bestämma pot. på z-axeln. t. ex. m.h.a. rymdvinkelbegreppet. $\phi = -\frac{\mu_0}{4\pi}\Omega$

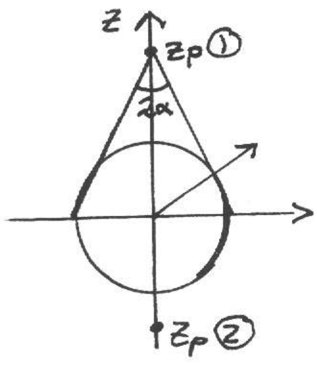
Betrakta ringen som en superposition av en skiva (radie b) med ytdipoltätheten μ_0 och en skiva (radie a) med täthet $-\mu_0$

$\Rightarrow \phi(z_p\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(\Omega_{r<a} - \Omega_{r<b})$

① $z_p > 0$ Vi ser pos. sidan av skivorna

$\Rightarrow$ rymdvinkeln ges av $\Omega_{r<a} = -4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}$ där $\alpha = \arctan\frac{a}{z_p}$

$\Omega_{r<b}$ $\alpha = \arctan\frac{b}{z_p}$ (samma formel)



② Vi ser neg. sidan av skivorna

$\Rightarrow \Omega = 4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $r<a: \alpha = \arctan\frac{a}{|z_p|}$

$r<b: \alpha = \arctan\frac{b}{|z_p|}$

$\Rightarrow \phi(z_p\hat{z}) = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{z_p}{\sqrt{a^2+z_p^2}} - \frac{z_p}{\sqrt{b^2+z_p^2}}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{F}(z_p\hat{z}) = -\frac{\partial\phi}{\partial z_p}\hat{z} = \frac{\mu_0\hat{z}}{2}\left(\frac{b^2}{(b^2+z_p^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2+z_p^2)^{3/2}}\right)$

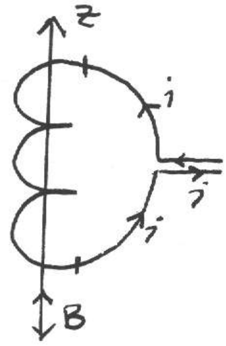
VA13.3 På spiralkurvan $C: \mathbf{r}=(a\cos t, a\sin t, \frac{bt}{\pi})$, $t\in[-\pi,\pi]$ befinner sig en linjekälla med konstant täthet τ_0. Bestäm pot på z-axeln.

$$\Phi(z_p\hat{z})=\frac{1}{4\pi}\int_C \frac{\tau(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}|d\mathbf{r}| = \left[\begin{array}{l} d\mathbf{r}=dt(-a\sin t, a\cos t, \frac{b}{\pi}) \\ |d\mathbf{r}|=dt\sqrt{a^2+\frac{b^2}{\pi^2}}\end{array}\right] = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\tau_0\,dt\sqrt{a^2+\frac{b^2}{\pi^2}}}{\sqrt{a^2+(\frac{bt}{\pi}-z_p)^2}} =$$

$$= \left[\frac{bt}{\pi}-z_p=x\right] = \frac{\tau_0}{4\pi}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{\pi^2}}\int_{-b-z_p}^{b-z_p} dx\frac{\pi}{b}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\tau_0}{4b}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{\pi^2}}\left[\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right]_{-b-z_p}^{b-z_p} =$$

$$= \frac{\tau_0}{4b}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{\pi^2}}\ln\left|\frac{b-z_p+\sqrt{a^2+(b-z_p)^2}}{b+z_p-\sqrt{a^2+(b+z_p)^2}}\right|$$

VA13.14 Beräkna det magnetiska fältets vertikal-komponent på spolens symmetriaxel. Med symmetriaxeln på z-axeln och origo i mitten av spolen kan spolen beskrivas av $C=C_1+C_2$



$C_1: \mathbf{r}=(a\cos t, a\sin t, \frac{bt}{\pi})$, $-2n\pi\le t\le 2n\pi$ (2n varv)

$C_2: \mathbf{r}=(a+2nb\sin u, 0, 2nb\cos u)$ $0\le u\le\pi$

Ström = virvelstyrka = i

$$\mathbf{F}(z_p\hat{z})=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{i(\mathbf{r})d\mathbf{r}\times(\mathbf{r}_p-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|^3}$$

Vi söker $\mathbf{F}$:s z-komp. $F_z(z_p\hat{z})=\int_{C_1}+\int_{C_2}=I_1+I_2$

$$\left(d\mathbf{r}=(-a\sin t, a\cos t, \frac{b}{\pi}),\quad d\mathbf{r}\times(z_p\hat{z}-\mathbf{r})=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -a\sin t & a\cos t & b/\pi \\ -a\cos t & -a\sin t & z_p-\frac{bt}{\pi}\end{vmatrix}=\hat{z}a^2+\dots\right)$$

$$I_1=\frac{i}{4\pi}\int_{-2n\pi}^{2n\pi}\frac{a^2}{(a^2+(\frac{bt}{\pi}-z_p)^2)^{3/2}}=\frac{i}{4b}\left[\frac{2nb-z_p}{\sqrt{a^2+(2nb-z_p)^2}}+\frac{2nb+z_p}{\sqrt{a^2+(2nb+z_p)^2}}\right]$$

I_2: $d\mathbf{r}=du(2nb\cos u, 0, -2nb\sin u)$

$$\Rightarrow d\mathbf{r}\times(z_p\hat{z}-\mathbf{r})=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot\end{vmatrix}=0\cdot\hat{z}+\dots$$

$\Rightarrow$ inget bidrag från C_2 till fältets vertikalkomp. på z-axeln.

VA 13.19 En sfär, radie a, med konstant ytladdningstäthet sätts i rotation kring en diameter (z-axeln). Då uppkommer en ytström som i sfäriska koord. kan beskrivas med ytvirveltätheten $\mathbb{K} = K_0 \sin\theta\,\hat{\varphi}$
Beräkna fältet på z-axeln.

