Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2012-01-13

DAG: Fredag 13 januari 2012 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 30 januari, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar era skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$. **(3p)**
b) Bestäm en bas för värderummet $V(A)$. **(2p)**
c) Ange rangen för A. **(1p)**
d) Ange dimensionen för radrummet till A. **(1p)**

Uppgift 2.

Betrakta en block-triangulär matris på formen $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$.

a) Visa att om λ är ett egenvärde till A_{11} så är λ även egenvärde till A. **(2p)**
b) Visa att om λ är ett egenvärde till A så är λ även ett egenvärde till något av diagonal-blocken A_{11} eller A_{22}. **(3p)**
c) Bestäm en matris sådan att dimensionen för egenrummet till något λ är strikt mindre än multipliciteten för λ. **(2p)**

Uppgift 3.
a) Visa att för en skalärprodukt och notsvarande norm i ett linjärt rum gäller:
$< u, v >= \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$. **(3p)**
b) Vi önskar bestämma bästa approximation av $f = t^4$ i underrummet $P_2[0,1]$ (mängden av polynom av grad ≤ 2) med avseende på skalärprodukten $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$. Skriv upp det kvadratiska ekvationssystem vars lösning ger svaret på uppgiften. Ekvationssystemet behöver inte lösas. **(4p)**

Uppgift 4.
a) låt $Q(x) = x^T Ax$, med $A \in R^{n\times n}$ symmetrisk, vara en kvadratisk form. Visa att $\lambda_{min} \leq \frac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_{max}$, där λ_{min} och λ_{max} är minsta och största egenvärde till A. Visa att gränserna antas med likhet då x är egenvektor hörande till λ_{min} respektive λ_{max}. **(4p)**
b) Betrakta den kvadratiska formen $Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2$.
Bestäm största värde på $Q(x)$ under villkor att $x^T x = 2$. **(2p)**.
c) Bestäm en vektor u med $u^T u = 2$ så att $Q(u)$ är maximal. **(1p)**
d) Bestäm största värdet på $Q(x)$ under villkoren $x^T x = 1$ och $x^T u = 0$ där u är lösningen i c)-uppgiften. Bestäm även två vektorer x för vilka $Q(x)$ antar detta största värde. **(1p)**

Uppgift 5.
Ekvationen $2 - x - e^x = 0$ har en rot nära $x = 0.5$. Vi önskar bestämma en approximation till roten med en iterativ metod.
a) Teckna Newtons metod för att lösa ekvationen och gör en iteration från startapproximationen $x_0 = 0$. **(2p)**
b) Teckna en konvergent fixpunktsiteration för att lösa ekvationen och gör en iteration med metoden från startapproximation $x_0 = 0$. **(2p)**
Ledning: $\ln 2 \approx 0.69$.
c) Gör en grov feluppskattning för approximationen i a)-uppgiften. **(2p)**
Ledning: $e^{0.5} \approx 1.65$.

Uppgift 6.
a) Definiera linjesökningsproblemet vid optimering i flera variabler utan bivillkor. **(2p)**
b) Härled en formel för optimal steglängd vid linjesökning då funktionen som ska minimeras är kvadratisk med positivt definit Hessian. **(4p)**
c) Betrakta den olinjära modellen $\Psi(x,t) = x_1 + x_2 t + e^{-x_3 t}$ som vi önskar anpassa till mättabellen

t	0	1	2	3	4
Ψ	1	2	4	5	7

i minsta-kvadrat-mening. Teckna Gauss-Newtons metod för att lösa problemet. Ange explicit hur residual och Jacobian ser ut i första iterationen om du startar i $x_0 = [1\ 1\ 0]^T$. Iterationssteget behöver inte utföras (beräknas). **(4p)**

Uppgift 7.
Heuns metod för begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer definieras av:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{f(t_k,\ y_k) + f(t_k + h,\ y_k + hf(t_k,\ y_k))\}$

a) Bestäm approximationsordning och stabilitetsområde för Heuns metod. **(5p)**
b) Betrakta det linjära ode-systemet: $y' = Ay,\ t > 0,\ y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ där $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.
Undersök om systemet är stabilt. **(2p)**
c) Bestäm en approximativ lösning till problemet i b)-uppgiften i punkten $t = 0.5$ med Heuns metod och steglängd $h = 0.5$. **(3p)**

Uppgift 8.
Betrakta randvärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 2y' + y = t\sin t,\ 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0,\quad y'(1) = 1 \end{cases}$
a) Formulera om problemet för inskjutning och ange den ekvation som metoden leder till. **(3p)**
b) Teckna en lämplig iterationsmetod för att lösa ekvationen i a)-uppgiften. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671

Lösningar till tentamen 13 januari 2012

1a) Gausselimination: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$

Homogena systemet med denna uppåt triangulära matris U har parameter-lösningen $x = s[-3\ 2\ 1]^T$, så bas för nollrummet är $[-3\ 2\ 1]^T$.

