FFM232− Vektorfält och klassisk fysik F

Föreläsningsanteckningar 2010

Föreläsare: Martin Cederwall
Antecknare: Simon Vajedi

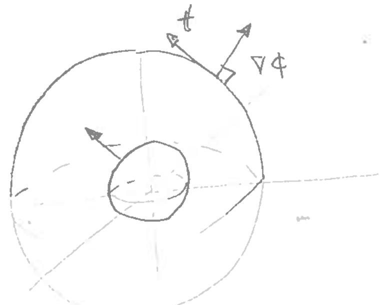
Nivåytor, fältlinjer

Nivåyta: mängden av lösningar $\mathbf{r}$ till ekv. $\phi(\mathbf{r}) = \phi_0$

Ex

$$\phi(\mathbf{r}) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \phi(\mathbf{r}) = \phi_0 : \text{ sfärer med centrum i origo}$$

$$\nabla\phi = (2x, 2y, 2z) = 2\mathbf{r}$$



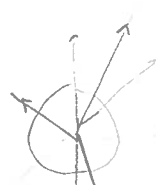
Låt $\mathbf{t}$ vara en tangentvektor till nivåytan genom $\mathbf{r}$

$\phi = \phi_0$ på nivåytan $\Rightarrow \mathbf{t} \cdot \nabla\phi = 0$

$\mathbf{t} \perp \nabla\phi$

$\mathbf{e} \cdot \nabla\phi = |\nabla\phi| \cos\alpha$

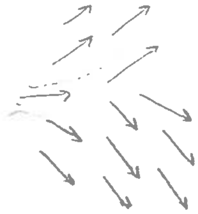
Fältlinjer är kurvor som i varje pkt. har $\nabla\phi$ som tangentvektor



Fältlinjer för vektorfält:

de kurvor som har $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ som tangentvektor överallt

Tänk t.ex. på fältlinjer för $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ som banor för små volymelement i ett hastighetsfält $\mathbf{u}(\mathbf{r})$



Fält

Skalärt fält $\phi(\mathbb{r})$, $(\phi(\mathbb{r}, t))$

Vektorfält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$, $(\mathbb{F}(\mathbb{r}, t))$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$

Ex:

temperatur
potential

kraftfält
hast. fält hos fluid
El./magn. fält

Partiella Derivator

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \qquad \left(\text{notation: } \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \text{ osv.}\right)$$

vektoroperator: $\nabla = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z$

Gradient & riktningsderivata av skalärt fält $\phi(\mathbb{r})$

- Hur ändras ϕ när man flyttar sig i rummet?

$$d\phi(\mathbb{r}) = \underbrace{\phi(\mathbb{r}+d\mathbb{r})}_{\phi(x+dx,\, y+dy,\, z+dz) \,=\, \phi(x,y,z) + dx\,\partial_x\phi + dy\,\partial_y\phi + dz\,\partial_z\phi} - \phi(\mathbb{r}) = dx\,\partial_x\phi + dy\,\partial_y\phi + dz\,\partial_z\phi = (dx, dy, dz)\cdot\overbrace{(\partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)}^{\nabla\phi \text{ — gradienten av } \phi} =$$

vektorfält, skalärt fält, "fi"

$$= d\mathbb{r}\cdot\nabla\phi$$

Def: Riktningsderivata i riktningen $\mathbb{e}$: $\mathbb{e}\cdot\nabla\phi$, $|\mathbb{e}| = 1$

$\underline{\text{Ekv.}}$: $\frac{d\mathbb{r}}{dt} = \mathbb{u}(\mathbb{r}(t))$

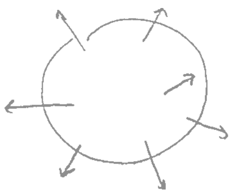
parameter-"tid"

Mer allmänt : $\frac{d\mathbb{r}}{d\tau} = c(\tau)\,\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))$

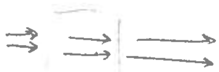
Divergens, rotation

Divergens : $\nabla \cdot \mathbb{F}(\mathbb{r}) = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$ vektor → skalär

Rotation : $\nabla \times \mathbb{F}(\mathbb{r}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{x}(\partial_y F_z \cdot \partial_z F_y)$ + cykl. perm. vektor → vektor

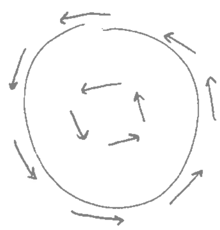


$\nabla \cdot \mathbb{F} > 0$



$\mathbb{F} = F_0 x \hat{x}$

$\nabla \cdot \mathbb{F} = F_0$



$\nabla \times \mathbb{F} \neq 0$

Hemuppgift : beräkna $\nabla \times \mathbb{F}$ då $\mathbb{F}(\mathbb{r}) = x\hat{y} - y\hat{x}$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{x} - 0\hat{y} + 2\hat{z}$$

Laplaceoperator (på skalär) $\underset{(\nabla^2\phi)}{\Delta} = \nabla\cdot(\nabla\phi) = (\overset{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\partial_x^2} + \partial_y^2 + \partial_z^2)\phi$

$\Delta \mathbb{F} = \hat{x}\Delta F_x + \hat{y}\Delta F_y + \hat{z}\Delta F_z$

Kroklinjiga koordinater

3 tal som räcker för att bestämma en punkt i 3 dim.

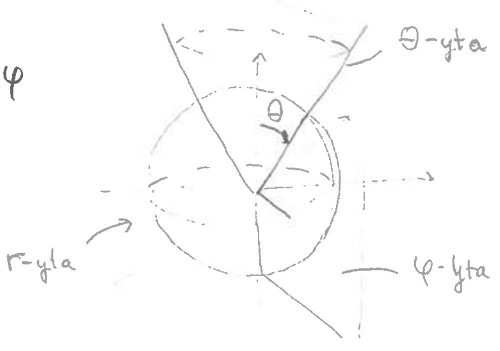
Ex

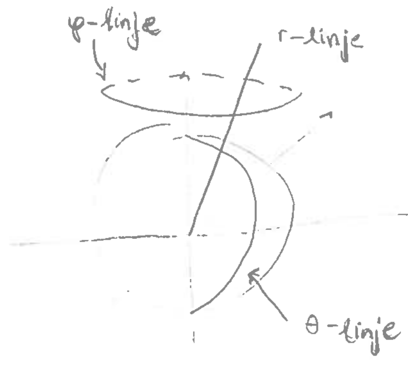
x, y, z r, θ, φ ρ, φ, z	$\{u_i\}_{i=1}^{3}$

Koordinatyta för koord. nr. i: Alla lösningar till $u_i =$ konst.

Koordinatlinje den kurva som fås om en koord. tillåts variera, och de andra hålls konstanta

Ex r, θ, φ





Basvektorer?

1. normerade tangentvektorer till koord. linjer
(2. normerade normalvektorer till koord. ytor ?)

1. Ändra koord. nr. i $\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$ $\qquad \mathbf{e}_i = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right|} \equiv \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$

$h_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right|$: "skalfaktor"

$$\boxed{d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} du_i} = \sum_{i=1}^{3} h_i \mathbf{e}_i du_i$$

Ex

Sfäriska: $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$, $\quad h_r = 1$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta)$, $\quad h_\theta = r$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \ \ldots$ $\quad , \quad h_\varphi = r\sin\theta$

Kräv att basvektorerna är ortogonala, dvs

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \qquad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$
$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \qquad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$
$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \qquad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

Kroneckers delta

Beräkna |förflyttningen| om alla koord. ändras med du_i

$$d\mathbb{r}\cdot d\mathbb{r} = \left(\sum_{i=1}^{3} h_i e_i du_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} h_j e_j du_j\right) = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 du_i^2$$

$||$

ds^2

"bågelement"

Ex

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

2010-09-03
Fredag

Koord. u_i, $i = 1, \dots, 3$

$\mathbb{r} = \mathbb{r}(u_1, u_2, u_3)$, $u_i(\mathbb{r})$

(def) Basvektorer: normerade tangentvektorer till koordinatlinjerna:

dvs. $h_i = \left|\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u_i}\right|$

$e_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u_i}$

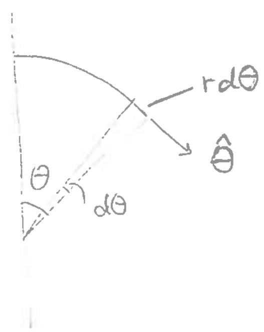
$$d\mathbb{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^{3} h_i e_i du_i$$

Under förändringar du_i:

$$d\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \phi}{\partial u_i} du_i$$

$$\underbrace{\nabla\phi}\cdot\underbrace{d\mathbb{r}}_{\sum_{j=1}^{3} h_j e_j du_j} = \sum_{i=1}^{3}\underbrace{(\nabla\phi)_i}_{\text{måste vara } \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}} h_i du_i \quad\Rightarrow\quad \nabla\phi = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i} e_i$$

skriv $\nabla\phi = \sum_{i=1}^{3}(\nabla\phi)_i e_i$



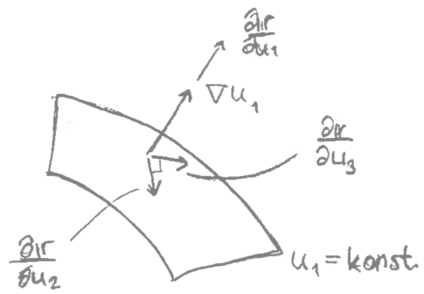
$$\hat{\theta}\cdot\nabla\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

Ex. sfäriska koord.

$$\nabla\phi = \hat{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

Cyl: $$\nabla\phi = \hat{\varrho}\frac{\partial\phi}{\partial\varrho} + \frac{\hat{\varphi}}{\varrho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Om man låter basvektorerna istället vara normalvektorer till koord. ytorna?



ortogonalsystem

Om $\perp$ system $\frac{\partial r}{\partial u_1} \parallel \nabla u_1$

Titta på ett exempel där basvektorerna inte är $\perp$

Hemläxa: $\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$

$$e_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial r}{\partial u_i} = h_i \nabla u_i$$

$$\nabla u_i \cdot \frac{\partial r}{\partial u_j} = \delta_{ij}$$

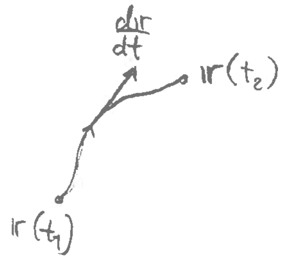
$i = j = 1$: $$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_1} = \frac{\partial u_1}{\partial u_1} = 1$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u_1} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \dots$$

$i \neq j$: $$\frac{\partial u_i}{\partial u_j} = 0$$

Integraler

- Linje (kurv-) integraler
- Ytint.
- Vol. int.



Parametrisering

– av kurvor

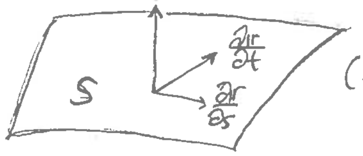
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

– av ytor

$S: \mathbf{r}(s, t)$

Tangentvektorer (t.ex) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ Normalvektor



(behöver ej vara ortogonala)

Ex Sfär med radie a

$\longrightarrow r = a, \quad \theta, \varphi$ parametrar: $\mathbf{r} = (a \sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$

Tangentvektorer:

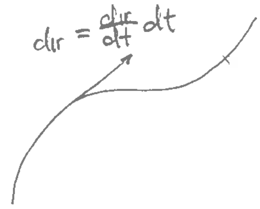
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = a(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) = a\hat{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = a(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0) = a\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

Normalvektor $\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = a^2 \sin\theta \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{\varphi}}_{\hat{r}}$

Linjeintegraler

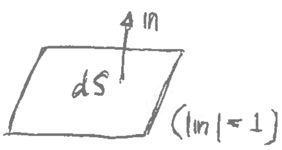
Vanligast (i fysik): $\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\mathbb{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\mathbb{F}\cdot\mathbf{v} = P} dt$



Mekanik: $dW = \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$

[$ds = |d\mathbf{r}|$ Även: $\int_C \phi\, ds$, $\int_C \mathbb{F}\, ds$, $\int_C \phi\, d\mathbf{r}$, $\int_C \mathbb{F}\times d\mathbf{r}$]

Ytintegraler:



$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$

$d\mathbf{S}$ finns om ytan är orienterbar

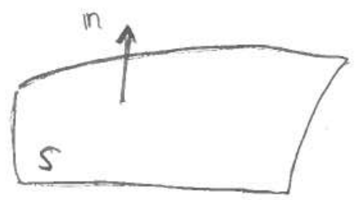
$\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}$ Tolkning (t.ex.) "flöde genom yta" (inte längs ytan!)

Även $\int_S \phi\, dS$, $\int_S \phi\, d\mathbf{S}$, $\int_S \mathbb{F}\, dS$, $\int_S \mathbb{F}\times d\mathbf{S}$

Ex. Vätska med densitet $\varrho(\mathbf{r})$ och hastighet $\mathbf{u}(\mathbf{r})$

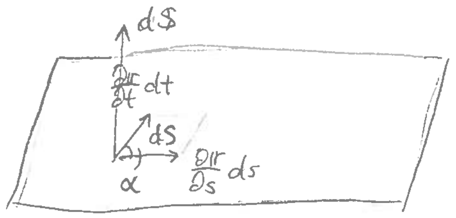
stationärt flöde – behöver ej tänka på tiden!