∴ ytvirvel

$$\mathbb{F}(z_p\hat{z}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\mathbb{K}(\mathbb{r})\times(z_p\hat{z}-\mathbb{r})}{|\mathbb{r}-z_p\hat{z}|^3}\,dS = \left[\hat{z} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\;\frac{K_0\sin\theta\left(\hat{\theta}(z_p\cos\theta - a) + \hat{r}z_p\sin\theta\right)}{(a^2+z_p^2-2az_p\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= \begin{bmatrix}\varphi\text{-int. gör att}\\ \text{endast vertikal-}\\ \text{komp. av } \hat{r}\,\&\,\hat{\theta}\\ \text{överlever}\end{bmatrix} = \frac{K_0\hat{z}a^2}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,\sin^2\theta\,\frac{((a-z_p\cos\theta)+z_p\cos\theta)}{(a^2+z_p^2-2az_p\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= \left[-\cos\theta = t\right] = \frac{K_0\hat{z}a^3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt\,(1-t^2)}{(a^2+z_p^2+2az_pt)^{3/2}} = [\text{P.I.}] = \left[\sqrt{a^2+z_p^2+2az_pt} = x\right] =$$

$$= K_0\hat{z}a^3\int_{|a-z_p|}^{|a+z_p|} dx\,\frac{z_p^2+a^2-x^2}{2a^3z_p^3} = \frac{-K_0}{2z_p^3}\hat{z}\left(\frac{|a+z_p|^3}{3} - \frac{|a-z_p|^3}{3} + (a^2+z_p^2)(|a-z_p| - \right.$$

$$\left. -|a+z_p|)\right) = \begin{cases} |z_p|<a & = \dfrac{2K_0\hat{z}}{3} \\[2ex] |z_p|>a & = \dfrac{2K_0\hat{z}}{3}\dfrac{a^3}{|z_p|^3}\end{cases}$$

Randvärdesproblem

Vi söker en lösning till Poissons ekv. $\nabla^2\phi = -\rho$ i en del av rummet (V)
Vi vet inte hur pot. ser ut utanför V, men om vi vet tillräckligt mycket om ϕ på randen av V (begr. ytan S) kan vi hitta en lösn.
$\hat{n}$: normal

Under villkoren ($\mathbb{r}_S \in S$)

1. $\phi(\mathbb{r}_S) = f(\mathbb{r}_S)$, Dirichlets randvillkor
2. $\hat{n}\cdot\nabla\phi = g(\mathbb{r}_S)$, Neumanns randvillkor
3. $\hat{n}\cdot\nabla\phi(\mathbb{r}_S) + \alpha\phi(\mathbb{r}_S) = h(\mathbb{r}_S)$ Churchills/Robins randvillkor

$\exists$ en entydig lösn. för det inre problemet (V begränsas helt av ytan S, $\hat{n}$ ut från V)

①: ϕ helt best.
②: ϕ best. så när som på en godt. konst.
③: Om $\alpha > 0$ pos. def. fkn ok $\Rightarrow$ entydig lösn.
Och för det yttre prob. ($\hat{n}$ in i V, ∞ finns med på ett hörn)
①: ϕ helt best.
②: ϕ best. ($\phi \to 0$ i ∞)
③: om $\alpha < 0$ neg. def. fkn. ok
Dessa lösningar är stabila m.a.p. variationer i randvillkoren (dvs ej kaosartade)
I princip innebär randvillkoren att man ersätter alla fördeln. utanför V med en ytkälla eller ytdipol på S. Detta innebär också t.ex. att $\int_S f\,dS = -\int_V \rho\,dV$ dvs att det strömmar ut lika mkt genom S som det produceras i V (kontinuitets ekv.)

Dirichlets randv. $\phi(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S)$ (S randyta till V där vi betraktar prob.)
Neumanns randvillkor $\hat{n}\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}_S) = g(\mathbf{r}_S)$
Churchills/Robins randvillkor $\hat{n}\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}_S) + \alpha\phi(\mathbf{r}_S) = h(\mathbf{r}_S)$
om t.ex. $f(\mathbf{r}_S) \equiv 0$ så pratar man om Dirichlets homogena randv.

<u>VA 15.3</u> Bestäm en lösn. till Poissons ekv. $\nabla^2\phi = -\rho_0 \frac{r}{a}$ för $r < a$ s.a.
$\phi|_{r=a} = 0$ (Dirichlets), Dirichlets homogena inre problem.
Ansätt $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r) \Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\rho_0 \frac{r}{a}$

$$\Rightarrow r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\rho_0 r^4}{4a} + C$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{\rho_0 r^3}{12a} - \frac{C}{r} + D$$

$\phi|_{r=0}$ begr. $\Rightarrow C = 0$

$$\phi|_{r=a} = 0 \Rightarrow D - \frac{\rho_0 a^3}{12a} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\rho_0}{12a}(a^3 - r^3)$$

Entydig lösn.

VA15.4 Bestäm den begränsade lösningen till Poissons ekv. $\nabla^2\phi = -\rho_0\left(\frac{a}{r}\right)^5 \sin\theta\cos\varphi$ utanför sfären $r=a$ som uppfyller ett homogent Dirichlets randvillkor på sfären.

Ansätt $\phi(\mathbf{r}) = f(r)\sin\theta\cos\varphi$

$\phi|_{r=a}=0 \quad \phi|_{r\to\infty}$ begr.

$$\nabla^2\phi = \sin\theta\cos\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f'(r))\right) + f(r)\left(\frac{\cos\varphi}{r^2\sin\theta}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta)}_{\cos^2\theta-\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}(-\cos\varphi)\right) =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f'(r))\right) + f(r)\frac{\cos\varphi}{r^2\sin\theta}\underbrace{\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 1\right)}_{-2\sin^2\theta} =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\left(\frac{1}{r^2}(2rf'(r) + r^2 f''(r) - 2f(r)\right)$$

$\therefore \frac{1}{r^2}(2rf'(r)+r^2f''(r)-2f(r)) = -\rho_0\left(\frac{a}{r}\right)^5$ eftersom diff. ekv. ska gälla för alla θ, φ

$f(r) = f^h(r) + f^p(r)$

Ansätt $f^h(r) = Cr^k \Rightarrow 2k + k(k-1) - 2 = 0 \Rightarrow k = +1, -2$

$\therefore f^h(r) = Cr + \frac{D}{r^2}$

Ansätt $f^p(r) = \frac{E}{r^3} \Rightarrow -6E + 12E - 2E = -\rho_0 a^5 \Rightarrow E = \frac{-\rho_0 a^5}{4}$

$\therefore f^p(r) = -\frac{\rho_0 a^5}{4r^3} \Rightarrow \phi(r) = \left(Cr + \frac{D}{r^2} - \frac{\rho_0 a^5}{4r^3}\right)\sin\theta\cos\varphi$

$\phi|_{r\to\infty}$ begr. $\Rightarrow C=0$

$\phi|_{r=a} = 0 \Rightarrow \frac{D}{a^2} - \frac{\rho_0 a^5}{4a^3} = 0 \Rightarrow D = \frac{\rho_0 a^4}{4}$

$\therefore \phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 a^2}{4}\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta\cos\varphi$

VA15.7 Bestäm den begränsade lösn. till Poissons ekv. $\nabla^2\psi(\rho,\alpha) = -\psi_0\frac{R^3}{\rho^5}\cos\alpha$ utanför cirkeln $\rho=R$ som uppfyller randvillkoret $\psi(R,\alpha) = \psi_0\sin\alpha$

