Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2011-08-24

DAG: Onsdag 24 augusti 2011 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Ivar Gustafsson
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 14 september, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar era skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$. **(3p)**
b) Bestäm en bas för värderummet $V(A)$. **(3p)**
c) Ange rangen för A och dimensionen för radrummet till A. **(2p)**

Uppgift 2.

a) Låt U vara ett underrum till det linjära rummet V. Visa att om u' är ortogonalprojektionen av en vektor $u \in V$ på underrummet U så är u' den vektor i U som ligger närmast u. **(4p)**

b) Låt U vara det underrum i R^6 som definieras av $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$

Bestäm det minsta avståndet från $(1, 5, 4, -2, 7, -3)$ till U. **(4p)**

Uppgift 3.

a) Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning. Visa att om $\{v_1,\ v_2,\ \dots\ ,\ v_p\}$ är linjärt beroende i V så är $\{T(v_1),\ T(v_2),\ \dots\ ,\ T(v_p)\}$ linjärt beroende i W. **(3p)**

b) Betrakta den linjära avbildningen $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definierad av $T(p) = t^2 p''(t) + p'(t)$, där $\mathcal{P}_3$ är mängden av polynom av grad ≤ 3. Bestäm matrisen för avbildningen i standardbasen för $\mathcal{P}_3$. **(3p)**

c) Bestäm två polynom sådana att $T(p) = \alpha p$ för avbildningen i b)-uppgiften och för något $\alpha \in R$. **(2p)**

Uppgift 4.

a) Visa att om $A \in R^{n\times n}$ är en symmetrisk, positivt definit och ortogonal matris så gäller att summan av egenvärdena är lika med matrisens ordning n. **(3p)**

b) Lös följande system av differentialekvationer med *diagonaliseringsmetoden*

$$\begin{cases} x_1'(t) = -5x_1(t) + 2x_2(t), & x_1(0) = -6 \\ x_2'(t) = -2x_2(t), & x_2(0) = 3 \\ x_3'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t), & x_3(0) = -6 \end{cases} .$$ **(4p)**

Uppgift 5.

a) Härled en användbar formel för felfortplantning i en variabel och ange med hjälp av den en felgräns för det fortplantade felet. Ange de förutsättningar som gäller för att den ska kunna användas. **(3p)**

b) Anta att vi vill approximera $\sin t$ nära $t = 0$ med två termers Maclaurinutveckling. Teckna framåt- och bakåtfelen vid approximationen då $t = 0.1$ (utan att göra några numeriska beräkningar av ingående funktionsvärden). **(3p)**

c) Nämn en situation då det är lämpligare att använda bakåtfelet än framåtfelet. **(1p)**

Uppgift 6.

a) Gör en iteration med *Gauss-Newtons metod* med start i origo på det överbestämda icke-linjära ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 0.7 \\ x_1 + x_2^3 = 0.6 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} .$$

Lös det uppkomna överbestämda linjära systemet med normalekvationerna. **(4p)**

b) Ange en i allmänhet bättre metod än normalekvationerna för lösning av överbestämda linjära system. I vilket avseende är metoden bättre? **(2p)**

Uppgift 7.
Betrakta följande andra ordningens differentialekvation, där a är en parameter:

$$\begin{cases} y'' = (y-a)(y'-1), \quad 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0.5 \end{cases}$$

a) Låt $a = 1$. Utför ett steg med Eulers framåtmetod och steglängd $h = 0.1$. **(3p)**
b) Undersök om metoden i a)-uppgiften är stabil i startpunkten. **(3p)**
c) Låt nu a bero på lösningen enligt $a = y'(1) - y(1)$. Formulera problemet med inskjutningsteknik, ange den ekvation som ska lösas för att få fram a samt teckna sekantmetoden för att lösa den ekvationen. **(3p)**

Uppgift 8.
a) Definiera *linjesökningsproblemet* i samband med en sökmetod för att lösa optimeringsproblem i flera variabler utan bivillkor. **(2p)**
b) Betrakta Kvasi-Newton-metoden: $B_k s_k = -\nabla f(x_k)$. Visa att s_k blir en descentriktning om B_k är positivt definit. **(2p)**
c) Betrakta problemet att minimera $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$ utan bivillkor. Lös problemet approximativt med en iteration i Steepest Descent-metoden, med start i origo och exakt linjesökning. **(3p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 24 augusti 2011

1a) $N(A) = \{x \in R^4; Ax = 0\}$. Vi löser alltså homogena systemet $Ax = 0$. Två radreduceringar ger $Bx = 0$ med $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En parameterlösning blir $\begin{pmatrix} -t-2s \\ -2t-s \\ s \\ t \end{pmatrix}$ och vi kan välja vektorerna $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ som bas för $N(A)$.