Massflöde: $\varrho\mathbf{u}$



Massflöde per tidsenhet genom S:

$$\int_S \varrho\mathbf{u}\cdot d\mathbf{S}$$



$\mathbf{r}(s,t),\quad (s,t)\in D$

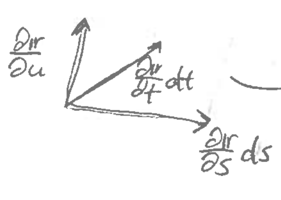
$$dS = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}ds\right|\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}dt\right|\sin\alpha = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right| ds\,dt$$

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\,ds\,dt$$

Volymintegraler

Volymelement dV $\quad\int_V \phi\,dV,\quad \int_V \mathbf{F}\,dV$

Parametrar s,t,u $\quad\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s},\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t},\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$ linj. ober. (ej nödvändigtvis $\perp$)



—— $\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right| ds\,dt$

$$dV = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right)\right| ds\,dt\,du$$

Integration med kroklinjiga koordinater (ortogonala):

Ytelement: Parametrisera ytan med param u_1, u_2

$$dS = h_1 h_2 \, du_1 \, du_2$$
$$d\mathbf{S} = \pm h_1 h_2 \mathbf{e}_3 \, du_1 \, du_2$$

Volymint.: $dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 du_2 du_3$

Ex. $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

Lv. 2 . . .

2010-09-07
Tisdag

4. Integralsatser

- Gauss
- Stokes

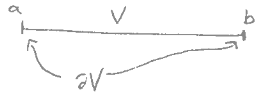
$\Rightarrow$ divergens, rotation, Laplace i kroklinjiga koord.

Integralsatser: $\displaystyle\int_{V_D} (\text{derivata på fält}) = \int_{(\partial V)_{D-1}} (\text{fält})$

(∂V) = randen av V

Exempel i en dimension: $\displaystyle\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$

(Gauss sats i D=1)



Gauss sats

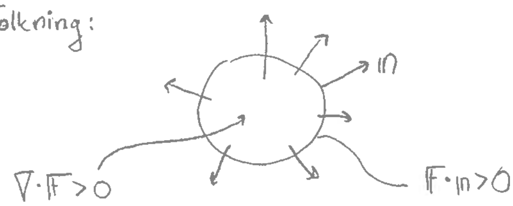
(funkar i alla dim.)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \int_{\partial V} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$$

Förutsättning: "de måste vara hyfsat snälla" [funktionerna]

("randen till en volym är alltid en sluten yta")

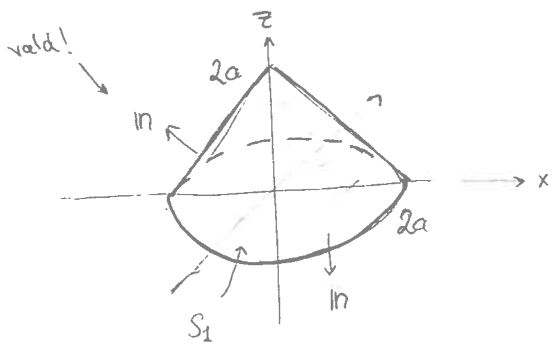
Tolkning:



Ex.
4.1

Beräkna $\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$. $\mathbb{F} = \frac{F_0}{a}(x,y,0) = \frac{F_0}{a}\,\rho\,\hat{\rho}$

$S: z = 2a - \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\rho}$, $z>0$



(parametrisera med t.ex. ρ, φ – hemuppgift)

Lägg till "bottenytan" – cirkelskiva S_1

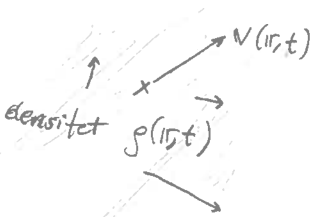
Gauss: $\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \left(\int_S + \int_{S_1}\right)\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$

$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{2F_0}{a}$

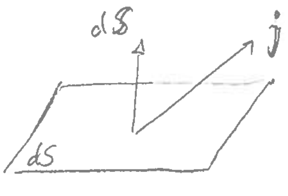
$$\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \frac{2F_0}{a}\int_V dV = \frac{2F_0}{a}V = \frac{2F_0}{a}\cdot\frac{1}{3}\pi(2a)^2\cdot 2a = \frac{16\pi F_0 a^2}{3}$$

Kontinuitetsekvationen

Strömmande fluid
Antagande: massa är bevarad



Massflödestäthet $\mathbb{j} = \rho\mathbb{v}$



$\mathbb{j}\cdot\mathbb{n}$ = massa/(tidsenhet · areaenhet) genom ytan

Massan i V

$$m_V = \int_V \rho \, dV \qquad (*)$$

Räkna ut $\frac{dm_V}{dt}$ på 2 sätt

1) Använd (*) : $\frac{dm_V}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$

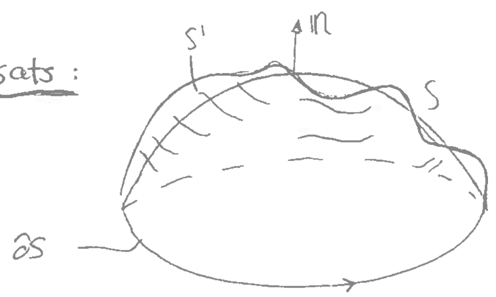
2) Hur mycket massa flödar in / tidsenhet? $\frac{dm_V}{dt} = -\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} =$

$$= -\int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV = -\{\text{det som flödar ut}\}$$

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dV = 0 \qquad \text{för } \underline{\text{alla}} \text{ volymer } V$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0}$ Kontinuitetsekv. - uttrycker massans bevarande!

Stokes sats :



$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S'} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

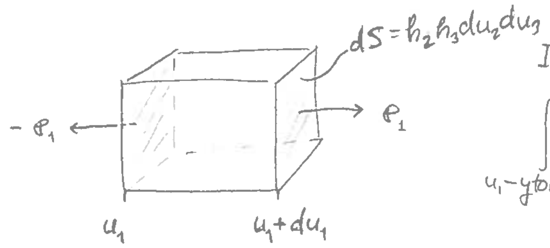
$S' - S = \partial V$ $\quad \int_{S'-S} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \xrightarrow{\text{Gauss}} \int_V \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})}_{\equiv 0 \; (\equiv 0)} dV = 0$

Tillämpa Gauss sats på ett infinitesimalt volymelement δV

δV så litet att $\nabla \cdot \mathbb{F}$ kan betraktas som konstant

Gauss: $\displaystyle \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{\delta V} \int_{\partial(\delta V)} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S}$

Väljer begränsningsytorna till δV som koordinatytor för u_1, u_2, u_3



$$\boxed{\mathbb{F} = F_1 \mathbb{e}_1 + F_2 \mathbb{e}_2 + F_3 \mathbb{e}_3}$$

Integralen över u_1-ytorna

$$\int_{u_1\text{-ytorna}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{S} = \Big((F_1 h_2 h_3)(u_1 + du_1) - (F_1 h_2 h_3)(u_1) \Big) du_2 du_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3)\, du_1 du_2 du_3$$

Totalt: $\displaystyle \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 \cancel{du_1 du_2 du_3}} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 F_3) \right)$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} F_i \right) \qquad \text{(står i formelsamlingen)}$$

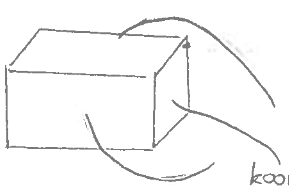
Ex sfäriska koordinater $r\theta\varphi$, $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r\sin\theta$

$$\mathbb{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta\, F_r\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta\, F_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r F_\varphi\right) \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

2010-09-10
Fredag

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{\delta V}\int_{\partial(\delta V)} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$$

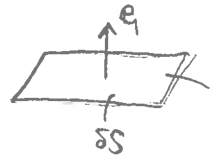


$$\mathbb{F} = F_1\mathbb{e}_1 + F_2\mathbb{e}_2 + F_3\mathbb{e}_3 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}F_i\right)$$

$$\mathbb{n}\cdot(\nabla\times\mathbb{F}) = \frac{1}{\delta S}\oint_c \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

Gör över 3 ytor $\Rightarrow$

$$\nabla\times\mathbb{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbb{e}_1 & h_2\mathbb{e}_2 & h_3\mathbb{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$$



$\Rightarrow (\nabla\times\mathbb{F})_1$

Laplaceoperator (på skalär): $\Delta\phi = \underbrace{\nabla\cdot(\nabla\phi)}_{=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi} = \nabla\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\mathbb{e}_i\underbrace{\frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}}_{\text{"}F_i\text{"}}\right) =$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right)$$

Ex. sfäriska koordinater:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$h_r = 1$
$h_\theta = r$
$h_\varphi = r\sin\theta$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \ldots$$

$$\Delta(F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}) = \hat{x}\Delta F_x + \hat{y}\Delta F_y + \hat{z}\Delta F_z$$

Varning: $\mathbb{e}_i$ ej konstanta, $\Delta\mathbb{F}$ i kroklinjiga koord.

$$\neq \sum_{i=1}^{3}\mathbb{e}_i\Delta F_i$$

Indexnotation

Notation: om en vektor $\mathbb{A}$ har Cartesiska komponenter enligt $\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{e}_i A_i$

så skriver vi den $\boxed{A_i}$ ← fritt index

$\{A_i\}_{i=1}^{3}$ (A_1, A_2, A_3)

Skalärprodukt: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 =$

$= \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = \underline{\underline{A_i B_i}}$

"Einsteins summationskonvention":
om ett index förekommer 2 ggr skall det summeras över

Konsekvens: $A_i B_i$ har inga index (skalär)

summationsindex

$(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \mathbb{C}$

$A_j B_j C_i$: vektor

summ   fritt

$A_i B_i C_i$

Ex

Matrismultiplikation

$M v$

matris

$i \rightarrow$ 

$$(Mv)_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij} v_j = M_{ij} v_j$$

"Enhetsmatrisen" har matriselementen δ_{ij} Ex $\delta_{ij} v_j = v_i$

Kryssprodukt: $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

Inför $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{om } ijk \text{ jämn permutation av } 123 \\ -1 & \text{om } ijk \text{ udda — " —} \\ 0 & \end{cases}$

$D=2$

"$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{ij}$"

1 fritt index i

Betrakta $\varepsilon_{ijk} A_j B_k$ (vektor) $= C_i$

$$C_1 = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{1jk} A_j B_k = A_2 B_3 - A_3 B_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{(\mathbb{A} \times \mathbb{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k}$$

$+\ 23$
$-\ 32$

"ε-tensorn" eller "Levi-Civita-tensorn"

$\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$: ε_{ijk} "totalt" antisymmetrisk, dvs. byter tecken vid byte av 2 index.

Skalär trippelprodukt: $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = \mathbb{B} \cdot (\mathbb{C} \times \mathbb{A}) = \mathbb{C} \cdot (\mathbb{A} \times \mathbb{B})$

$$\| $$

$$A_i (\mathbb{B} \times \mathbb{C})_i = \underline{\underline{\varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k}}$$

$\varepsilon_{ijk} B_j C_k$

$$\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = \mathbb{B}(\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}) - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \mathbb{C}$$

$$(*) \quad \varepsilon_{ijk} A_j \underbrace{(\mathbb{B} \times \mathbb{C})_k}_{\varepsilon_{klm} B_l C_m} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_j B_l C_m$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}}$$

$i=l, j=m$ el. $i=m, j=l$

$$(*) = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m = A_j B_i C_j - A_j B_j C_i = \big((\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}) \mathbb{B} - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \mathbb{C}\big)_i$$

Backar:

2010-09-14
Tisdag

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{om } ijk \text{ är jämn perm. av } 123 \\ -1 & \text{---''--- udda ---''---} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Permutation av 123 är talen 123 i en viss ordning, t.ex.: 312. En perm. kallas jämn om den fås från 123 genom att byta plats på två element ett jämnt antal ggr. Likadant för udda.

Cykliska perm. av 123: 123, 312, 231

Ex Visa att $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$. Beräkna för $ij = 11$ och $ij = 12$

$\varepsilon_{1kl}\varepsilon_{1kl} = 2$

23 23 : 1

32 32 : 1

$\varepsilon_{1kl}\varepsilon_{2kl} = 0$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cykl. perm}}}{=} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\times\, \delta_{jm} = \delta_{il}\underbrace{\delta_{jj}}_{\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33} = 3} - \overbrace{\delta_{ij}\delta_{jl}}^{\delta_{il}} = 2\delta_{il}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & ij = 12 \\ -1 & ij = 21 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex

$$\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = \mathbb{B}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{F}) - \underbrace{(\nabla\cdot\nabla)}_{\Delta}\mathbb{F}$$

$$\Delta\mathbb{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbb{F})\ !$$

Backar:

2010-09-14
Tisdag

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{om } ijk \text{ är jämn perm. av } 123 \\ -1 & \text{udda} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Permutation av 123 är talen 123 i en viss ordning, t.ex.: 312
En perm. kallas <u>jämn</u> om den fås från 123 genom att byta plats på två element ett <u>jämnt</u> antal ggr. Likadant för <u>udda</u>.

Cykliska perm. av 123: 123, 312, 231

Ex Visa att $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}$ O.k.