2D-problem

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}$$

Ansätt $\psi = f(\rho)\cos\alpha + g(\rho)\sin\alpha \Rightarrow \nabla^2\psi = \cos\alpha\left(\frac{1}{\rho}(f'(\rho)+\rho f''(\rho)) - \frac{1}{\rho^2}f(\rho)\right) +$

$$+\sin\alpha\left(\frac{1}{\rho}(g'(\rho)+\rho g''(\rho)) - \frac{1}{\rho^2}g(\rho)\right) = -\psi_0\frac{R^3}{\rho^5}\cos\alpha$$

$\Psi(R,\alpha) = f(R)\cos\alpha + g(R)\sin\alpha = \Psi_0 \sin\alpha$

Diff. ekv. gäller $\forall \alpha \Rightarrow$ vi kan separera koeff. ekv. för $\cos\alpha$ & $\sin\alpha$

$$\cos\alpha: \quad ① \begin{cases} \frac{1}{\rho^2}\left(\rho f'(\rho) + \rho^2 f''(\rho) - f(\rho)\right) = -\frac{\Psi_0 R^3}{\rho^5} \\ f(R) = 0 \qquad f(\rho) \text{ begr.} \end{cases}$$

$$\sin\alpha: \quad ② \begin{cases} \frac{1}{\rho^2}\left(\rho g'(\rho) + \rho^2 g''(\rho) - g(\rho)\right) = 0 \\ g(R) = \Psi_0 \qquad g(\rho) \text{ begr.} \end{cases}$$

$\Rightarrow ① \Rightarrow$ Ansätt $f^h(\rho) = C\rho^k \Rightarrow k + k(k-1) - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$

$\therefore f^h(\rho) = \frac{C}{\rho} + D\rho$, $f(\rho)$ begr. $\Rightarrow D = 0$

Ansätt $f^p(\rho) = \frac{E}{\rho^3} \Rightarrow -3E + 12E - E = -\Psi_0 R^3 \Rightarrow E = -\frac{\Psi_0 R^3}{8}$

$\therefore f(\rho) = -\frac{\Psi_0 R^3}{8\rho^3} + \frac{C}{\rho}$

$f(R) = 0 \Rightarrow C = \frac{\Psi_0 R}{8}$

$② : \Rightarrow$ Ansätt $g(\rho) = C\rho^k \Rightarrow g(\rho) = F\rho + \frac{G}{\rho}$

$g(\rho)$ begr. $\Rightarrow F = 0$

$g(R) = \Psi_0 \Rightarrow G = \Psi_0 R$

$\therefore g(\rho) = \frac{\Psi_0 R}{\rho}$

$\therefore \Psi(\rho,\alpha) = \frac{\Psi_0}{8}\left(\frac{R^3}{\rho^3} - \frac{R}{\rho}\right)\cos\alpha + \frac{\Psi_0 R}{\rho}\sin\alpha$

VA 15.10 En lång cylinder (omgiven av luft) med radien a uppvärms av en likström som flyter längs den. Bestäm den stationära värmeförd. i cylindern.

Fouriers lag: $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$

$\nabla^2 T = \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = \text{konstant} = q_0$

Newtons avkylningslag

$\left(\underbrace{-\lambda \hat{n}\cdot\nabla T}_{\hat{n}\cdot\mathbf{J}} - \underset{\text{konst.}}{\alpha}(T - T_0)\right)\Big|_{\text{ytan}} = 0$

Churchills/Robins inre problem!, $\hat{n} = \hat{\rho}$ här

Både randvillkor & hållterm är vinkeloberoende

$\Rightarrow$ Ansätt $T(\rho,\alpha) = T(\rho)$ dvs lös prob.

$$\begin{cases} \nabla^2 T = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial \rho}\right) = q_0 \\ \lambda\frac{\partial T}{\partial\rho} + \alpha(T - T_0) = 0 \quad \text{på ytan } (\rho = a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{q_0\rho^2}{4} + C\ln\rho + D$$

T begr. i cyl. $\Rightarrow C = 0$, randvillkor $\Rightarrow$

$$\lambda\left(\frac{q_0\rho}{2}\right) + \alpha\left(\frac{q_0 a^2}{4} + D - T_0\right) = 0 \Rightarrow D = T_0 - \frac{q_0 a^2}{4} - \frac{q_0 a\lambda}{4\alpha}$$

$$\Rightarrow T(\rho) = \frac{q_0}{4}(\rho^2 - a^2) - \frac{q_0 a\lambda}{4\alpha} + T_0$$

$z_0 < 0$ ger uppvärmning

REPETITION

fält – en fkn med definitionsmängd i $\mathbb{R}^3$

ϕ, Ψ fkn $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalärt fält

$\mathbb{F}, \mathbb{A}$ fkn $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorfält

fält i fysiken är "snälla" oftast styckvis glatta oftast ej sing. i många pkter (ej i ∞)

Man kan visualisera fält med nivåytor skalärt fält = konst.

t.ex. ekvipot. yta, isoterm, isobar

fältlinjer – de linjer där den snabbaste förändr. av $\phi(\mathbb{r})$ sker, dvs i grad riktn.

Diffekv. för fältlinjer till ett skalärt fält

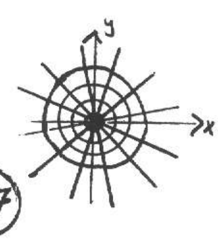
$$\frac{\partial \mathbb{r}(\tau)}{\partial\tau} = C\cdot\nabla\phi(\mathbb{r}(\tau)) = C\cdot\mathbb{F}(\mathbb{r}(\tau))$$

Nivåyta + fältlinje $\Rightarrow$ fältbild

nivåyta $\perp$ fältlinjen i varje pkt.

ex. $\phi(\mathbb{r}) = r$ nivåytor: r = konst. = cirklar (sfär) runt origo

fältlinjer: $\frac{\partial\mathbb{r}(\tau)}{\partial\tau} = \hat{r}$



$$\frac{\partial\mathbb{r}(\tau)}{\partial\tau} = \underbrace{\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial r}}_{\hat{r}}\frac{\partial r}{\partial\tau} + \underbrace{\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta}}_{r\hat{\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = \tau \\ \theta = \text{konst.} \\ \varphi = \text{konst.} \end{matrix}\right\} \text{strålar ut från origo.}$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ är en vektorop. fungerar oftast som en vektor

t.ex. $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\quad \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

$$\nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Men den transformeras <u>inte</u> som en vektor när vi byter koord. syst. I själva verket grad., div. & rot. transformeras alla olika. Vi kan beskriva transformationen m.h.a. skalfaktorer. Innan man gör sådana transf. kan man göra generella förenkl.