1b) Vi ser att de två första kolonnerna i Gauss-elimineringen är pivot-kolonner, då spänns kolonnrummet av de två första kolonnerna i ursprungsmatrisen, dvs $\{[1\ 0\ 3\ 2]^T,\ [2\ 1\ 4\ 1]^T\}$ är bas för kolonnrummet.

1c) Rangen är dimensionen på värderummet, och det framgår av b)-uppgiften att rangen är 2.

1d) Dimensionen för radrummet är samma som dimensionen för värderummet (kolonnrang = radrang) och är alltså 2.

2a) Enligt förutsättning gäller $A_{11}x = \lambda x$ för en egenvektor $x \neq 0$. Då gäller $A\begin{bmatrix} x \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x \\ O \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ O \end{bmatrix}$, dvs. λ är egenvärde till A.

2b) Enligt förutsättning gäller $A\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, där inte både y och z kan vara nollvektorn. Detta kan skrivas

$$\begin{cases} A_{11}y + A_{12}z = \lambda y \\ \qquad\quad A_{22}z = \lambda z \end{cases}$$

Om nu $z \neq 0$ så är λ egenvärde till A_{22} enligt andra ekvationen. Om $z = 0$ och därmed $y \neq 0$ så är λ egenvärde till A_{11} enligt första ekvationen.

2c) Exempelvis matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, som har egenvärde $\lambda = 1$ med multiplicitet 2 men egenrummet till $\lambda = 1$ är $Span\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ som har dimension 1.

3a) Utveckla högerledet enligt definition av norm:

$$\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 = \frac{1}{4} < u+v, u+v > - \frac{1}{4} < u-v, u-v >$$

$$= \frac{1}{4}(\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v >) - \frac{1}{4}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 < u, v >) =< u, v >,$$

som är vänsterledet.

3b) Felet ska vara ortogonalt mot underrummet, dvs mot alla baselement i underrummet. Ta standardbasen för $\mathcal{P}_2[0,1]$ dvs. $\{1,\ t,\ t^2\}$.
Låt approximationen vara uttryckt i basen som $\hat{f} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$. Villkoren att felet $\hat{f} - f = \hat{f} - t^4$ ska vara ortogonalt mot baselementen blir då ekvationerna:

$$< c_0 + c_1 t + c_2 t^2 - t^4, 1 >= \int_0^1 c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \ dt - \int_0^1 t^4 \ dt = 0$$

$$< c_0 + c_1 t + c_2 t^2 - t^4, t >= \int_0^1 c_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3 \ dt - \int_0^1 t^5 \ dt = 0$$

$$< c_0 + c_1 t + c_2 t^2 - t^4, t^2 >= \int_0^1 c_0 t^2 + c_1 t^3 + c_2 t^4 - \int_0^1 t^6 \ dt = 0$$

Med evaluerade integraler får vi ekvationssystemet: $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \end{bmatrix}$.

4a) Eftersom A är symmetrisk är den ortogonalt diagonaliserbar. Vi kan alltså skriva $x^T A x = y^T D y,\ y = P^T x \Leftrightarrow x = Py$, där D är diagonal med egenvärden på diagonalen och P är ortogonal med egenvektorer som kolonner. Vi får då $Q(x) = Q(Py) = y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 \geq \lambda_{min}(y_1^2 + ... + y_n^2) = \lambda_{min} y^T y = \lambda_{min} x^T x$. Likhet får vi om $y_i = 0$ för alla $\lambda_i > \lambda_{min}$ dvs för $x = Py = \sum_{\lambda_i = \lambda_{min}} y_i u_i$ där u_i är egenvektor motsvarande λ_i. Då är $Ax = \lambda_{min} \sum_{\lambda_i = \lambda_{min}} y_i u_i = \lambda_{min} x$ dvs x är egenvektor hörande till λ_{min}. På samma sätt visas övre gränsen.

4b) Den kvadratiska formen kan skrivas $Q(x) = x^T A x$ med $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Egenvärdena till A är $4,\ 5$ och 6. Det gäller att $x^T A x \leq \lambda_{max} x^T x$. Det största värdet är på $Q(x)$ då $x^T x = 2$ är alltså $2\lambda_{max} = 12$.