Beräkna för $ij = 11$ och $ij = 12$

$\varepsilon_{1kl}\varepsilon_{1kl} = 2$ $\qquad$ $\varepsilon_{1kl}\varepsilon_{2kl} = 0$

23 23 : 1
32 32 : 1

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \underset{\uparrow}{=} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

cyklisk perm.

$$\times\ \delta_{jm} = \quad \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 2\delta_{il}$$

δ_{il}

$\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33} = 3$ (spåret)

trace
spår matris
summera diagonalelement

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & ij = 12 \\ -1 & ij = 21 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex

$$\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = \mathbb{B}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbb{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{F}) - \underbrace{(\nabla\cdot\nabla)}_{\Delta}\mathbb{F}$$

$$\underline{\underline{\Delta\mathbb{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbb{F})}} \quad !$$

Singulära fält

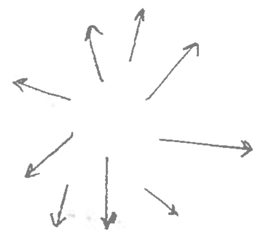
källtäthet

$$\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \oint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S}$$

Punktkälla

singulär i $r=0$!

$$\mathbb{F} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$$ "fältet från en punktkälla" (i $D=3$)



$$\nabla\times\mathbb{F} = 0$$

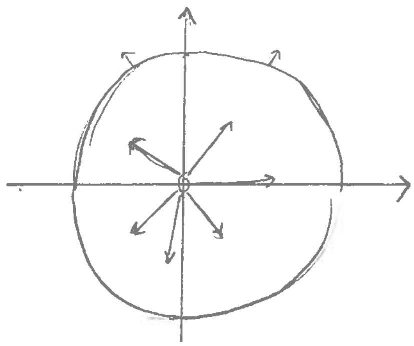
fältstyrka

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi$$ ← potential

$$\phi = \frac{q}{4\pi r}$$

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = 0 \quad (\Leftrightarrow \Delta\phi = 0)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\underbrace{r^2F_r}_{\frac{q}{4\pi}}) = 0$$



Gauss sats: $0 = \frac{q}{4\pi a^2}\cdot\int dS = q$

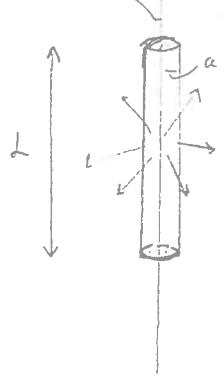
$$\oint_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{om } S \text{ inte omsluter origo} \\ q & \text{om } S \text{ omsluter origo}\end{cases}$$

Anledning till att vi inte kan använda Gauss sats är att

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = \begin{cases} 0 & r\neq 0 \\ \infty & \end{cases}$$ ← definieras senare (kap. 7)

Linjekälla

källa/längdenhet: k



$$\mathbb{F} = \frac{k}{2\pi\rho}\hat{\rho} \implies \int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbf{S} = k\cdot L$$

$$\nabla\cdot\mathbb{F} = 0 \quad (\rho>0)$$

$$\phi = -\frac{1}{2\pi}\log\frac{\rho}{\rho_0}$$

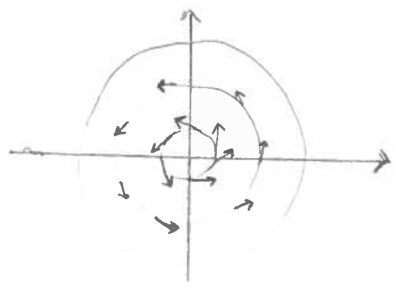
2010-09-21
Tisdag

$\nabla \cdot \mathbb{F} = 0$ utom på vissa ställen – singulära källor

$\nabla \times \mathbb{F} = 0$ —— " —— —" — virvlar

Fältet från en (rak) virveltråd

I cylindriska koordinater i $\mathbb{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

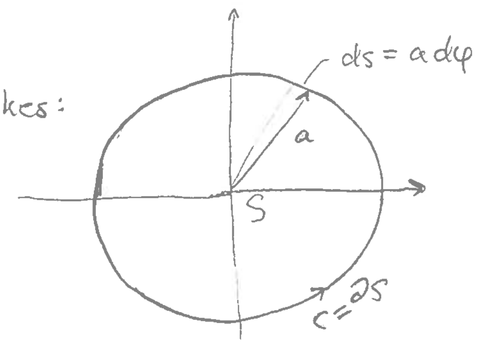


$\nabla \cdot \mathbb{F} = 0$

$\nabla \times \mathbb{F} = 0$ då $\rho \neq 0$:

$$\nabla \times \mathbb{F} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \cancel{\rho}\frac{J}{2\pi\cancel{\rho}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Stokes:



$$\int_{\partial S} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_S (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot d\mathbb{S}$$

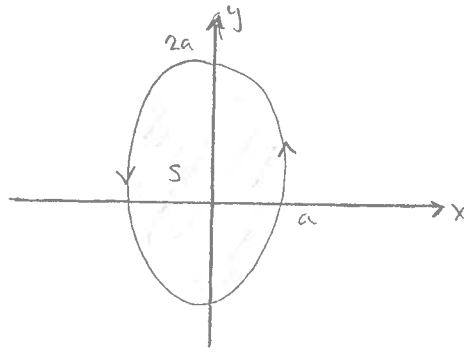
$$\oint_c \underbrace{\mathbb{F}}_{\frac{J}{2\pi a}\hat{\varphi}} \cdot \underbrace{d\mathbb{r}}_{a\hat{\varphi}\,d\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{J}{2\pi a} a = J$$

(samma resultat ~~för~~ alla kurvor som omsluter z-axeln en gång i pos. led)

Fysikaliskt (standard-) exempel: J ström i smal ledare längs z-axeln.
$\mathbb{F} \to \mathbb{B}$ magnetiskt fält

Ex 6.3 Beräkna $\oint_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$ $\quad C:\ x^2+\frac{y^2}{4}=a^2,\ z=0$
(ellips med ½-axlar a, $2a$)
genomlöps i pos. led

$$\mathbb{F} = F_0\left[\underbrace{\frac{\rho\sin 2\varphi}{2a}\hat{\rho}}_{\mathbb{F}_2} + \left(\overbrace{\frac{a}{\rho}}^{F_1} - \frac{\rho\sin^2\varphi}{a}\right)\hat{\varphi}\right]$$



$(x,y) = (a\cos\varphi,\ 2a\sin\varphi)$
antagligen överkomlig (räkning)

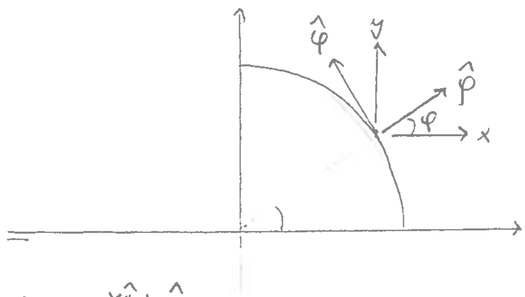
$\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$
$\uparrow$
singulär: virveltråd längs z-axeln med styrka $J = 2\pi F_0 a$

$\oint_C \mathbb{F}_1\cdot d\mathbb{r} = 1\cdot 2\pi F_0 a$ $\qquad \mathbb{F}_2$: använd Stokes sats $\nabla\times\mathbb{F}_2 = \ldots = -\frac{F_0}{a}\hat{z}$

$$\oint_C \mathbb{F}_2\cdot d\mathbb{r} = \iint_S \left(-\frac{F_0}{a}\hat{z}\right)\cdot\hat{z}\,dS = -\frac{F_0}{a}\iint_S dS = -\frac{F_0}{a}\pi\cdot a\cdot 2a = -2\pi F_0 a$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = 0$$

$$\hat{\varphi} = \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} \,, \qquad \mathbb{F} = \frac{J}{2\pi}\,\frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{x^2+y^2}$$

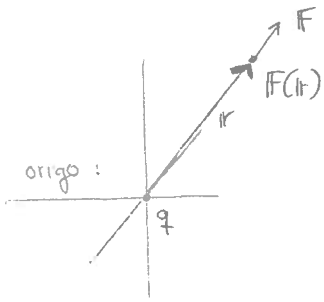


$$\begin{cases} \hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \\ \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho} = \hat{x}\frac{x}{\rho} + \hat{y}\frac{y}{\rho} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \hat{\varphi} = -\hat{x}\frac{y}{\rho} + \hat{y}\frac{x}{\rho} = \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{\sqrt{\cdots}} \end{cases}$$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

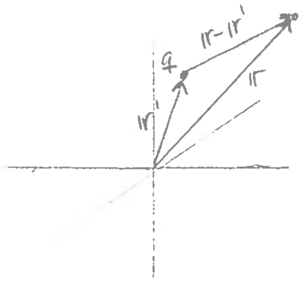
Bestämning av fält från källor

Pkt källa q



$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = \frac{q\,\hat{r}}{4\pi r^2}$$

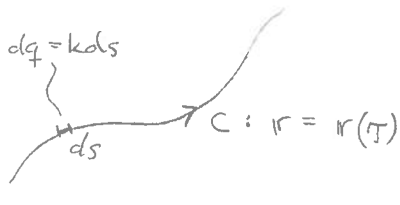
$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = -\nabla\phi(\mathbb{r}), \quad \phi = \frac{q}{4\pi r}$$



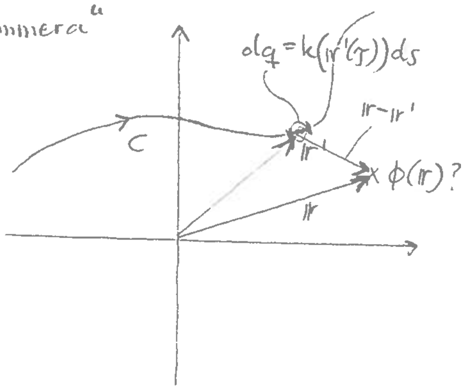
$$\phi = \frac{q}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|} \qquad \left(\mathbb{F} = \frac{q}{4\pi}\,\frac{\mathbb{r}-\mathbb{r}'}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|^3} \right)$$

Titta på en <u>linjekälla</u>

Linjekälltäthet $k(\tau)$



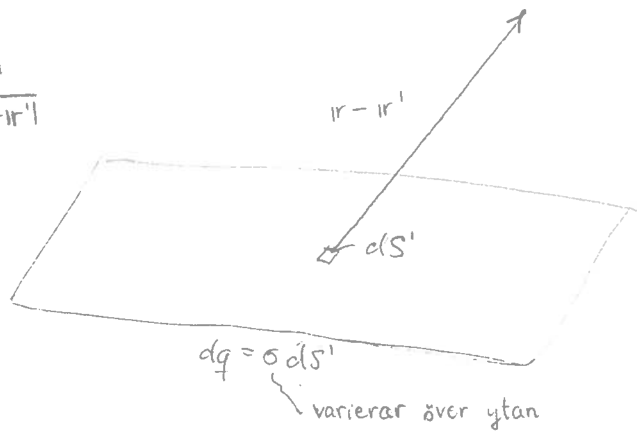
Tänk att varje linjeelement är en pkt. källa, och "summera" bidragen från den!



$$d\phi(\mathbb{r}) = \frac{k\,ds}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$ Integrera!

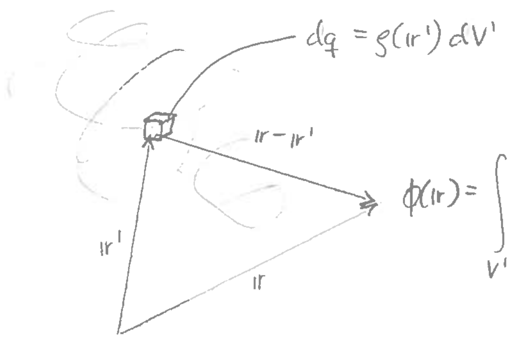
$$\phi(\mathbb{r}) = \int_C \frac{k(\tau)\,ds'}{4\pi|\mathbb{r}-\underbrace{\mathbb{r}'}_{\mathbb{r}'(\tau)}|} \qquad ds' = \left|\frac{d\mathbb{r}'}{d\tau}\right| d\tau$$

$$d\phi(\mathbb{r}) = \frac{\sigma\,dS'}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}, \qquad \phi(\mathbb{r}) = \int_S \frac{\sigma\,dS'}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$



"Rymdkälltäthet"

$$\varrho(\mathbb{r}')$$



$$\phi(\mathbb{r}) = \int_{V'} \frac{\varrho(\mathbb{r}')\,dV'}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$

källtäthet (källfördelning)

$$\underline{\nabla\cdot\mathbb{F} = \varrho} \qquad \text{alt.} \qquad \Delta\phi = -\varrho$$

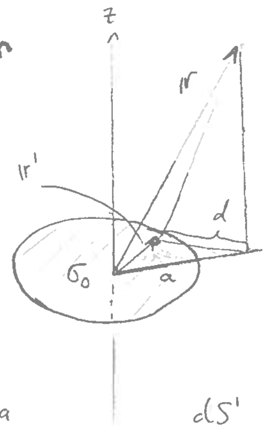
$$\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \; : \; \text{"Greensfunktion"}$$

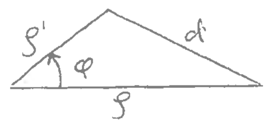
Def.:

Greensfunktionen är bidraget till potentialen i $\mathbf{r}$ från en pktkälla med styrka 1 i punkten $\mathbf{r}'$.

$$\Longrightarrow \quad \phi(\mathbf{r}) = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, dV'$$

Ex 6.4





$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = \underbrace{d^2}_{\substack{[\text{cos. teor.}] \\ \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi}} + z^2$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma_0 \overbrace{\rho' d\rho' d\varphi'}^{dS'}}{4\pi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi' + z^2}}$$

Undersök fältet på z-axeln!

$$\phi(\rho = 0, z) = \frac{\sigma_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a d\rho' \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} = \frac{\sigma_0}{2} \left[\sqrt{\rho'^2 + z^2} \right]_{\rho'=0}^{a} = \frac{\sigma_0}{2} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right)$$

stora z $\quad (|z| \gg a)$: $\quad \phi = \frac{\sigma_0}{2}|z|\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}}_{1+\frac{a^2}{2z^2}+\dots} - 1\right) \approx$

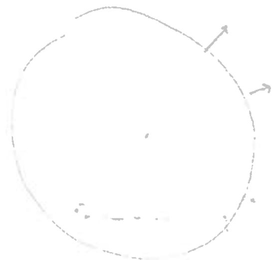
$$\approx \frac{\sigma_0}{2}|z|\frac{a^2}{2|z|^2} = \frac{\sigma_0 a^2}{4|z|} = \text{"}\frac{q}{4\pi|z|}\text{"} \qquad q = \underbrace{\pi a^2}_{A}\sigma_0 \qquad \text{o.k.!}$$

Punktkälla i origo: $\quad \phi = \frac{q}{4\pi r}$, $\quad \mathbb{F} = -\nabla\phi = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$

"Problem" med Gauss sats:

$$\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV = \int_{\partial V}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$$

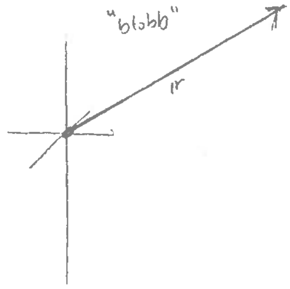
$= q$ om V innehåller origo

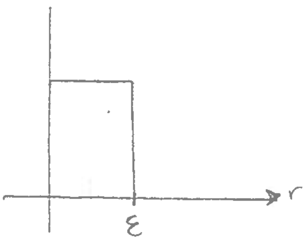


$$\underset{-\Delta\phi}{\nabla\cdot\mathbb{F}} = ? \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{då } r>0 \\ \infty & \text{i origo?} \end{cases}$$

Approximation t.ex. $\rho = \begin{cases} c, & r<\varepsilon \\ 0, & r>\varepsilon \end{cases}$

källtäthet (källa/volymsenhet)

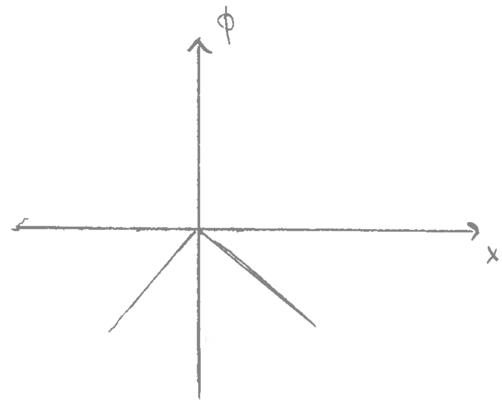




Välj c så att total laddning är q,

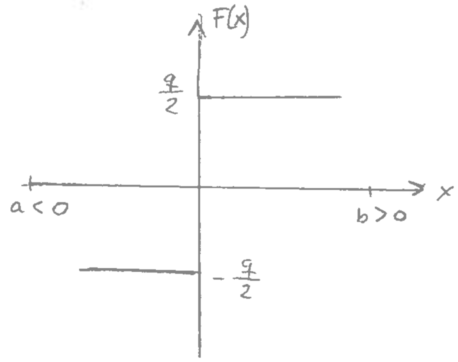
dvs. $\rho = \begin{cases} \frac{q}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3}, & r<\varepsilon \\ 0, & r>0 \end{cases}$ $\longleftarrow$ kan vi ta gränsen av detta då $\varepsilon\to 0$?

Punktkälla i $D=1$ $\qquad \phi(x) = -\frac{q}{2}|x|$



$$F(x) = -\frac{d\phi}{dx} = \begin{cases} \frac{q}{2}, & x>0 \\ -\frac{q}{2}, & x<0 \end{cases}$$

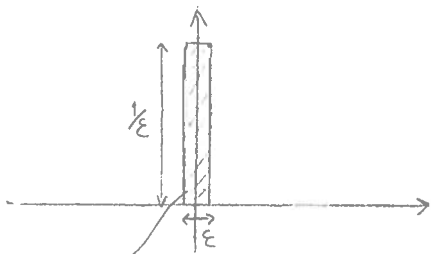
Gauss: $\displaystyle\int_a^b \frac{dF}{dx}\,dx = \underbrace{F(b)-F(a)}_{q}$



$$\frac{dF}{dx} = \begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ \infty? & x=0 \end{cases}$$ Måste vara en "funktion" $q\delta(x)$ som är 0 då $x\neq 0$,

men har $\displaystyle\int_{a<0}^{b>0} \delta(x) = 1$

Konstruera som gräns då $\varepsilon \to 0$ för

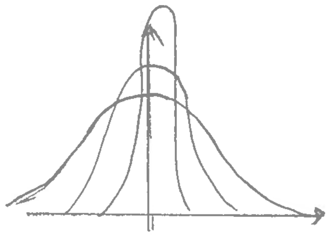


$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{då } |x| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Andra möjligheter (kolla!)

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/\varepsilon^2}$$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$$



$$\boxed{\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x)}$$ Diracs deltafunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\,dx = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x)\,dx = f(x_0)$$

$$\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon} f(x)\,dx = f(0) + 0\cdot f'(0) + \ldots$$

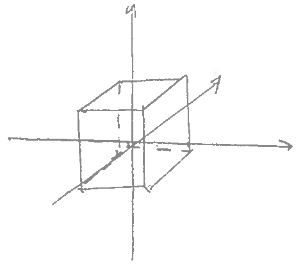
$f(x) = f(0) + x f'(0) + \ldots$

I $D=3$: Pkt laddning $\phi = \dfrac{q}{4\pi r}$, $\mathbb{F} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$

$$\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\, dV = \underbrace{\int_{\partial V} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}}_{q}$$

innehåller origo

$\nabla\cdot\mathbb{F} = \begin{cases} 0 & \text{då } r>0 \\ \text{"}\infty\text{"} & \text{i } r=0 \end{cases}$ så att $\displaystyle\int_V \nabla\cdot\mathbb{F}\, dV = q$



$$\nabla\cdot\mathbb{F} = q\delta^3(\mathbb{r}) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \int_{-a}^{a} dz\, \delta(x)\delta(y)\delta(z) = 1$$

"Regulariserat" fält:

$$\mathbb{F}_\varepsilon(\mathbb{r}) = \frac{q}{4\pi(r^2+\varepsilon^2)}\hat{r} \qquad \left(\mathbb{F}_\varepsilon(\mathbb{r}) \longrightarrow \mathbb{F}(\mathbb{r}) \text{ då } \varepsilon\to 0\right)$$

$$\nabla\cdot\mathbb{F}_\varepsilon(\mathbb{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2+\varepsilon^2}\right)}_{\frac{2r}{r^2+\varepsilon^2} - \frac{2r\cdot r^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2} = \frac{2r\varepsilon^2}{(r^2+\varepsilon^2)^2}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right) + \ldots}$$

$$= \frac{q\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{r(r^2+\varepsilon^2)^2}$$

$$h_\varepsilon(\mathbb{r}) \to \delta^3(\mathbb{r})$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot\mathbb{F}_\varepsilon\, dV = \frac{q\varepsilon^2}{2\pi}\cdot 4\pi \int_0^\infty \frac{r^2\,dr}{r(r^2+\varepsilon^2)^2} =$$

$dV = r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$ ($\sin\theta\,d\theta$ ger 2, $d\varphi$ ger 2π)

$$= 2q\varepsilon^2\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2+\varepsilon^2}\right]_0^\infty = 2q\varepsilon^2\frac{1}{2\varepsilon^2} = \underline{\underline{q}}$$

- $h_\varepsilon(\mathbb{r}) \to 0$ för $r>0$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} h_\varepsilon(\mathbb{r})\, dV = 1$

$\nabla\cdot\mathbb{F} = q\delta^3(\mathbb{r})$ källtäthet! laddning / volym

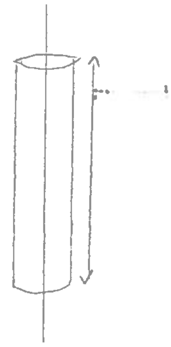
$\underline{\Delta\phi = -\rho(\mathbb{r})}$ där $\rho(\mathbb{r}) = q\delta^3(\mathbb{r})$

(pktkälla : D=2)

Linjekälla: $\mathbb{F} = \frac{k}{2\pi\rho}\hat{\rho}$, $\phi = -\frac{k}{2\pi}\log\frac{\rho}{\rho_0}$

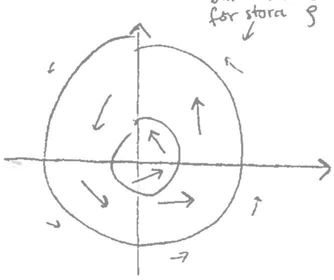
$\nabla\cdot\mathbb{F} = k\delta^2(\vec{\rho})\ (=\delta(x)\delta(y)k)$

$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} \longleftrightarrow (x,y)$



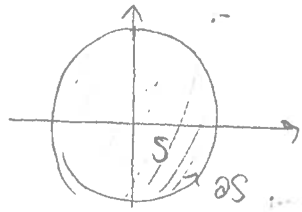
$\int dV\,\nabla\cdot\mathbb{F} = k\cdot L$

Virveltråd: $\mathbb{F} = \frac{J}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

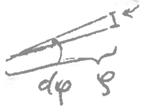


Stokes:

$$\underbrace{\int_{\partial S} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}}_{J} = \int_S \underbrace{(\nabla\times\mathbb{F})}_{J\cdot\delta^2(x,y)\hat{z} = J\,\delta^2(x,y)}\cdot d\mathbb{S}$$



$$\int_{\partial S}\frac{J}{2\pi\rho}\hat{\varphi}\cdot\underbrace{\rho\,d\varphi\,\hat{\varphi}}$$



Potentialteori

2010-09-24
Fredag

1) $\mathbb{F} = -\nabla\phi$

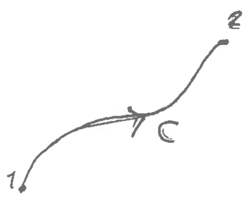
Varje rotationsfritt vektorfält kan skrivas så.

$\nabla\times\mathbb{F} = 0 \iff \mathbb{F} = -\nabla\phi$

$\Longleftarrow$ ok: $\nabla\times\nabla\phi = 0$

$\Longrightarrow$ bevisar inte

Stokes: $\int_S \underbrace{(\nabla\times\mathbb{F})}_{0}\cdot d\mathbb{S} = \oint_{\partial S}\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = -\oint_{\partial S}\underbrace{\nabla\phi\cdot d\mathbb{r}}_{d\phi} = 0$



$\int \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = -(\phi(\mathbb{r}_2) - \phi(\mathbb{r}_1))$

Ex

Konservativ kraft : $\mathbb{F}$

$\nabla \times \mathbb{F} = 0 \iff \mathbb{F} = -\nabla\phi$, ϕ pot. energi

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \text{arbete} = \Delta E_k = -\Delta\phi$$

Ex (fort.)

$$\Delta(E_k + \phi) = 0$$

Ex $\mathbb{F} = -mg\,\hat{z}$, $\phi = mgz$

Finns alltid primitiv i 1D
$\nabla \times \mathbb{F} = 0$ i 1D
$\mathbb{F}$ 1D $\Rightarrow$ konservativa fält

Den viktiga informationen i ϕ är $-\nabla\phi$, fältstyrka. $\phi(\mathbb{r}) \to \phi(\mathbb{r}) + \phi_0$

Källtäthet : $\nabla\cdot\mathbb{F} = \rho$
$\qquad\qquad\quad\ \ \| $
$\qquad\qquad\ \nabla\cdot(-\nabla\phi)$

$$\boxed{\Delta\phi = -\rho}$$ Poissons ekv

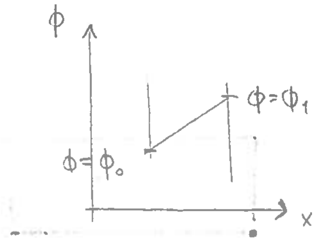
(Randvillkor kommer senare)

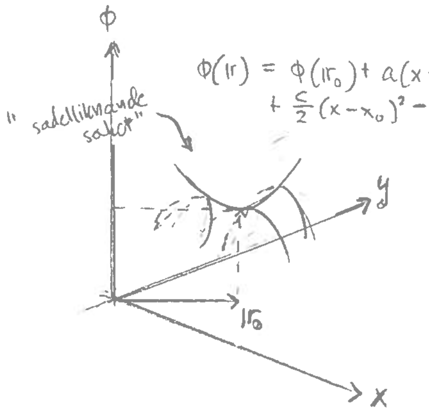
specialfall $\longrightarrow$ $$\boxed{\Delta\phi = 0}$$ Laplaces ekv.

$$\Delta\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

Hur beter sig en funktion som uppfyller Laplaces ekv.?