t.ex. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

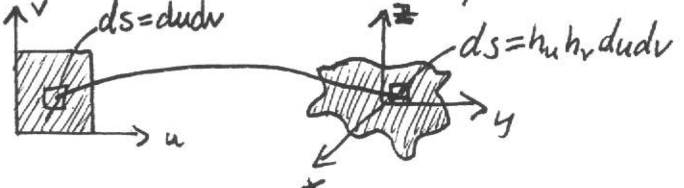
$\nabla(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\cdot\nabla)\mathbb{B} + (\mathbb{B}\cdot\nabla)\mathbb{A} + \mathbb{A}\times(\nabla\times\mathbb{B}) + \mathbb{B}\times(\nabla\times\mathbb{A})$

$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{A}) = 0$

$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{A}) = \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbb{A}) - \underbrace{(\nabla\cdot\nabla)}_{\nabla^2 = \Delta}\mathbb{A}$

För att beskriva kurvor, ytor, och (krokling.) föremål i xyz-rummet använder vi parameterframst.

t.ex.



ett kurvelement $d\mathbb{r} = \mathbb{r}'(u)\,du$

ex. cirkel runt origo med radie 5 $\mathbb{r} = (5\cos\varphi, 5\sin\varphi, 0)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$\Rightarrow d\mathbb{r} = 5(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,d\varphi$

ett ytelement $d\mathbb{S} = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial v}\,du\,dv = (\hat{u}\times\hat{v})h_u h_v\,du\,dv = \hat{\omega} h_u h_v\,du\,dv$

(för del av ort. koord. sys.)

ex. cirkel ≤ 5 $\mathbb{r} = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, 0)$

$d\mathbb{S} = (\hat{\rho}\times\rho\hat{\alpha})\,d\rho\,d\alpha = \hat{z}\rho\,d\rho\,d\alpha$

ett volymselement

$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw = h_u h_v h_w\,du\,dv\,dw$ för ett ort. syst.

Tangentbasvektorer $\mathbb{t}_i = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u_i}$
Normalbasvektorer $\mathbb{n}_i = \nabla u_i$
$\Big\}$ // om ort. system.

<u>ort. system</u>

$|\mathbb{t}_i| = h_i$ skalfaktorer $\quad \hat{u}_i = \frac{1}{h_i}\mathbb{t}_i = h_i \mathbb{n}_i \quad , \mathbb{t}_i = h_i \hat{u}_i$

$\left.\begin{matrix}\nabla \\ \nabla\cdot \\ \nabla\times\end{matrix}\right\}$ i kroklinj. koord. syst. beskrivs m.h.a. skalfakt. i det koord. syst.

ex. $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\nabla v + \frac{\partial\phi}{\partial w}\nabla w = \sum_{i=1}^{3}\frac{\hat{u}_i}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}$

ang. Integraler: beskriver olika saker beroende på vilka fält som är inbl.

t.ex. $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ – arbete om man rör sig i fältet $\mathbb{F}$ längs C

$\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$ – totala "fältflödet" genom S (räknat med tecken)

$\int_V \phi\, dV$, $\int_V \mathbb{F}\, dV$ – medelvärdet i V

$\int_S \phi\, d\mathbb{S}$ – den totala kraft som verkar på S p.g.a. trycket ϕ

$\int_S \mathbb{F}\, dS$ – medelv. av $\mathbb{F}$ på ytan S

(Ett alt. till att räkna int. kan vara att besk. m.h.a. pot.)

Potentialer:

$\nabla\times\mathbb{F} = 0 \Rightarrow \mathbb{F}$ virvelfritt $\Rightarrow \exists$ skalär pot. $\phi \Rightarrow \mathbb{F} = -\nabla\phi$

$\nabla\cdot\mathbb{F} = 0 \Rightarrow \mathbb{F}$ källfritt $\Rightarrow \exists$ vektorpot. $\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{F} = \nabla\times\mathbb{A}$

Källtyp	Potential	Fältet $\mathbb{F}$	Symbol/beteckning	$\nabla\cdot\mathbb{F}$	$\nabla\times\mathbb{F}$	exempel
rymdkälla	$\phi(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_{r=\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\mathbb{r})dV}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert}$	$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\mathbb{r})(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})dV}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert^3}$	$\rho(\mathbb{r})$	$\rho(\mathbb{r})=-\Delta\phi$	0	massfördeln. (⇒ gravitation)
ex. ortsvekt. som fält	$\phi(\mathbb{r})=-\frac{1}{2}r^2$	$\mathbb{r}=r\hat{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}=$ $=\rho\hat{\rho}+z\hat{z}$	—	3	0	—
rymdvirvel	$\mathbb{A}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{J}(\mathbb{r})dV}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert}$	$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{J}(\mathbb{r})\times(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})dV}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert^3}$	$\mathbb{J}(\mathbb{r})$	0	$\mathbb{J}(\mathbb{r})=\nabla\times(\nabla\times\mathbb{A})$	en strömförd. i en kabel (⇒ magnetfält)
ytkälla på ytan S	$\phi(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\sigma(\mathbb{r})dS}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert}$	$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\sigma(\mathbb{r})(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})dS}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert^3}$	$\sigma(\mathbb{r}_S)=\hat{n}\cdot(\mathbb{F}_+-\mathbb{F}_-)$	$0\ (\mathbb{r}\notin S)$	0	elektrisk ytladdning på en stör.
ytvirvel på ytan S	$\mathbb{A}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\mathbb{K}(\mathbb{r})dS}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert}$	$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\mathbb{K}(\mathbb{r})\times(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})dS}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert^3}$	$\mathbb{K}(\mathbb{r}_S)=\hat{n}\times(\mathbb{F}_+-\mathbb{F}_-)$	0	$0\ (\mathbb{r}\notin S)$	ytström på en stör (⇒ magnetfält)
linjekälla på linjen C	$\phi(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\tau(\mathbb{r})\lvert d\mathbb{r}\rvert}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert}$	$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\tau(\mathbb{r})(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})\lvert d\mathbb{r}\rvert}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert^3}$	$\tau(\mathbb{r})=\frac{1}{\delta c}\int_{S_\varepsilon}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$ δc = längd på cyl. S_ε S_ε = cylinder, radie ε som omsluter C	$0\ (\mathbb{r}\notin C)$	0	en strömningskälla t.ex. en spricka i en damm.
ex. linjekälla med $\tau=2\pi$ på z-axeln	$\phi(\rho,\alpha,z)=-\ln\rho$	$\frac{\hat{\rho}}{\rho}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{x^2+y^2}=\frac{\hat{r}}{r}+\frac{\cot\theta}{r}\hat{\theta}$	—	$0\ (\mathbb{r}\notin\hat{z})$	0	—
virveltråd på linjen C	$\mathbb{A}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{i(\mathbb{r})\,d\mathbb{r}}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert}$	$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{i(\mathbb{r})d\mathbb{r}\times(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert^3}$	$i(\mathbb{r})=\int_{C_{\varepsilon(\mathbb{r})}}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$	0	$0\ (\mathbb{r}\notin C)$	Biot-Savarts lag. (magn. fältet från en tunn ledare.)
ex. virveltråd längs z-axeln med styrka 2π	$\phi(\rho,\alpha,z)=-\alpha$ (ej på halvplanet $y=0$, $x\geq 0$)	$\frac{\hat{\alpha}}{\rho}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{x^2+y^2}=\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}$	—	0	$0\ (\mathbb{r}\notin\hat{z})$	—
Pkt-källa i $\mathbb{r}_Q$	$\phi(\mathbb{r})=\frac{q}{4\pi}\frac{1}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q\rvert}$	$\frac{q}{4\pi}\frac{\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q\rvert^3}$	$q=4\pi\lim_{\mathbb{r}\to\mathbb{r}_Q}\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q\rvert\phi(\mathbb{r})=$ $=4\pi\lim_{\mathbb{r}\to\mathbb{r}_Q}\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q\rvert(\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q)\cdot\mathbb{F}(\mathbb{r})$	0	0	elektrisk pkt.laddn.