1b) $V(A) = \{Ax; x \in R^4\}$. Två kolonnreduceringar ger matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och vi ser att vi kan ta vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ som bas för $V(A)$.

1c) Rangen är dimensionen för $V(A)$ och den är 2 enligt b)-uppgiften. Dimensionen för radrummet är samma som dimensionen för värderummet (kolonnrang = radrang) och är alltså 2.

2a) Se Lay, sats 9, kapitel 6.

2b) Låt A vara matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då är U nollrummet till A, $U = N(A)$. Vi projicerar först på $U^\perp = N(A)^\perp = V(A^T)$, som genereras av vektorerna $v_1 = (1,-1,1,-1,1,-1)$, $v_2 = (3,3,7,5,5,1)$. Vi skaffar en ON-bas för $U^\perp$ genom Gram-Schmidts metod. Vi får $e_1' = v_1$ och $e_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot e_1'}{e_1' \cdot e_1'} e_1' = v_2 - \frac{6}{6} e_1 = (2,4,6,6,4,2)$.
Med $e_i = e_i'/\|e_i'\|$, $i = 1,2$ får vi en ON-bas för $U^\perp$:
$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,1,-1,1,-1)$
$e_2 = \frac{1}{4\sqrt{7}}(2,4,6,6,4,2)$.
Ortogonalprojektionen av $u = (1,5,4,-2,7,-3)$ på $U^\perp$ är: $u'' = (u \cdot e_1)e_1 + (u \cdot e_2)e_2 = 2(1,-1,1,-1,1,-1) + \frac{1}{2}(2,4,6,6,4,2) = (3,0,5,1,4,-1)$.
Avståndet till underrummet blir alltså $\|u''\| = 2\sqrt{13}$.
Alternativt kan man lösa normalekvationerna av andra slaget: $AA^T x = Au$, beräkna $u'' = A^T x$ och $\|u''\|$.

3a) Att $\{v_1, \ ... \ , \ v_p\}$ är linjärt beroende innebär att det finns en linjär kombination $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p = \mathit{0}$ utan att alla α_j är noll. Betrakta då avbildningen T på samma linjärkombination. Då gäller eftersom T är linjär, speciellt är $T(\mathit{0}) = \mathit{0}$:
$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_p v_p) = \mathit{0}$
$\alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_p T(v_p) = \mathit{0}$
Detta är en linjärkombination av vektorerna $\{T(v_1), \ ... \ , \ T(v_p)\}$ som är noll utan att alla α_j är noll. Alltså är vektorerna linjärt beroende.
3b) Avbildningen på standardbasen $\{1, \ t, \ t^2, \ t^3\}$ för $\mathcal{P}_3$ ger:
$T(1) = 0, \ \ T(t) = 1, \ \ T(t^2) = 2t^2 + 2t, \ \ T(t^3) = 6t^3 + 3t^2$. Avläsning av koordinaterna för dessa element i $\mathcal{P}_3$ ger matrisens kolonner. Vi får $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
c) Två egenvektorer till M är t. ex. $e_1 = (1,0,0,0)^T$ och $e_2 = (1,2,2,0)^T$. Motsvarande polynom är $p_1 = 1$ och $p_2 = 1 + 2t + 2t^2$.

4a) En symmetrisk, positivt definit matris har reella, positiva egenvärden (sats i boken). För en ortogonal matris Q gäller att egenvärdena har beloppet 1, ty för λ egenvärde och x egenvektor gäller $\|Qx\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ och eftersom $\|Qx\| = \|x\|$ för en ortogonal matris (sats i boken) så gäller $|\lambda| = 1$. Alla n egenvärdena är positiva och med beloppet 1, alltså är alla lika med 1, och summerar till n.

b) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = -5, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -1$.
Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (-4,0,1)^T, \ v_2 = (-2,-3,8)^T$ och $v_3 = (0,0,1)^T$.
Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 = c_1 e^{-5t} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna $c_1, \ c_2$ och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = 2, \ c_2 = -1, \ c_3 = 0$.