Titta "nära" en punkt $\mathbb{r}_0$

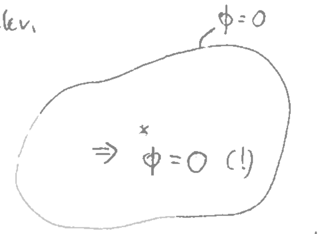




$$\Phi(\mathbb{r}) = \phi(\mathbb{r}_0) + a(x-x_0) + b(y+y_0) + \frac{c}{2}(x-x_0)^2 - \frac{c}{2}(y-y_0)^2 + \ldots$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Fråga: Vad kan det finnas för lösningar till Laplace ekv. i ett begränsat område med randvillkor $\Phi = 0$



(bevis senare!)

2) Divergensfria fält, $\nabla \cdot \mathbb{G} = 0 \iff \mathbb{G} = \nabla \times \mathbb{A}$

$\Rightarrow$ bevisas inte

vektorpotential

Standardexempel:

$$\mathbb{B}(\mathbb{r}) = \nabla \times \mathbb{A}(\mathbb{r})$$

["gaugeparameter"]

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{r}) + \nabla\Lambda(\mathbb{r})$$

"gaugeinvarians"

Virveltäthet: $\nabla \times \mathbb{G} = \mathbb{j} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \mathbb{j}$

$$\left[\ \Delta \mathbb{A} = \nabla(\nabla\cdot\mathbb{A}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbb{A})\ \right]$$

$$\Delta\mathbb{A} - \nabla(\nabla\cdot\mathbb{A}) = \mathbb{j}$$

Välj $\mathbb{A}$ så att $\nabla\cdot\mathbb{A} = 0$

$$\boxed{\Delta\mathbb{A} = -\mathbb{j}}$$

Poissons ekv.

Om det finns både källor och virvlar

$\nabla\cdot\mathbb{H} \neq 0$ $\qquad$ $\nabla\times\mathbb{H} \neq \mathbb{0}$ $\quad$ får skrivas utan vektorbeteckning

Låt

$$\mathbb{H} = \mathbb{F} + \mathbb{G} \quad \text{där} \quad \left.\begin{array}{l} \begin{cases} \nabla\cdot\mathbb{F} = \varrho \\ \nabla\times\mathbb{F} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \nabla\cdot\mathbb{G} = 0 \\ \nabla\times\mathbb{G} = \mathbb{j} \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \nabla\cdot\mathbb{H} = \varrho \\ \nabla\times\mathbb{H} = \mathbb{j} \end{array}$$

$$\mathbb{H} = -\nabla\phi + \nabla\times\mathbb{A}$$

Standardexempel:

Pktkälla m. styrka q i origo: $\quad \mathbb{F} = \frac{q}{4\pi}\frac{\hat{r}}{r^2}\ , \quad \phi = \frac{q}{4\pi r}$

$$\Delta\phi = -q\,\delta^3(\mathbb{r}) = -\varrho(\mathbb{r})$$

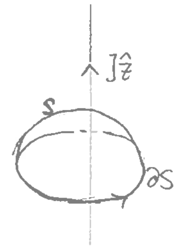
Linjekälla, styrka k längs z-axeln: $\quad \mathbb{F} = \frac{k}{2\pi}\frac{\hat{\varrho}}{\varrho}\ , \quad \phi = -\frac{k}{2\pi}\log\frac{\varrho}{\varrho_0}$

$$\Delta\phi = -k\,\delta^2(\varrho) \qquad (\varrho = (x,y))$$

Virveltråd på z-axeln, styrka J

$\mathbb{F} = \frac{J}{2\pi}\frac{\hat{\varphi}}{\rho}$, $\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{A}$ $\qquad \underline{\underline{\mathbb{A}}} = -\frac{J\hat{z}}{2\pi}\log\frac{\rho}{\rho_0} \overset{\mathbb{F}}{\Rightarrow} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{J}{2\pi}\log\rho \end{vmatrix} =$

$= \frac{J\hat{\varphi}}{2\pi\rho}$



$\Delta\mathbb{A} = J\hat{z}\,\delta^2(\rho)$ (om $\nabla\cdot\mathbb{A} = 0$)

$$\int_S \underbrace{(\nabla\times\mathbb{F})}_{J\hat{z}}\cdot d\mathbb{S} = \int \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = J$$

$\nabla\times\mathbb{G} = \mathring{j} \implies \nabla\cdot\mathring{j} = 0$

"verkligheten brukar veta hur den ska bete sig"

vilka randvillkor ger unik lösning?

Betrakta Poissons ekv. $\Delta\phi = -\rho$

Antag att $\phi_1(\mathbb{r})$, $\phi_2(\mathbb{r})$ båda är lösningar.
Då är $\psi = \phi_1 - \phi_2$ lösning till Laplaces ekvation $\Delta\psi = 0$

Visa (med "bra" RV) att Laplace ekv. $\Delta\psi = 0$ endast har lösning $\psi \equiv 0 \implies$ Poissons ekv. (för givet ρ) har <u>unik</u> lösning.

$\nabla\cdot(\psi\nabla\psi) = \nabla\psi\cdot\nabla\psi + \psi\Delta\psi$ $\qquad \geq 0$ och $= 0$ omm $\psi =$ konst.

Gauss $\implies \underbrace{\oint_{S=\partial V} \psi\nabla\psi\cdot\mathbb{n}\,dS}_{\text{V.L.}} = \int_V |\nabla\psi|^2\,dV$

Se till att $\text{V.L.} = 0 \implies \psi =$ konst.

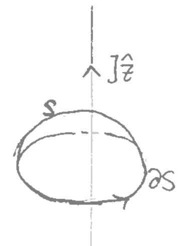
1) $\psi = 0$ på $\partial V \implies \psi \equiv 0$ i V $\qquad$ Dirichlets randvillkor

2) $\nabla\psi\cdot\mathbb{n} = 0 \implies \psi =$ konst. i V $\qquad$ Neumanns randvillkor

Virveltråd på z-axeln, styrka J

$$\mathbb{F} = \frac{J}{2\pi}\frac{\hat{\varphi}}{\varrho}, \quad \mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{A} \qquad \underline{\mathbb{A}} = -\frac{J\hat{z}}{2\pi}\log\frac{\varrho}{\varrho_0} \overset{\mathbb{F}}{=} \frac{1}{\varrho}\begin{vmatrix} \hat{\varrho} & \varrho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{J}{2\pi}\log\varrho \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{J\hat{\varphi}}{2\pi\varrho}$$



$$\Delta\mathbb{A} = J\hat{z}\,\delta^2(\varrho) \quad (\text{om } \nabla\cdot\mathbb{A} = 0)$$

$$\int_S (\nabla\times\mathbb{F})\cdot d\mathbb{S} = \int \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} \qquad J$$

$J\hat{z}$

$$\nabla\times\mathbb{G} = \mathbb{j} \implies \nabla\cdot\mathbb{j} = 0$$

"verkligheten brukar veta hur den ska bete sig"

vilka randvillkor ger unik lösning?

Betrakta Poissons ekv. $\Delta\phi = -\varrho$

Antag att $\phi_1(\mathbb{r})$, $\phi_2(\mathbb{r})$ båda är lösningar.
Då är $\psi = \phi_1 - \phi_2$ lösning till Laplaces ekvation $\Delta\psi = 0$

Visa (med "bra" RV) att Laplace ekv. $\Delta\psi = 0$ endast har lösning $\psi \equiv 0 \implies$ Poissons ekv. (för givet ϱ) har <u>unik</u> lösning.

$$\nabla\cdot(\psi\nabla\psi) = \nabla\psi\cdot\nabla\psi + \psi\Delta\psi$$

≥ 0 och $= 0$ omm $\psi = $ konst.

$$\text{Gauss} \implies \oint_{S=\partial V} \psi\nabla\psi\cdot\mathbb{n}\,dS = \int_V |\nabla\psi|^2\,dV$$

V.L.

Se till att V.L. $= 0 \implies \psi = $ konst.

1) $\psi = 0$ på $\partial V \implies \psi \equiv 0$ i V Dirichlets randvillkor

2) $\nabla\psi\cdot\mathbb{n} = 0 \implies \psi = $ konst. i V Neumanns randvillkor

dv 5

2010-09-28
Tisdag

Med Sten Salomonsson

Något om lösning av Poissons ekvation

$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \qquad \Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})$

Entydig lösning på begränsat område V (se 8.6) med

Dirichlets randvillkor $\phi|_{\partial V} = f$

Neumanns randvillkor $\nabla\phi|_{\partial V}\cdot\hat{n} = g$

f och g är funktioner på ∂V

1. Greensfunktionsmetoden
2. Spegling (ger GF för enkel geometri)
3. Variabelseparation

1 $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})$

$\Delta = \nabla^2 = \text{Laplaceoperatorn} \left(= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

Vi begränsar oss till homogena randvillkor, dvs. $f = g = 0$ på ∂V

Lös först $\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ för pktkälla i $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ med styrkan 1

$\rho(\mathbf{r})$ skrivs som superposition av punktkällor

$$\rho(\mathbf{r}) = \int_{V'} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\,dV'$$

Lösningen $\phi(\mathbf{r})$ är superposition av Greensfunktionerna

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\,dV'$$

Kolla att $\phi(\mathbf{r})$ är en lösning:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \Delta\int_{V'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\,dV' = \int_{V'} (\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))\rho(\mathbf{r}')\,dV' = -\int_{V'} \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\,dV' = -\rho(\mathbf{r})$$

verkar på $\mathbf{r}$ ej $\mathbf{r}'$

Greensfunktionen på ett område V bestäms av formen på V och randvillkoret på ∂V.

På området "hela $\mathbb{R}^3$" är $\quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \dfrac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

<u>Exempel:</u> Linjekälla på z-axeln

prim   behöver ej sätta prim ty entydig

$$\rho(\mathbf{r}) = k\delta^2(\boldsymbol{\rho}) \quad i \ \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}' + z'\hat{\mathbf{z}} = \rho'\hat{\boldsymbol{\rho}}' + z'\hat{\mathbf{z}}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{\mathbb{R}^2} dS' \frac{k\delta^2(\boldsymbol{\rho})}{4\pi|\mathbf{r}-\rho'\hat{\boldsymbol{\rho}}'-z'\hat{\mathbf{z}}|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,dz'}{4\pi|\mathbf{r}-z'\hat{\mathbf{z}}|}$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\Delta A_i(\mathbf{r}) = -j_i(\mathbf{r}) \qquad i = x, y \text{ el. } z$$

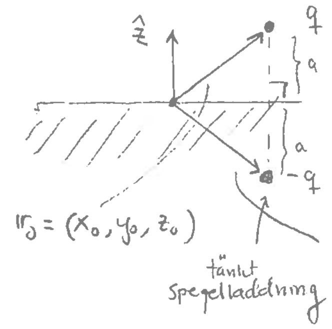
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'$$

<u>Exempel:</u> Virveltråd med styrka J längs kurva C

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}) = \int_C \frac{J\,d\mathbb{r}'}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$$ (tunn elektrisk ledare med strömmen J)

② Spegling. Ger Greensfunktionen för enkla geometrier.

Halvplan:



titta på området $z \geq 0$.