70

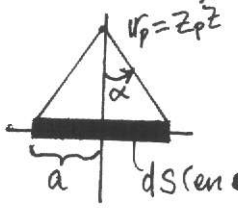
Källtyp	Potential	Fältet $\mathbb{F}$	Symbol/Beteckning	$\nabla\cdot\mathbb{F}$	$\nabla\times\mathbb{F}$	exempel
pktkälla i origo med $q=4\pi$	$\phi(\mathbb{r})=\frac{1}{r}$	$\frac{\hat{r}}{r^2}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=$ $=\frac{\rho\hat{\rho}+z\hat{z}}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$	—	0	0	—
pktdipol i $\mathbb{r}_Q$ med dipolmomentet $\mathbb{m}$	$\phi(\mathbb{r})=\frac{-1}{4\pi}(\mathbb{m}\cdot\nabla)\frac{1}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q\rvert}$	$\mathbb{F}(\mathbb{r})=\frac{-1}{4\pi}(\mathbb{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_Q\rvert^3}$	$\lvert\mathbb{m}\rvert=m=\delta q$ där $\delta\to 0$ (avst. mellan två pkt.laddn) $q\to\infty$ (laddn. hos två pkt.laddn.) $\mathbb{m}$ riktat längs axeln mellan de två pktladdn.	0	0	$\delta\begin{cases}\cdot +q\\ \cdot -q\end{cases}$ HCl.
pktdipol i origo med dipolmomentet $\mathbb{m}=4\pi\hat{z}$	$\frac{z}{r^3}=\frac{\cos\theta}{r^2}$	$\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r}+\frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}=$ $=\frac{3\rho z\hat{\rho}+(2z^2-\rho^2)\hat{z}}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$	—	0	0	—
ytdipol på ytan S	$\phi(\mathbb{r}_p)=\frac{-1}{4\pi}\int_S \mu(\mathbb{r})\,d\Omega$ $d\Omega$ = rymdvinkelelementet av dS sett från $\mathbb{r}_p$.	$\mathbb{F}(\mathbb{r}_p)=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\mu(\mathbb{r})(\hat{n}\cdot\nabla)(\mathbb{r}_p-\mathbb{r})}{\lvert\mathbb{r}-\mathbb{r}_p\rvert^3}dS$	$\mu(\mathbb{r})=\phi_+-\phi_-$ (ytdipolmomentet $\boldsymbol{\mu}(\mathbb{r})=\mu(\mathbb{r})\hat{n}$)			ett tunnt metalliskt skal med laddning.
ex. konstant ytdipol på S	$\frac{-\mu_0\Omega}{4\pi}$	Konstant ytdipol på en sluten yta $\phi=\begin{cases}0 & \text{utanför}\\ -\mu_0 & \text{innanför}\end{cases}$				
Konstant ytdipol på cirkelskiva i x-y-planet.	$\phi(z_p\hat{z})=\frac{-\mu_0}{4\pi}4\pi(\sin^2\frac{\alpha}{2})\mathrm{sgn}(z_p)$ $\alpha=\arctan\frac{R}{z_p}$					

$d\Omega$ rymdvinkelelementet som svarar mot dS

 dS

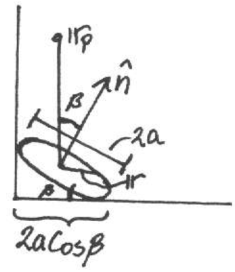
$d\Omega$ $\mathbf{r}_p$

enklare fall



$\alpha = \arctan\frac{a}{z_p} \Rightarrow d\Omega = 4\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\pi\left(1 - \frac{z_p}{\sqrt{z_p^2 + a^2}}\right) \simeq$

$\simeq [z_p \gg a] = \frac{\pi a^2}{z_p^2} = \frac{dS}{z_p^2}$



"arean" på cirkelskivan sett uppifrån $= \pi a \cdot a\cos\beta = \pi a^2 \cos\beta$

$\Rightarrow d\Omega = -\frac{dS\cos\beta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|^2} = \frac{dS\,\hat{n}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|^3}$

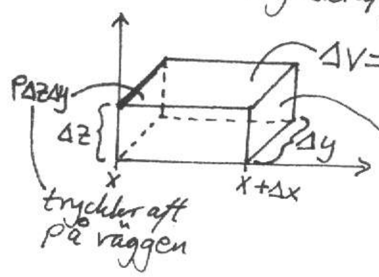
Randvärdesproblem

Vi söker lösn. till Poissons ekv. $\nabla^2\phi = -\rho$ i ett begr. område

$$\begin{cases} \text{Dirichlets randvillkor } \phi(\mathbf{r}_S) = f(\mathbf{r}_S) & (S = \text{randyta till det begr. området}) \\ \text{Neumanns randv. } \hat{n}\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}_S) = g(\mathbf{r}_S), & \mathbf{r}_S \in S \\ \text{Churchills/Robins randv. } \hat{n}\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}_S) + \alpha\,\phi(\mathbf{r}_S) = h(\mathbf{r}_S) \end{cases}$$

α: pos. el. neg. def. fkn. beroende på område.

Under dessa randv. $\exists$ en entydig lösn. till prob.



$P(x+\Delta x)\Delta y\Delta z = \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \Delta z$

$\Rightarrow$ resulterande kraft i x-led. $-\frac{\partial P}{\partial x}\Delta y\Delta z\Delta x$

— " —————— y-led. $-\frac{\partial P}{\partial y}\Delta V$

—— " ————— z-led $-\frac{\partial P}{\partial z}\Delta V$

$\therefore$ Totala tryckkraften på $\Delta V = \underbrace{-\nabla P}_{\text{tryckkraftstäthet (inre krafter)}}\Delta V$

yttre krafter kan också påverka om konservativa

$\mathbf{F} = -\nabla\phi \Rightarrow -\nabla\phi\,\rho$ – kraft/volymsenh.