Lösningen blir alltså $x = 2e^{-5t} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$.

5a) Felet $\delta x = \hat{x} - x$ fortplantas av funktionen $f(x)$ till $\delta f(x) = f(\hat{x}) - f(x)$. Medelvärdessatsen ger $\delta f(x) = f'(\xi)(\hat{x} - x) = f'(\xi)\delta x \approx f'(\hat{x})\delta x$. Ger felgräns $|\delta f(x)| \lesssim |f'(\hat{x})||\delta x|$. Användbar för små δx och om derivatan f' inte är noll i närheten av $\hat{x} \approx x$.
5b) Approximation $\sin t \approx t - \frac{t^3}{6}$. Framåtfelet: $0.1 - \frac{0.1^3}{6} - \sin(0.1)$.
Bakåtfelet: $\arcsin(0.1 - \frac{0.1^3}{6}) - 0.1$.
5c) När man ska avgöra om en algoritm är stabil eller inte.

6a) Vi ska lösa $f(x) = 0$ där $f = \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 - 0.7 \\ x_1 + x_2^3 - 0.6 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{cases}$ i minsta-kvadratmening.

Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 2x_1 & 4x_2 \\ 1 & 3x_2^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Vi får $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad f_0 = \begin{bmatrix} -0.7 \\ -0.6 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem (normalekvationerna): $J_0^T J_0 s_0 = J_0^T f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
$s_0 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.4 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - s_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$.
6b) $QR-$faktorisering eller SVD-faktorisering gör problemet mindre känsligt för störningar eftersom konditionstalet inte fördärvas lika mycket av lösningsmetoden som vid normalekvationerna.

7a) Vi skriver om problemet som ett första ordningens system:
$y' = f(y) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0 \\ y_2' = (y_1 - 1)(y_2 - 1), & y_2(0) = 0.5 \end{cases}.$
Euler framåt med steglängd $h = 0.1$ blir: $\begin{pmatrix} y_1(0.1) \\ y_2(0.1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.55 \end{pmatrix}$.
7b) Jakobianen blir $f_y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y_2 - 1 & y_1 - 1 \end{pmatrix}$ och i startpunkten blir den
$f_y'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{pmatrix}$. Egenvärdena till $f_y'(0)$ är $\lambda = -0.5 \pm 0.5i$.
Eftersom $|1 + h\lambda| = 0.9513 < 1$ för dessa λ så är metoden stabil.
7c) Eftersom lösningen till ODE-problemet nu även beror på a så skriver vi den som $y(t, a)$. Den ekvation som ska lösas är $g(a) \equiv a - y_2(1, a) + y_1(1, a) = 0$. Sekantmetoden för denna ekvation blir:
$a_{k+1} = a_k - \frac{a_k - y_2(1,a_k) + y_1(1,a_k)(a_k - a_{k-1})}{a_k - y_2(1,a_k) + y_1(1,a_k) - a_{k-1} + y_2(1,a_{k-1}) - y_1(1,a_{k-1})}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$
med två startapproximationen a_0 och a_1. För varje nytt a_k måste alltså ODE-problemet lösas.

8a) Sökmetod: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, där α_k fås som lösning till linjesökningsproblemet: $min_{\alpha \in R}\ f(x_k + \alpha d_k)$.

8b) Sökriktningen s är en descentriktning i x_k om $\nabla f(a_k)^T s < 0$. Om B_k är positivt definit så gäller att $x^T B_k x > 0$ för varje vektor x. I vårt fall har vi $\nabla f(x_k)^T s_k = -s_k^T B_k s_k < 0$, alltså är s_k en descentriktning.

8c) $\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 - 1 \\ 2x_2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla f_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Linjesökning: Låt $g(\alpha) = f(x_0 + \alpha d_0)$ så får vi $g(\alpha) = 2\alpha^2 - 2\alpha, \quad g'(\alpha) = 4\alpha - 2$ Vi får minimum för $g(\alpha)$ i punkten $\alpha = 0.5$. Detta ger $x_1 = x_0 + \alpha d_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.