← randvillkor för ϕ

$\phi|_{\partial V} = 0$ eller $\nabla\phi|_{\partial V} \cdot \hat{z} = 0$

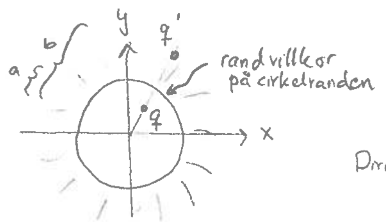
$$\phi(\mathbb{r}) = \frac{q}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}_0|} - \frac{q}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|}$$ Uppfyller randvillkoret $\phi(\mathbb{r}) = 0$ för $z = 0$

$\mathbb{F} = -\nabla\phi$

$$G(\mathbb{r}, \mathbb{r}_0') = \frac{1}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}_0|} - \frac{1}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}_1|}$$

$\mathbb{F} = -\nabla\phi$

Cirkel i två dimensioner:



Dirichlets RV

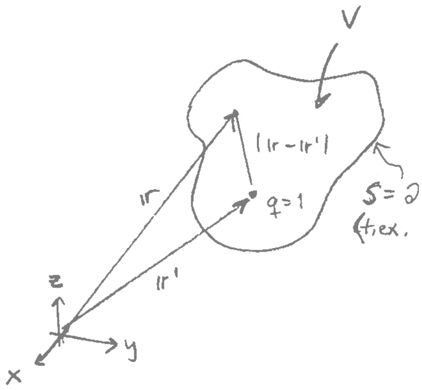
Sfär i tre dimensioner (för Dirichlet)

$$\nabla^2\phi = \underbrace{-\rho(\mathbb{r})}_{\text{källterm}}$$ på ett visst område V med givna randvillkor på gränsytan $S = \partial V$

Greensfunktionen till denna ekvation är en lösning för fallet att $\rho(\mathbb{r}) = \delta(\mathbb{r}-\mathbb{r}')$ som svarar mot en punktladdning i punkten $\mathbb{r} = \mathbb{r}'$

Betecknas som $\phi_{\text{speciell}}(\mathbb{r}) = G(\mathbb{r}, \mathbb{r}')$

(styrka $q = 1$)



$S = \partial V$
(t.ex. $\phi(\mathbf{r}) = 0$ på ∂V)

$$\frac{q}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \left(\frac{q}{4\pi r} \quad \text{om } r = \text{avstånd till ledningen} \right)$$

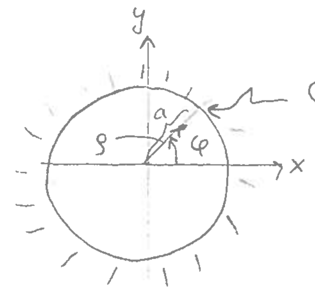
gäller bara om $V =$ "hela $\mathbb{R}^3$"

G uppfyller $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

3 Variabelseparation

Titta på $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$ på cirkelskiva i två dimensioner

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$



$\phi(\mathbf{r})\big|_{\partial V} = h(\varphi)$

på randen

Sök lösningar av formen

$\phi(\rho,\varphi) = f(\rho)g(\varphi)$

$$\Delta\phi = \Delta f(\rho)g(\varphi) = g(\varphi)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{f(\rho)}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = 0$$

Detta ger

$$\underbrace{\frac{\rho^2}{f(\rho)}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}}_{\substack{\text{beror bara på } \rho \\ \text{måste vara konstant} \\ -\lambda}} + \underbrace{\frac{1}{g(\varphi)}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}}_{\substack{\text{beror bara på } \varphi \\ \text{måste vara konstant} \\ \lambda}} = 0$$

, den "separerade" ekvationen

$$\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = \lambda g(\varphi) \quad \left(g \text{ är en "egenfunktion" till } \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$$

$$\Longrightarrow g(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

Randvillkor $g(0) = g(2\pi) \Rightarrow \begin{cases} \cos(m\varphi) & m = 0, 1, 2, \ldots \\ \sin(m\varphi) & m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$

$\lambda = -m^2$ är "egenvärdet"

Radiell ekvation: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} f(\rho) = 0$

$m = 0$: $\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} = 0$

$\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} = B \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{B}{\rho}$, $f(\rho) = A + \underbrace{B\ln(\rho)}_{\text{svarar mot en punktkälla i två dimensioner (skippar vi)}}$

$\Phi(\mathbf{r}) = A$ är en lösning

om $\Phi\big|_{\partial V} =$ konstant $= A$

$m > 0$: sök lösning $f(\rho) = \rho^p$

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\rho^p - \frac{m^2}{\rho^2}\rho^p = 0$

$p^2\rho^{p-2} - m^2\rho^{p-2} = 0$, $p^2 = m^2 \Rightarrow p = \pm m$

Martin glömde

$f(\rho) = A\rho^m + \underbrace{B\frac{1}{\rho^m}}_{\text{singulär i origo (skippar vi)}}$

$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \phi_0\left(\frac{\rho}{a}\right)^m \cos m\varphi \\ \text{eller} \\ \phi_0\left(\frac{\rho}{a}\right)^m \sin m\varphi \end{cases}$ om randvillkoret är $\Phi(\mathbf{r})\Big|_{\partial V} = \begin{cases} \phi_0\cos(m\varphi) \\ \text{eller} \\ \phi_0\sin(m\varphi) \end{cases}$

Hur gör man för mer allmänna randvillkor $\phi(\mathbf{r})\big|_{\partial V} = h(\varphi)$

Jo, man utvecklar $h(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)$

Lösning: $\phi(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \cos(m\varphi) + b_m \left(\frac{\varrho}{a}\right)^m \sin(m\varphi)$

ingår ej

Värmeledning, diffusion

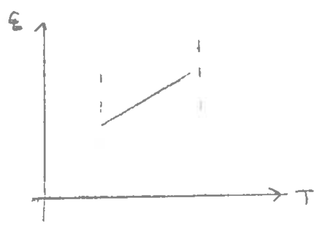
2010-10-01
Fredag

Söker: en diff.ekv. för $T(\mathbf{r}, t)$

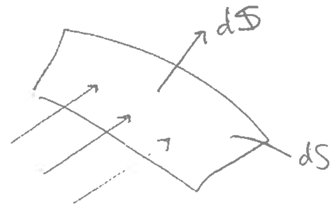
Antagande: värmetäthet $\propto T$

$$\underline{\mathcal{E}} = c\,\varrho\, T \quad (+\text{konst.})$$

J/m³ — densitet — värmekapacitivitet – $[\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}]$



Värmeströmtäthet $\mathbf{q}$



Energiflöde genom ytan

$$dE = \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}\; dt$$

Värmeenergi bevarad $\Longrightarrow$ kontinuitetsekv.: $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$

Med värmekälltäthet $s(\mathbf{r}, t)$: $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = s \quad [\mathrm{J\,m^{-3}\,s^{-1}}]$

– Hur lätt transporteras värme?

Antag: ström $\propto \nabla T$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$$

värmekonduktivitet
ledningsförmåga

för att utjämna

(Antagande: ϱ, c, λ konstanta)
(– homogent material)

$$c\varrho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = s \qquad \frac{\partial T}{\partial t} - \underbrace{\frac{\lambda}{c\varrho}}_{k} \Delta T = \underbrace{\frac{s(\mathbf{r},t)}{c\varrho}}_{u(\mathbf{r},t)}$$

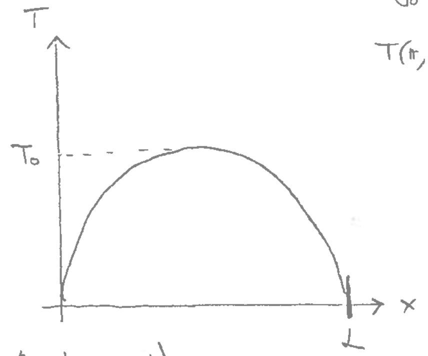
$$\boxed{\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} - k\Delta T(\mathbf{r},t) = u(\mathbf{r},t)}$$ Värmelednings- / diffusionsekv.

Stationärt : Poissons ekv. (med $\varrho(\mathbf{r},t) = \frac{u(\mathbf{r},t)}{k} = \frac{s(\mathbf{r},t)}{\lambda}$)

Exempel i en dimension :

begynnelse

$T(\mathbf{r}, t_0) = f(\mathbf{r})$



$T(x,0) = T_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ begynnelsevärde

$T(0,t) = 0$ (Dirichlet)

$T(L,t) = 0$

Neumann : $\forall$ (ingen värmetransport genom väggen)

Värmeledningsekv. $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0$

Notera : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \frac{\pi x}{L} = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$

Ansats : $T(x,t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{L}$ (uppfyller $T(0,t) = T(L,t) = 0$)

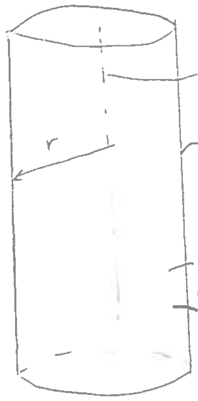
$> \quad f'(t) \cancel{\sin \frac{\pi x}{L}} + k \frac{\pi^2}{L^2} f(t) \cancel{\sin \frac{\pi x}{L}} = 0$

$f(t) = A e^{-\frac{\pi^2 k t}{L^2}}$ $\quad A = T_0$

bestäms av T_0

$$T(x,t) = T_0 e^{-\frac{\pi^2 k t}{L^2}} \sin \frac{\pi x}{L}$$

Exempel:



Tunn tråd – värmekälla med styrka τ $\quad [J m^{-1} s^{-1}]$

$T = T_0$ på $\cancel{r}\ \varrho! = a$ ← OBS! cyl.

(ϱ, c, λ)

Sök stationär $T(\mathbf{r})$

$$\Delta T(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\lambda}\tau\,\delta^2(x,y)$$

0 för $(x,y) \neq 0$

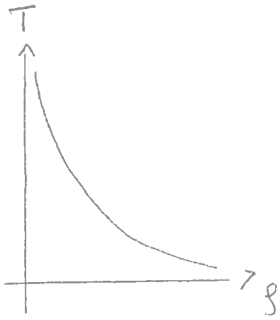
För $\varrho \neq 0$: $\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial T}{\partial \varrho}\right) = 0 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\right)$

$$T(\varrho) = A + B \log \cancel{\frac{\varrho}{\varrho_0}}\ \frac{\varrho}{a}$$

linjekälla med styrka $-2\pi B = \frac{\tau}{\lambda}$

$$T(\varrho) = A - \frac{\tau}{2\pi\lambda}\log\frac{\varrho}{a} \qquad T(a) = T_0 \implies A = T_0$$

$$T(\varrho) = T_0 - \frac{\tau}{2\pi\lambda}\log\frac{\varrho}{a}$$



Lv. 6

2010-10-05 Tisdag

Elektrostatik

inget tidsberoende

el. fält

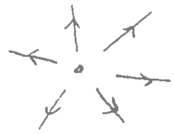
$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (1) \\ \nabla \times \mathbb{E} = 0 & (2) \end{cases}$$

(ε_0 : dielektricitetskonst. i vacuum)

$\Downarrow$

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$$

elektrostatisk potential



$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

"Magnetostatik"

"stationära magnetfält" mer korrekt, ty strömmen rör sig

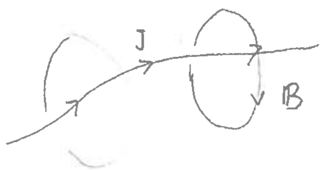
el. ström

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbf{j} & (4) \\ \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 & (5) \end{cases}$$

magn. fält

magn. permeabilitet i vacuum

inga magnetiska laddningar!



$$\mathbb{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbb{A}(\mathbf{r})$$

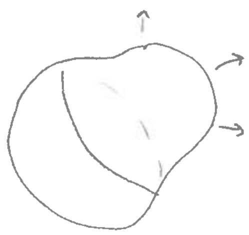
vektorpotential

$A \longrightarrow A + \nabla\Lambda$

använd så att $\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$

$$\boxed{\Delta \mathbb{A} = -\mu_0 \mathbf{j}}$$

poissons ekv. för en vektor



$$\nabla \cdot \mathbb{B} = \rho_m$$

$$\oint_S \mathbb{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \mathbb{B} \cdot dV = \int_V \rho_m \, dV$$

$$\oint_{C=\partial S} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{där} \qquad \phi = \int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S}$$

$$\int_S (\nabla\times\mathbb{E})\cdot d\mathbb{S} \qquad \text{dvs.} \quad \nabla\times\mathbb{E} \neq 0 \,!$$

(då tidsberoende)

Ny ekv. : $\underline{\nabla\times\mathbb{E} + \frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} = 0}$ för tidsberoende fält

"Faradays lag"

Kolla kont. ekv. !

(Vid källtäthet (1) och ström (2) tänk i kontinuitetsekvationen)

$$\nabla\cdot\mathbb{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\nabla\times\mathbb{B}) \quad \leftarrow \text{lägg till term!} \rightsquigarrow \quad \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}\right)$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbb{E} = \varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}$$

Ny ekv: $\nabla\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbb{j}$

$$\boxed{\begin{aligned}
&(1) \quad \nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
&(2) \quad \nabla\times\mathbb{E} + \frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} = 0\\
&(3) \quad \nabla\cdot\mathbb{B} = 0\\
&(4) \quad \nabla\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbb{j}
\end{aligned}}$$

Maxwells ekv.