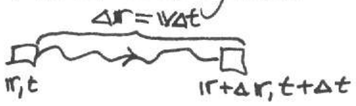
$\mathbf{F}$: kraft/massaenh.

Newton II:a

$\cancel{f_{viskös}} - \nabla p - \rho \nabla \phi = \rho \mathbf{a} =$ kraft/vol.enh

"tröghet i vattnet"

Vill beskriva vätskan i termer av ett hastighetsfält $\mathbf{a}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{r},t)$ mäter hur hastigheten ändras i en pkt. $\mathbf{r}$. Kan istället välja att mäta hastigheten hos ett volymselement som rör sig.



$$\mathbf{a} = \frac{\partial v}{dt}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}, t+\Delta t) = \mathbf{v}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\overbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}^{v_x}\Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \Delta t$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

$$\cancel{f_{viskös}} \boxed{-\nabla p - \rho\nabla\phi = \rho\mathbf{a} = \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}}$$ Eulers ekv.

def. vorticitet $\vec{\Omega} = \nabla\times\mathbf{v}$ "virvlingstendens" + Eulers ekv.

$\Rightarrow$ Bernoullis ekv. beskriver stationärt flöde, där är fältlinjerna till hast. fältet en beskrivning av hur vätskan strömmar $\Leftrightarrow$ energin bevarad

(ta med) $\Rightarrow$ Viskositet $\Rightarrow$ Navier-Stokes ekv.

<u>PLKA.9</u> Ett kroklinj. koord. system, $\mu\theta\varphi$ har koord. ytorna

μ-ytor: $$\frac{x^2+y^2}{d^2\sinh^2\mu} + \frac{z^2}{d^2\cosh^2\mu} = 1$$

θ-ytor: $$\frac{z^2}{d^2\cos^2\theta} - \frac{x^2+y^2}{d^2\sin^2\theta} = 1$$

φ-ytor: $x\tan\varphi - y = 0$

Bestäm tangentbasvekt. & skalfakt.

Försök uttrycka x, y, z i μ, θ, φ

Ansätt
$$\left.\begin{aligned} x &= A(\theta,\varphi)\sinh\mu \\ y &= B(\theta,\varphi)\sinh\mu \\ z &= C(\theta,\varphi)\cosh\mu \end{aligned}\right\}$$ från μ-ytan.

θ-ytan $\Rightarrow x, y \underset{}{\overset{\text{prop. mot}}{\propto}} \sin\theta$

$z \propto \cos\theta$

φ-ytan $\Rightarrow z$ ober. av φ

$\left.\begin{array}{l} x \propto \cos\varphi \\ y \propto \sin\varphi \end{array}\right\}$ en möjlig lösn.

$\therefore$ $x = A \sinh\mu \sin\theta \cos\varphi$
$y = A \sinh\mu \sin\theta \sin\varphi$
$z = B \cosh\mu \cos\theta$

μ-ytan: $\frac{A^2}{d^2}\sin^2\theta + \frac{B^2}{d^2}\cos^2\theta = 1 \Rightarrow A = B = d$

θ-ytan: $\cosh^2\mu - \sinh^2\mu = 1$ ok.

Vilka värden på μ, θ, φ är ok?

$\therefore$ $\mathbf{r} = d(\sinh\mu\sin\theta\cos\varphi, \sinh\mu\sin\theta\sin\varphi, \cosh\mu\cos\theta)$

$\mu \geq 0$ $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
$0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < \mu < \infty$

tangentbasv.

$$\text{ort.}\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} = d(\cosh\mu\sin\theta\cos\varphi, \cosh\mu\sin\theta\sin\varphi, \sinh\mu\cos\theta) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = d(\sinh\mu\cos\theta\cos\varphi, \sinh\mu\cos\theta\sin\varphi, -\cosh\mu\sin\theta) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = d\sinh\mu\sin\theta(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \end{cases}$$

Skalfakt. $h_\mu = d\sqrt{\cosh^2\mu\sin^2\theta + \sinh^2\mu\cos^2\theta} = d\sqrt{\cosh^2\mu - \cos^2\theta}$
$h_\theta = d\sqrt{\cosh^2\mu - \cos^2\theta}$
$h_\varphi = d|\sinh\mu\sin\theta|$

<u>PLK.C12</u>

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \frac{(r-\cos\theta)\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}}{(1-2r\cos\theta + r^2)^{3/2}} & r\sin\theta < 1 \\ \frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta} & r\sin\theta > 1 \end{cases}$$

Bestäm källor & virvlar

Skriv om till lämpliga koord. sys.

I cyl. koord.

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \frac{\rho\hat{\rho} + z\hat{z} - \hat{z}}{((z-1)^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{r}-\hat{z}}{|\mathbf{r}-\hat{z}|^3}, & \rho < 1 \\ \frac{\hat{\varphi}}{\rho} & \rho > 1 \end{cases}$$

pktkälla i (0,0,1) med styrka 4π

(pktkälletest $4\pi \lim_{\mathbb{r}\to\hat{z}} |\mathbb{r}-\hat{z}|(\mathbb{r}-\hat{z})\cdot\mathbb{F} = 4\pi$ = styrkan hos pktkällan)

$\Rightarrow$ käll & virvelfritt i övrigt för $\rho < 1$

$\rho > 1$: $\mathbb{F}$ käll & virvelfritt eftersom $\frac{\hat{\alpha}}{\rho}$ fältet från en virveltråd på z-axeln (z-axeln ej i omr.)

ytförd. på $\rho = 1$?

ytkälla ? $\hat{\rho}\cdot(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = \dfrac{-1}{((z-1)^2+1)^{3/2}} = \sigma(\mathbb{r})$

ytvirvel ? $\hat{\rho}\times(\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = \hat{z} + \dfrac{(z-1)\hat{\alpha}}{((z-1)^2+1)^{3/2}} = \mathbb{K}(\mathbb{r})$

$\therefore$ Pktkälla i (0,0,1)
ytkälla på $\rho=1$
ytvirvel på $\rho=1$

PLK B.18 $\mathbb{F}$ & S ges av $\mathbb{F} = \dfrac{F_0}{ar}\left[(a^2+2r^2\sin^2\theta)\hat{r} + (a^2\cot\theta + r^2\sin 2\theta)\hat{\theta} + \dfrac{a^2+r^2\sin^2\theta}{\sin\theta}\hat{\varphi}\right]$

$S: r\sin\theta + r\cos\theta = a \quad , \cos\theta > 0$

Beräkna $I = \int_S \mathbb{F}\times d\mathbb{S}$

i cyl. koord.