4c) Största värdet antas för egenvektor motsvarande λ_{max} och som är $c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ normerad till längd $\sqrt{2}$ dvs $u = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4d) Detta största värde är näst största egenvärde dvs 5 och antas för motsvarande normerade egenvektor dvs $x = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5a) Newtons metod: $x_{k+1} = x_k - \frac{2-x_k-e^{x_k}}{-1-e^{x_k}}$.
En iteration: $x_1 = x_0 + \frac{2-x_0-e^{x_0}}{-1-e^{x_0}} = 0 - \frac{2-1}{-2} = \frac{1}{2}$.
5b) Skriv ekvationen $e^x = 2 - x$ och logaritmera: $x = \ln(2-x)$.
Ungefärligt konvergenskriterium: $|\frac{1}{2-0.5}| \approx 0.67 < 1$.
Iteration: $x_{k+1} = \ln(2 - x_k)$.
En iteration: $x_1 = \ln(2 - x_0) = \ln 2 \approx 0.69$.
5c) Feluppskattning: $|x_1 - x^*| \lesssim |\frac{2-\frac{1}{2}-e^{\frac{1}{2}}}{1+e^{\frac{1}{2}}}| \approx \frac{0.15}{2.65} < 0.057$.

6a) Betrakta $min\ f(x),\ f : R^n \to R$ med approximation x_k och vald sökriktning s_k. Då är linjesökningsproblemet: $min\ f(x_k + \alpha s_k)$ med avseende på α.
6b) Låt $g(\alpha) = f(x_k + \alpha s_k)$. Då är linjesökningsproblemet $min\ g(\alpha)$ och vi får lösningen genom $g'(\alpha) = 0$. Nu är f kvadratisk, $f = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x + c$ så $g'(\alpha) = \nabla f(x_k + \alpha s_k)^T s_k = (H(x_k + \alpha s_k) + b)^T s_k = (Hx_k + b + \alpha H s_k)^T s_k = (\nabla f(x_k) + \alpha H s_k)^T s_k$ och $g'(\alpha) = 0$ om $\nabla f(x_k)^T s_k + \alpha s_k^T H s_k = 0$ dvs för $\alpha = -\frac{\nabla f(x_k)^T s_k}{s_k^T H s_k}$. Observera att H är symmetrisk.
6c) Låt $f_i = \Psi(x, t_i) - \Psi_i$ vara residualerna där Ψ_i är uppmätt värde i tid t_i enligt tabellen.

Vi får då $f = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 + e^{-x_3} - 2 \\ x_1 + 2x_2 + e^{-2x_3} - 4 \\ x_1 + 3x_2 + e^{-3x_3} - 5 \\ x_1 + 4x_2 + e^{-4x_3} - 7 \end{bmatrix}$. Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -e^{-x_3} \\ 1 & 2 & -2e^{-2x_3} \\ 1 & 3 & -3e^{-3x_3} \\ 1 & 4 & -4e^{-4x_3} \end{bmatrix}$.

Gauss-Newtons metod skrivs: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + s_k \\ J(x_k)s_k = -f(x_k) \end{cases}$

Med start i $x_0 = [1\ 1\ 0]^T$ blir $f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $J(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

7a) Tillämpa metoden på testproblemet: $y' = \lambda y$.
Vi får då $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\{\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)\} = y_k + h\lambda y_k + \frac{h^2\lambda^2}{2} y_k = y_k(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2})$.
För approximationsordningen jämför vi tillväxtfaktorn $1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}$ med tillväxtfaktorn för den exakta lösningen $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{6} + ...$ och finner att de överensstämmer med tre termer. Lokala felet är då $= O(h^3)$ och approximationsordningen är 2.
Stabilitetsområdet är mängden $h\lambda$ i komplexa talplanet för vilka lösningarna är begränsade.
Vi får fram stabilitetsområdet från tillväxtfaktorn ovan med $z = h\lambda$:
$S = \{z \in C; |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$.
7b) Vi beräknar egenvärdena till matrisen A. De blir $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Båda är negativa så systemet är stabilt.

7c) $f_0 = Ay_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$

$y_0 + \frac{1}{2}f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$f(y_0 + \frac{1}{2}f_0) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/8 \\ -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/8 \\ 3/4 \end{bmatrix}.$

8a) Skriv om problemet som system av första ordning genom $y_1 = y$ och $y_2 = y'$.

$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0 \\ y_2' = t\sin t - y_1 + 2y_2, & y_2(1) = 1 \end{cases}.$

Inför begynnelsevärdesproblem med variabel s:

$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0 \\ y_2' = t\sin t - y_1 + 2y_2, & y_2(0) = s \end{cases}.$

Anpassning till givet randvärde ger ekvationen $y_2(1, s) - 1 = 0$.

8b) Ekvationen i a)uppgiften kan lösas med sekantmetoden:

$s_{k+1} = s_k - \frac{(y_2(1,s_k)-1)(s_k-s_{k-1})}{y_2(1,s_k)-y_2(1,s_{k-1})}.$