SI : $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{TA^{-1}m^{-1}}$ ("Dummaste talet jag sett i mitt liv")

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

$$(3) \Rightarrow \quad \mathbb{B}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$$

$$(2): \quad \nabla \times \mathbb{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \quad = \quad \nabla \times \left(\mathbb{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla \phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

$\rho = 0, \ \mathbf{j} = 0$

Vågekvationen från ME i vakuum

"Eliminera $\mathbb{B}$" mellan (2) & (4)

$$(2) \Longrightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) + \nabla \times \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0$$

$$(4) \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbb{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\longrightarrow \quad -\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) - \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \mathbb{E} = \nabla \cancel{(\nabla \cdot \mathbb{E})} - \nabla \times (\nabla \times \mathbb{E})$$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbb{E} = 0} \quad \text{vågekvationen}$$

Våglösningar till vågekvationen

Skalärt fält ϕ: $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\mathbb{r},t) = 0 \Rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

$\omega = ck$

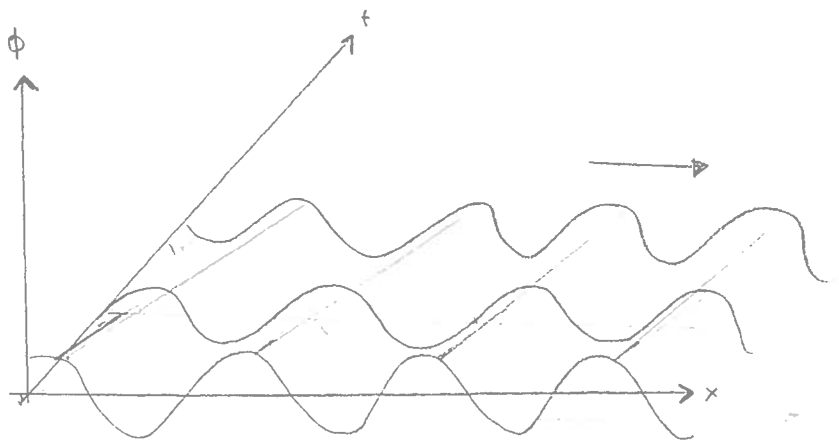
Lösningar: $\phi = \phi_0 e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)} \longrightarrow \phi_0 e^{i(kx-\omega t)}$

"gissning"

konstant vektor

Välj x-axeln längs k

realdel: $\phi_0 \cos(kx - \omega t)$
$= \phi_0 \cos k(x - \frac{\omega}{k} t)$



Vid given tid t: samma fas då $x \longrightarrow x + \frac{2\pi}{k}$

Vid givet x: samma fas då $t \longrightarrow t + \frac{2\pi}{\omega}$

våglängd λ

vågtal: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ ← periodtid

vinkelfrekvens

Hastighet? Punkter med samma fas: $x - \frac{\omega}{k} t = \text{konst.} = x_0$

$x = x_0 + \frac{\omega}{k} t$

$\underline{v = c!}$

$\mathbb{E}(\mathbb{r},t) = \mathbb{E}_0 e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)}$ $\qquad \omega = c|\mathbb{k}|$ $\qquad \mathbb{k} = \mathbb{n}\frac{\omega}{c}$

konst. $\qquad |\mathbb{n}| = 1$

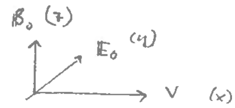
$\mathbb{B}(\mathbb{r},t) = \mathbb{B}_0 e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)}$

polarisation

$$\mathbb{E}(\mathbb{r},t) = \mathbb{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\mathbb{n}\cdot\mathbb{r} - ct)}$$
$$\mathbb{B}(\mathbb{r},t) = \mathbb{B}_0 e^{i\frac{\omega}{c}(\mathbb{n}\cdot\mathbb{r} - ct)}$$

$\nabla\cdot\mathbb{E} = 0 \Rightarrow \mathbb{n}\cdot\mathbb{E}_0 = 0$ p.s.s. $\mathbb{n}\cdot\mathbb{B}_0 = 0$

(2) el. och (4) ger $\mathbb{B}_0 = \frac{1}{c}\,\mathbb{n}\times\mathbb{E}_0$



Tensorer

2010-10-08
Fredag

"sista föreläsningen som kommer innehålla nåt".

Vektor $\mathbb{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i$ skriv: "v_i"

M (matris) - representeras av sina matriselement M_{ij}

Matrismultiplikation $M\mathbb{v}$: vektor

$$(M v)_i = M_{ij} v_j \quad \left(\equiv \sum_{j=1}^{3} M_{ij} v_j\right)$$

Transformationsegenskaper under byte av Cart. koord. system

(ortogonala transformationer)

koordinaterna ändras enligt

$$x'_{ij} = L_{ij} x_j$$

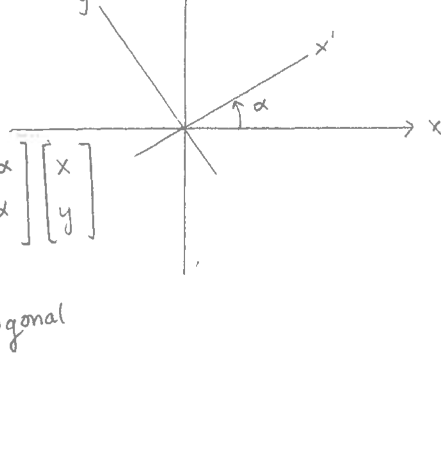
ortogonal om:
L: $L^t L = I$

$L^t L = I$: L_{ij}

$$(L^t L)_{ij} = (L^t)_{ik} L_{kj}$$
$$= \underline{L_{ki} L_{kj} = \delta_{ij}}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ortogonal



$$\underline{\text{Vektor}}: \qquad v_i' = L_{ij} v_j$$

$$\underline{\text{Skalär}}: \qquad s' = s$$

$$\underbrace{L_{ik}\, L_{jl}\, M_{kl}}_{(LM)_{il}\,,\ (L^t)_{lj}}$$

$$M_{ij}' = L_{ik} L_{jl} M_{kl} = (L M L^t)_{ij}$$

$$T_{i_1 \dots i_p}' = L_{i_1 j_1} \dots L_{i_p j_p} T_{j_1 \dots j_p}$$

$$\mathbb{v}^t \mathbb{w}$$
$$\parallel$$

Skalärprodukt $\quad \mathbb{v} \cdot \mathbb{w} = v_i w_i \qquad$ (ändras ej vid ortog. transf.)

$$(\mathbb{v} \cdot \mathbb{w})' = (\mathbf{L}\mathbb{v}) \cdot (\mathbf{L}\mathbb{w}) = \mathbb{v}^t \underbrace{\mathbf{L}^t \mathbf{L}}_{I} \mathbb{w} = \mathbb{v} \cdot \mathbb{w}$$

$$v_i' w_i' = \underbrace{L_{ij} v_j L_{ik}}_{\delta_{jk}} w_k = v_i w_i$$

$\varepsilon_{ijk} \qquad \underline{\text{tensor}}? \quad \boxed{\text{Ja!}}$

$$(\mathbb{a} \times \mathbb{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\varepsilon_{ijk}' = L_{il} L_{jm} L_{kn} \varepsilon_{lmn} \qquad (= \varepsilon_{ijk}\,?)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ijk} \text{ totalt antisymmetrisk} \\ \varepsilon_{123} = 1 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_{jik}' = L_{jl} L_{im} L_{kn} \varepsilon_{lmn}$$
$$= L_{jm} L_{il} L_{kn} \underbrace{\varepsilon_{mln}}_{-\varepsilon_{lmn}}$$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk}'$ antisymm.

Kolla
$$\varepsilon_{123}' = L_{1l} L_{2m} L_{3n} \varepsilon_{lmn}$$
$$= \sum_{\text{perm. } \sigma} \text{sign}(\sigma) L_{1\sigma_1} L_{2\sigma_2} L_{3\sigma_3} = \underline{\underline{\det \mathbf{L}}} = +1$$

$\uparrow$

<u>höger → höger</u>

Invarianta tensorer: $\quad \underline{\delta_{ij}, \varepsilon_{ijk}}$

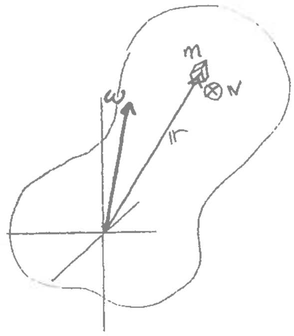
$a_i b_j$ tensor (a och b vektorer)

$\frac{1}{2}(a_i b_j \pm a_j b_i)$ tensorer (kolla ?)

$T_{il} U_{jkl}$ tensor

$$\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Exempel : Tröghetstensor, rörelsemängdsmoment :



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad v_i = \varepsilon_{ijk}\,\omega_j x_k$$

$$L_i = m\,\varepsilon_{ijk} x_j v_k = m\,\underbrace{\varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}}\,\omega_l x_m$$

$$= m(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, x_j x_m \omega_l =$$

$$= m(r^2\omega_i - x_i x_j \omega_j)$$

$L_i = m(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\,\omega_j$ För en kropp $m \to \rho\, dV$

$$L_i = \int_V dV \rho\,(r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\,\omega_j = I_{ij}\,\omega_j$$

I_{ij} – tröghetstensor

I_{11} : $r^2 - x^2 = y^2 + z^2$

Om man vill: $I'_{ij} = L_{ik} L_{jl} I_{kl}$

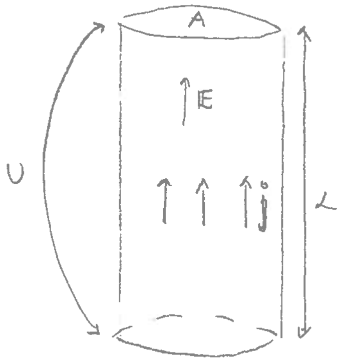
- välj system så att I' är diagonal $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$ ← huvudtröghetsmoment

Exempel: Konduktivitet

$I = \frac{U}{R}$ Ohms "lag"

$\Big\downarrow$ lokal

$\underline{j = \sigma E}$



$I = jA$

$E = \frac{U}{L}$

ickeisotropt

Anisotropt material: leder bra med ström åt vissa riktningar och sämre i andra

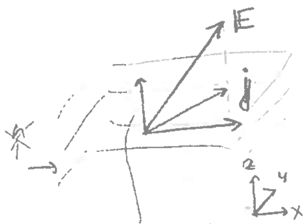
Isotrop: lika i alla riktningar

Homogen: lika överallt

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & \sigma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \qquad \sigma' < \sigma$$

$$\underline{j_i = \sigma_{ij} E_j}$$

mest allmänna linjära sambandet mellan 2 vektorer.



egenvektorernas riktningar ("upp" el. "höger")

2010-10-12
Tisdag

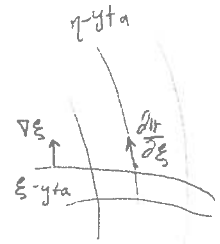
26 aug. 2010

1b.
$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2 \\ \eta = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \end{cases}$$

Bestäm α, β, γ så att $\xi\eta$-systemet har ortogonala basvektorer.

Basvektorer: $\propto \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \implies \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u_i}}_{\text{behöver } x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta)}, \frac{\partial y}{\partial u_i}$ behövs

$\propto \nabla u_i$: $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$

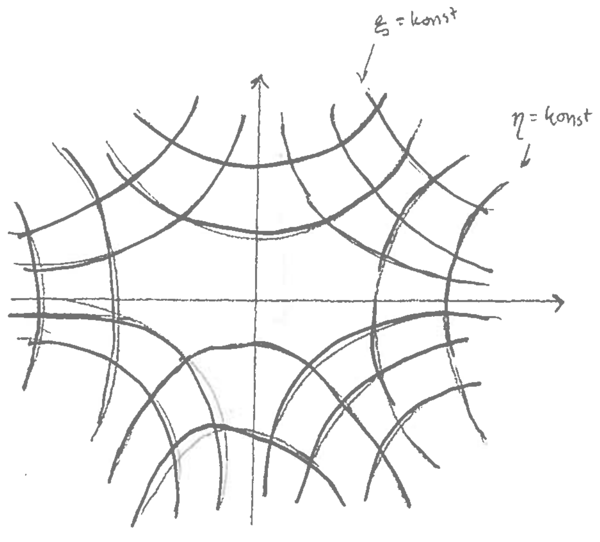


$u_i(x,y,z)$: använd 2) $\qquad x(u_i), y(\cdot), \cdot\ \cdot$: använd 1)

$\nabla \xi = (2x, -2y) \qquad \nabla \eta = (2\alpha x + \beta y, \beta x + 2\gamma y)$

$\nabla \xi \cdot \nabla \eta = 2x(2\alpha x + \beta y) - 2y(\beta x + 2\gamma y) = 4\alpha x^2 - 4\gamma y^2 \equiv 0$

$\alpha = 0, \quad \gamma = 0 \quad$ (β godt.)



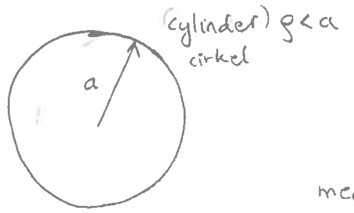
$\xi = x^2 - y^2$
$\eta = (\beta)\, xy$

9.20 Lös Laplaces ekvation mellan två hyperbler av formen

$$y = \frac{c}{x} \quad \leftarrow \eta\text{-ytor} \quad (\text{se föreg. sida})$$

med $\phi =$ konst. på vardera

– Linjär fkt $\phi = a + by$



Lös Laplaces ekvation innanför cyl.

$\Delta\phi = 0$

med RV $\phi(\rho = a) = \phi_0 + \phi_1 \cos p\varphi$, p heltal

Gissning: $\phi(\rho, \varphi) = f(\rho) + g(\rho)\cos p\varphi$

Laplace: $\Delta\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} 1 = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\cos p\varphi = -p^2 \cos p\varphi \end{array}\right]$$

$= \frac{1}{\rho}(\rho f')' + \frac{1}{\rho}(\rho g')'\cos p\varphi - \frac{p^2}{\rho^2} g \cos p\varphi$

① $\frac{1}{\rho}(\rho f')' = 0$

② $\frac{1}{\rho}(\rho g')' - \frac{p^2}{\rho^2} g = 0$

redan här ser vi att det funkar

$(\rho f')' = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho f' = A \, , \quad f' = \frac{A}{\rho}$

$\Rightarrow \quad f = \cancel{A \log \rho} + B$

linjekälla i 3D, stryks ty finns ej källor i cylindern

② Ansats: $g(\rho) = \rho^m$ (linjärkomb av sådana termer)

$\Rightarrow \quad g' = m\rho^{m-1} \, , \quad \rho g' = m\rho^m \, , \quad (\rho g')' = m^2 \rho^{m-1}$

$m^2 \rho^{m-2} - p^2 \rho^{m-2} = 0 \qquad \underline{\underline{m^2 = p^2}}$

$g(\rho) = \cancel{C\rho^{-p}} + D\rho^p$

singulär

Ta bort singulära termer, gäller även för Poissons ekv. då det inte innehåller δ (då Pois. ekv. är fin och begr.)