$S: \rho + z = a \quad z > 0$ en kon med bas i $z=0$ & topp i $z=a$

$$\mathbb{F} = \frac{F_0}{a}\left[\frac{a^2\hat{\rho}}{\rho} + 2\rho\hat{\rho} + \rho\hat{\alpha} + \frac{a^2\hat{\alpha}}{\rho}\right]$$

$$\int_S d\mathbb{S}\times\mathbb{F} = \int_V dV\, \nabla\times\mathbb{F}$$

$\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_3$

$$\nabla\times\mathbb{F}_1 = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{F_0 a}{\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ , \rho\neq 0 \ , \quad \nabla\times\mathbb{F}_2 = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{F_0 2\rho}{a} & \frac{F_0\rho^2}{a} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2F_0\hat{z}}{a}$$

$$\nabla\times\mathbb{F}_3 = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\alpha} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{aF_0\rho}{\rho} & 0 \end{vmatrix} = 0 \ , \rho\neq 0$$

$I = I_1 + I_2 + I_3$

$$I_2 = -\int_{V_{kon}} dV \frac{2F_0\hat{z}}{a} = -\frac{2F_0\hat{z}}{a}\cdot\frac{\pi a^3}{3} = -\frac{2\pi F_0 a^2\hat{z}}{3}$$

I_1: Betrakta volymen $\mathbb{V} = V_{kon} \setminus V_{\varepsilon\text{-cylinder}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_1 = -\int_S d\mathbb{S} \times \mathbb{F}_1 = -\int_V dV \underbrace{\nabla \times \mathbb{F}_1}_{=0} - \int_{S_{\varepsilon}} d\mathbb{S} \times \mathbb{F}_1 = -\int_0^{a}\int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\alpha\, dz\, \hat{\rho} \times \left(F_0 a \frac{\hat{\rho}}{\rho}\right) = 0$$

(S_{ε} utåt normal)

$$I_3: -\int_V dV \underbrace{\nabla \times \mathbb{F}_3}_{=0} - \int_{S_\varepsilon} d\mathbb{S} \times \mathbb{F}_3 = -\int_0^{a}\int_0^{2\pi} \varepsilon\, d\alpha\, dz\, \hat{\rho} \times \left(\frac{\hat{\alpha}}{\varepsilon} F_0 a\right) = -\hat{z} F_0 a^2 \pi 2 = -2\pi F_0 a^2 \hat{z}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{8}{3}\pi F_0 a^2 \hat{z}$$

Integralen över bottenplattan försvinner pga $\int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \hat{\alpha}, \hat{\rho} = 0$

$(d\mathbb{S} \times \mathbb{F}_{\text{bottenpl.}} = \hat{\alpha}$ el. $\hat{\rho})$

<u>PLK D.14</u> På sfären $r = a$ finns en ytkälla med täthet $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

Bestäm potentialen & vektorfältet i alla pkter på z-axeln.

Källan & därmed fältet är rot. symm. kring z-axeln.

Räcker räkna ut pot. $\left(\mathbb{F}(z_p\hat{z}) = -\frac{\partial \phi}{\partial z_p}(z_p \hat{z})\hat{z}\right)$

$$\phi(z_p\hat{z}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma(\mathbb{r})\, dS}{|\mathbb{r} - z_p\hat{z}|} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \frac{\sigma_0 \cos\theta}{\sqrt{a^2 + z_p^2 - 2az_p\cos\theta}} = \left[-\cos\theta = t\right] =$$

$$= \frac{\sigma_0 a^2}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt\,(-t)}{\sqrt{a^2+z_p^2-2az_p t}} = [\text{P.I}] = -\frac{a^2\sigma_0}{2}\left(\frac{|a+z_p| + |a-z_p|}{a z_p} - \frac{1}{az_p}\left(\frac{1}{3az_p}\left(|a+z_p|^3 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - |a - z_p|^3\right)\right)\right) = \begin{cases} |z_p| < a & \frac{\sigma_0 z_p}{3} \\ |z_p| > a & \frac{a^3\sigma_0}{3z_p^2}\operatorname{sgn} z_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}(z_p\hat{z}) = \begin{cases} -\frac{\sigma_0 \hat{z}}{3}, & |z_p| < a \\ \frac{2a^3\sigma_0 \operatorname{sgn} z_p}{3z_p^3}, & |z_p| > a \end{cases}$$

<u>PLK B.6</u> $\mathbb{B}$ & S ges av $\mathbb{B} = \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})$

$S: \rho + z = 2a \quad 0 < z < a$

Bestäm normalytint. av $\mathbb{B}$ över S dvs $I = \int_S \mathbb{B} \cdot d\mathbb{S}$

parametrisering: α, z

$\mathbb{r} = ((2a-z)\cos\alpha, (2a-z)\sin\alpha, z)$

$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial z} = (-\cos\alpha, -\sin\alpha, 1) = -\hat{\rho} + \hat{z}$

$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \alpha} = (2a-z)(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0) = (2a-z)\hat{\alpha}$

$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = (2a - z)(-\hat{z} - \hat{\rho})$

OBS! normalriktn. inte best.

$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} d\alpha dz (2a - z)(-2a)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{((2a-z)^2 + z^2)^{3/2}}\right) =$

$= -4\pi a \int_0^a dz (2a - z)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(4a^2 - 4az + 2z^2)^{3/2}}\right) = \ldots = -(6\pi + \sqrt{2}\pi)$

Ingen spec. riktning på $S \Rightarrow I = \pm(6\pi + \sqrt{2}\pi)$

$\left(\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{a^3} + \frac{\hat{r}}{r^2}\right.$ – Gauss sats$\left.\right)$

<u>PLKB.2</u> $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F} = F_0\left[\left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a}\cos^2\alpha\right)\hat{\rho} - \frac{\rho}{2a}\sin 2\alpha\,\hat{\alpha} + \left(\frac{z}{a}\right)^2\hat{z}\right]$

$C: \mathbf{r} = (a + 2a\cos\beta,\ 2a + 3a\sin\beta,\ \frac{4a\beta}{\pi}) \qquad \beta \in [0, 2\pi]$

Beräkna tangentlinjeint. av $\mathbf{F}$ längs C från pkten $P = (3a, 2a, 0)$ till pkten $Q = (a, 5a, 2a)$

$\mathbf{F} = F_0 \frac{a\hat{\rho}}{\rho} + F_0\frac{x\hat{x}}{a} + \frac{F_0}{a^2} z^2\hat{z}$

C_{PQ}: kurvan C för $0 \le \beta \le \pi/2$

$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\rho \neq 0)$

Slut med de tre kurvbitarna $C_1: (3a, 2a, 0) \to (a, 2a, 0)$

$C_2: (a, 2a, 0) \to (a, 5a, 0)$

$C_3: (a, 5a, 0) \to (a, 5a, 2a)$

ok att sluta med C_1, C_2, C_3 ytan som uppstår innehåller inte z-axeln i någon pkt, och är styckvis glatt.