$\Phi(\rho, \varphi) = B + D\rho^p \cos p\varphi \qquad \cdot \rho = a \quad \Rightarrow \quad B = \varphi_0$

$Da^p = \varphi_1$

20/10 2009

1 b. A_{ij} antisymmetrisk: $A_{ij} = -A_{ji}$ ("$A^t = -A$")

Beräkna $v_i = \varepsilon_{ijk} \underbrace{\varepsilon_{jlm} A_{lm}}_{\text{def } a_j} \underbrace{\varepsilon_{knp} A_{np}}_{a_k}$

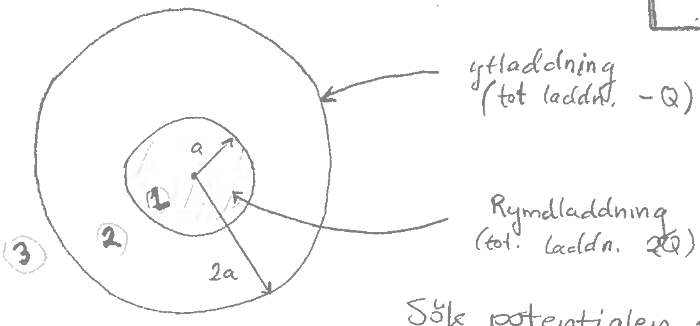
$= \varepsilon_{ijk} a_j a_k = \varepsilon_{ikj} a_k a_j = -\varepsilon_{ijk} a_j a_k = 0$

$(a \times a)_i$

A_{ij} antisymm, $\Rightarrow \quad a_i = \varepsilon_{ijk} A_{jk}$

c:a 11.7

2010-10-13
Onsdag



Sök potentialen överallt!

$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ — [Greensfunktion möjlig, men onödigt jobbig]

— Lös PE på områdena 1,2,3 & skarva!

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)$$

$$\rho = \frac{2Q}{\frac{4\pi}{3}a^3} = \frac{3Q}{2\pi a^3}$$

1) $\frac{1}{r^2}(r^2\phi')' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3Q}{2\pi a^3} \equiv -k$

2), 3) $\frac{1}{r^2}(r^2\phi')' = 0$

1) $(r^2\phi')' = -kr^2$, $\cancel{r^2}\phi' = -\frac{k}{3}r^{\cancel{3}} + \frac{A}{r^2}$

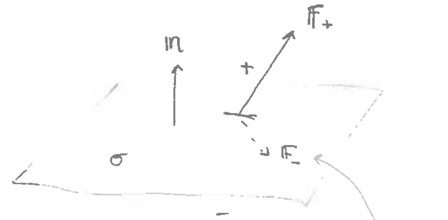
$\phi_1(r) = \underbrace{-\frac{k}{6}r^2}_{\text{part. lösn.}} \underbrace{-\frac{\cancel{A}}{\cancel{r}} + B}_{\text{homogenlösn.}}$

2) $\phi_2(r) = \frac{C}{r} + D$

3) $\phi_3(r) = \frac{E}{r} + F$

över ytkälla har ~~fältet~~ diskontinuitet
kont. ty kan ej ha en spänning över ett oändligt litet steg

- Φ kontinuerlig 2ekv.
- $\mathbb{E}$ kontinuerlig, utom över ytkällan (2 ekv.)



$\mathbb{n} \cdot (\mathbb{F}_+ - \mathbb{F}_-) = \sigma$

2+2 = 4 ekv på 5 obekanta!
kan välja nollnivå, ta bort t.ex. F

- val: $\Phi(r) \to 0$ då $r \to \infty$
  3?

$$\Phi_1(r) = -\frac{k}{6} r^2 + B \Rightarrow \mathbb{E}_1 = \frac{k}{3} r \hat{r}$$

$$\Phi_2(r) = \frac{C}{r} + D \Rightarrow \mathbb{E}_2 = \frac{C}{r^2}\hat{r}$$

$$\Phi_3(r) = \frac{E}{r} \Rightarrow \mathbb{E}_3 = \frac{E}{r^2}\hat{r}$$

$r = a$: $-\frac{k}{6}a^2 + B = \frac{C}{a} + D \Rightarrow \frac{k}{3}a = \frac{C}{a^2}$

$r = 2a$: $\left[\sigma = -\frac{Q}{4\pi(2a)^2}\right]$ $\quad \frac{C}{2a} + D = \frac{E}{2a}$

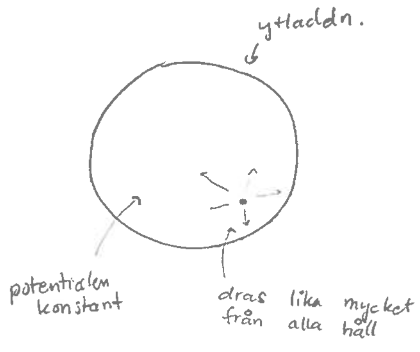
$$\frac{E}{(2a)^2} - \frac{C}{(2a)^2} = \sigma = \frac{-Q}{16\pi a^2 \varepsilon_0}$$

2Q − Q

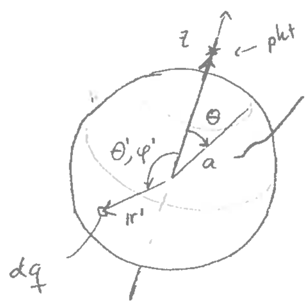
$C = \frac{1}{3}ka^3 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}$ $\quad E = C - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$

$$D = \frac{E - C}{2a} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

$$B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{5Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$



9.10



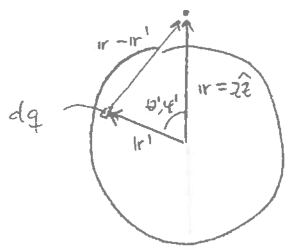
$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

Vektorfältet (fältstyrkan)? Potentialen?

Ansats: $\Phi(r,\theta,\varphi) \overset{?}{=} f(r) + g(r)\cos\theta$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$$

Ansatsen är ett alt. till lösn. + skarvning



$$|r - r'| = \sqrt{z^2 + a^2 - 2az\cos\theta'}$$

$$dq = \sigma\, dS = \sigma_0 \cos\theta' \cdot a^2 \sin\theta'\, d\theta' d\varphi'$$

Det lilla ytelementet vid θ', φ' ger bidrag till pot.:

$$d\Phi = \frac{dq}{4\pi|r - r'|} = \frac{\sigma_0 a^2 \sin\theta' \cos\theta'\, d\theta' d\varphi'}{4\pi\sqrt{z^2 + a^2 - 2az\cos\theta'}}$$

$$\Phi(\overset{(x)}{0}, \overset{(y)}{0}, z) = \frac{\sigma_0 a^2}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin\theta' \cos\theta'}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2az\cos\theta'}}$$

$t = \cos\theta'$
$dt = -\sin\theta'\, d\theta'$

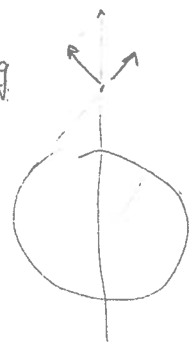
$$= -\frac{\sigma_0 a^2}{2}\int_1^{-1} \frac{t\, dt}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2azt}} = \frac{\sigma_0 a^2}{2}\left(\left[\frac{2t}{-2az}\sqrt{z^2 + a^2 - 2azt}\right]_{t=-1}^{1} - \frac{2}{-2az}\int_{-1}^{1} dt\sqrt{z^2 + a^2 - 2at}\right)$$

$$\sqrt{z^2 + a^2 \pm 2az} = \sqrt{(z \pm a)^2} = |z \pm a|$$

$$\mathbb{F} = \frac{2\sigma_0 a^3}{3|z|^3}\hat{z}, \quad |z| > a$$

$$\mathbb{F} = -\frac{\sigma_0}{3}\hat{z}, \quad |z| < a$$

$\mathbb{F}$ kan inte ge bidrag åt annat håll än i z-led på z-axeln.



2010-10-15
Fredag

Vågekv. : $\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\mathbb{r}, t) = 0$

våglösningar $\phi(\mathbb{r},t) = \phi_0 e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)}$

lösning om $\underline{\underline{\omega = c|\mathbb{k}|}}$ hast.

$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbb{k}|}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

20091020 – 2.

Shrödingerekv. : $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)\psi = 0$ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Plan våg : $\psi = \psi_0 e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)}$

$\frac{\partial}{\partial t}$: inre deriv. : $-i\omega$

∇ : inre deriv: $\mathbb{k}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta \longrightarrow i\hbar(-i\omega) + \frac{\hbar^2}{2m}(i\mathbb{k})\cdot(i\mathbb{k}) = \hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = 0$$

klart

jämför : $-k^2 - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2$

Svar : $\boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}}$

$$\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t = \mathbb{k}\cdot\underbrace{\left(\mathbb{r} - \frac{\omega\mathbb{k}}{k^2}t\right)}_{\text{"}\mathbb{r} - \mathbb{v}t\text{"}}$$

$v = \frac{\omega}{k}$

$$x^2+y^2=\rho^2$$
$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

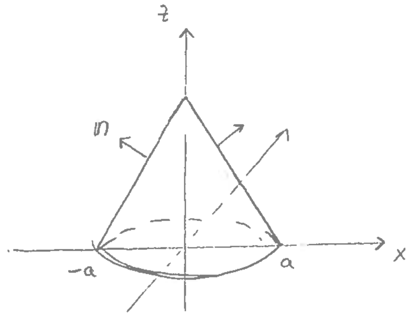
20100826

3.

$$\mathbb{F} = \frac{F_0}{\rho^2 r^2}\left[a\rho^2(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}) + ar^3(x\hat{x}+y\hat{y}) + \rho^2 r^3\left(\frac{2}{a^2}(x+y)z\hat{z} + \frac{3}{a}(x\hat{x}-y\hat{y}+z\hat{z})\right)\right]$$

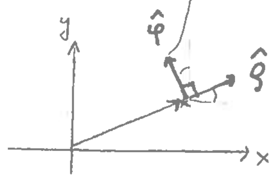
Beräkna $\int_S \mathbb{F}\cdot d\mathbb{S}$ $\quad S:\ \rho+z=a,\ z>0 \quad (\hat{z}\cdot n>0)$

S:



$x=\rho\cos\varphi$
$y=\rho\sin\varphi$

$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$



$$x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z} = \mathbb{r} = \begin{cases} r\hat{r} \\ \rho\hat{\rho}+z\hat{z}\end{cases}$$

$$\rho\hat{\rho} = x\hat{x}+y\hat{y}$$
$$\rho\hat{\varphi} = -y\hat{x}+x\hat{y}$$

$(a,b) \rightarrow (-b,a)$

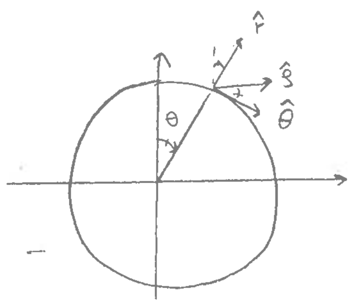
$$\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \hat{\varphi}$$

$$\mathbb{F} = F_0 a^2\frac{r\hat{r}}{r^3} + F_0 a\frac{\rho\hat{\rho}}{\rho^2} + \frac{2F_0}{a^2}(x+y)z\hat{z} +$$
$$+ \frac{3F_0}{a}(x\hat{x}-y\hat{y}+z\hat{z})$$

pkt. källa i origo
$q = 4\pi F_0 a^2$
$\downarrow$
bidrag $2\pi F_0 a^2$

linjekälla på z-axeln
$k = 2\pi F_0 a$

ger inga bidrag till locket i $z=0$



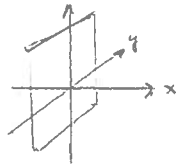
$$\left[\ \int_S \frac{q\hat{r}}{4\pi r^2}\cdot d\mathbb{S} = \frac{q\,\overset{\text{rymdvinkel}}{\Omega}}{4\pi}\ \right]$$

$$\hat{\theta} = \hat{\rho}\cos\theta - \hat{z}\sin\theta$$

✓
bidrag $2\pi F_0 a\cdot a$

Resten av termerna tar man divergensen av, och så räknar man en volymintegral.

$\mathbb{F} = \ldots + F_0\,\mathrm{sign}\,x\ \hat{x}$ $\quad \begin{cases} F_0, & x>0 \\ -F_0, & x<0\end{cases}$ $\quad$ diskontinuitet: ger ytkälla



2.14.
$$\begin{cases} u = r(1-\cos\theta) \\ v = r(1+\cos\theta) \\ w = \varphi \end{cases}$$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \longrightarrow h_i = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right|$
(om $\mathbf{r}$ givet som fkter av u_i)

$\nabla u_i \longrightarrow h_i = \frac{1}{|\nabla u_i|}$ (om u_i givna som fkter av xyz)

$$\nabla u = \hat{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad \ldots$$

Konstanta matriser är inga tensorer (byter ej siffror vid transformation)
förutom enhetsmatrisen

Visa att δ_{ij} är en tensor
$$\delta'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\delta_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$$

En vektor ska kunna transformeras vid mult. med ortogonal matris.