$\therefore I = \int_{C_{PQ}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = [\text{Stokes sats}] = \int_{C_1 + C_2 + C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

$\therefore I = I_1 + I_2 + I_3$

$I_1 = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{3a}^{a} \mathbf{F}\cdot\hat{x}\,dx = \int_{3a}^{a} dx\left(\frac{xF_0 a}{x^2 + 4a^2} + \frac{F_0 x}{a}\right) = \frac{F_0 a}{2}\ln\frac{5a^2}{13a^2} + \frac{F_0}{2a}(a^2 - 9a^2)$

$I_2 = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{2a}^{5a} \mathbf{F}\cdot\hat{y}\,dy = \int_{2a}^{5a} dy\left(\frac{yF_0 a}{a^2 + y^2}\right) = \frac{F_0 a}{2}\ln\frac{26a^2}{5a^2}$

$I_3 = \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2a} dz \frac{F_0 z^2}{a^2} = \frac{8F_0 a}{3}$

$\therefore I = F_0 a\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{4}{3}\right]$

Repris.

VA15.10 En lång cylinder omgiven av luft med radien a uppvärms av en likström som flyter längs den. Bestäm den stationära värmeförd. i cylindern. Cylinderns yta kyls enligt Newtons avkylningslag

$$-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{värmeledn. förmågan}}}{\lambda}\hat{n}\cdot(\nabla T)\Big|_{ytan} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konst.}}}{\alpha}(T-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{omgivande luftens temp.}}}{T_0})\Big|_{ytan}$$

Cylindern längs z-axeln (radie R) $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \rho}\Big|_{\rho=R} = -\frac{\alpha}{\lambda}(T-T_0)\Big|_{\rho=R}$

uppvärmning i hela cylindern (jämnt fördelad) med täthet q_0

dvs. $\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbb{J} &= q_0\\ \mathbb{J} &= -\lambda\nabla T\end{aligned}\right\}\nabla^2 T = -\frac{q_0}{\lambda}$

∴ Vi ska lösa prob.

$$\begin{cases}\nabla^2 T = -\frac{q_0}{\lambda} & \rho \leq R\\ \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{\alpha}{\lambda}(T-T_0)\right)\Big|_{\rho=R} = 0\end{cases}$$

dvs Churchills inre prob.

($\frac{\alpha}{\lambda}$ pos. def. fkn.)

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \underbrace{0}_{\text{inget vinkelber.}} = -\frac{q_0}{\lambda} \Rightarrow \ldots \Rightarrow T(\rho) = -\frac{q_0\rho^2}{4\lambda} + C\ln\rho + D$$

ändlig temp. för $\rho = 0 \Rightarrow C = 0$

randvillkor : $-\frac{q_0 R}{2\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda}\left(-\frac{q_0 R^2}{4\lambda} + D - T_0\right) = 0$

$$\Rightarrow D = T_0 + \frac{q_0 R^2}{4\lambda} + \frac{q_0 R}{4\alpha}$$

∴ T ges av $T(\rho) = \frac{q_0}{4\lambda}(R^2 - \rho^2) + \frac{q_0 R}{4\alpha} + T_0$

PLKC.5 $\mathbb{F}$ ges av sin pot. ϕ

$$\phi = \frac{a^2}{r^2}\cos\theta + \frac{2a}{r} - \frac{r\cos\theta}{a} + \ln a - \ln r - \ln\sin\theta$$

Bestäm källor & dipoler

Inga ytfördeln. (ϕ kont. & troligen $\nabla\phi$ också)

$\phi_1 = -\ln r - \ln\sin\theta = -\ln r\sin\theta = -\ln\rho$

$-\frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}\hat{\rho} = (-\nabla\phi_1) = \frac{\hat{\rho}}{\rho} \Rightarrow$ linjekälla längs z-axeln med styrka $2\pi = \tau$

$\phi_2 = \frac{2a}{r}$ pkt källa i origo med styrka $q = 8\pi a$

$\phi_3 = \frac{a^2\cos\theta}{r^2}$ jmfr. pot. från en pktdipol $\phi = \frac{\mathbb{m}\cdot\mathbb{r}}{4\pi r^3}$

$\Rightarrow \mathbb{m} = 4\pi a^2 \hat{z}$ ger ϕ_3

$\phi_4 = \left(-\frac{r\cos\theta}{a} + \ln a\right) = \frac{-z}{a} + \ln a$ kan innehålla de ev. rymdförd. eller ytförd. som ger upphov till pot. ϕ

ytförd.? ϕ_4 är kont. der $\Rightarrow$ inga ytkällor

rymdförd.? $\rho(\mathbb{r}) = -\Delta\phi = 0$, dvs inga rymdförd.

$\therefore$ ϕ uppstår från en punktdipol, en punktkälla & en linjekälla

<u>PLK B.16</u> $\mathbb{F}$ & S är givna $\mathbb{F} = F_0\left[\left(\frac{4a^2}{r^2} + \frac{2a}{r} + \frac{r^3}{a^3}\sin\theta\cos^3\theta\sin\varphi\right)\hat{r} + \right.$

$\left. + \left(\frac{2a\cot\theta}{r} - \frac{r^3}{a^3}\sin^2\theta\cos^2\theta\sin\varphi\right)\hat{\theta}\right]$

$S: r^2\sin^2\theta + ar\cos\theta = 3a^2 + 2ar\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta > 0$

Bestäm $\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$

Lämpligt koord. syst.? $\mathbb{F} = F_0\frac{4a^2}{r^2}\hat{r} + 2F_0 a\frac{\hat{\rho}}{\rho} + \frac{\rho z^2}{a^3}F_0\hat{z}$

$S: x^2 + y^2 + az = 3a^2 + 2ay$, $z > 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-a)^2 + az = 4a^2$, $z > 0$

Dela upp fältet $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_3$

$\mathbb{F}_1$ & $\mathbb{F}_2$: $\nabla\cdot\mathbb{F}_1 = 0$ $\quad \nabla\cdot\mathbb{F}_2 = 0$ (Gauss sats)

F_1: origo måste undantas $\Rightarrow$ slut med bottenplatta + ε halvsfär runt origo.

$\mathbb{F}_2$: slut med bottenplatta + ε-cylinder.

F_3 : flytta origo till $y = a$, $x = z = 0 \Rightarrow S: x^2 + y^2 = 4a^2 - az$

parametrisera med t.ex. ρ, α, $\Rightarrow \mathbb{r} = \left(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha, \frac{4a^2 - \rho^2}{a}\right)$

$\Rightarrow d\mathbb{S} = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\alpha}\,d\rho\,d\alpha$