Institutionen för
Matematiska Vetenskaper
Göteborg

TENTAMEN I
LINJÄR ALGEBRA OCH NUMERISK ANALYS F1, TMA671
2011-01-15

DAG: Lördag 15 januari 2011 TID: 8.30 - 12.30 SAL: V

Ansvarig:	Ivar Gustafsson, tel: 0705-335450
Förfrågningar:	Oskar Hamlet, tel 0703-088304
Lösningar:	Anslås vid sal MVF21
Resultat:	Tentan beräknas vara rättad senast 7 februari, resultat tillsänds dig.
Betygsgränser:	30, 42, 54 av maximalt 60 poäng
	Bonus (högst 10 poäng) från inlämningsuppgifter får tillgodoräknas.
Hjälpmedel:	Inga

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på lämpligt sätt
- Börja varje ny uppgift på nytt blad
- Alla svar era skall väl motiveras

LYCKA TILL!

Uppgift 1.
Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
a) Bestäm rangen $Rank(A)$. **(2p)**
b) Bestäm de singulära värdena till A. **(3p)**
c) Betrakta approximationerna A_k till A, där A_k är den trunkerade SVD-summan av A med k termer i summan. Hur stort blir felet $\|A - A_1\|_2$ respektive $\|A - A_2\|_2$? **(2p)**

Uppgift 2.
Betrakta Householdermatrisen $H = I - 2uu^T$, där $u \in R^n$ är en vektor med norm $\|u\|_2 = 1$.
a) Visa att H är ortogonal. **(2p)**
b) Visa att H är en spegling i ett plan ortogonalt mot u. **(2p)**
c) Utför första steget i en kompakt QR-faktorisering med Householdertransformation av matrisen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **(4p)**
d) Visa att alla egenvärden till H har beloppet lika med 1. **(2p)**

Uppgift 3.
Låt $T : C^1(R) \to C(R)$ vara definierad av $T(f) = hf + (gf)'$ (derivering), där $h \in C(R)$ och $g \in C^1(R)$ är två fixa givna funktioner.
a) Visa att T är linjär. **(2p)**
b) Låt $h(t) = t$ och $g(t) = t^2$ och betrakta $T : P_n \to P_{n+1}$, där P_n är rummet av polynom av grad $\leq n$. Bestäm matrisen för avbildningen T i standardbaserna för P_n och P_{n+1}. **(3p)**
c) Låt $n = 2$. Visa att $\{1,\ t-1,\ t^2+1\}$ är bas för P_2 och $\{1,\ t-1,\ t^2+1,\ t^3+t^2\}$ är bas för P_3 och bestäm matrisen för avbildningen i b)-uppgiften i dessa baser. **(4p)**

Uppgift 4.
a) Lös följande system av differentialekvationer med diagonaliseringsmetoden

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) & x_1(0) = 2 \\ x_2'(t) = -5x_2(t) + x_3(t) & x_2(0) = -3 \\ x_3'(t) = 2x_2(t) - 4x_3(t) & x_3(0) = -3 \end{cases}. \quad \textbf{(4p)}$$

b) Vi vill göra ett steg med Eulers bakåtmetod och steglängd $h = 0.1$ från $x(0)$ på problemet i a)-uppgiften. Skriv explicit (med alla tal angivna) upp det ekvationssystem som ska lösas för att få approximationen efter steget. Systemet behöver inte lösas. **(3p)**

Uppgift 5.
a) Definiera vad som menas med ett *flyttalssystem*. **(2p)**.
b) Definiera begreppen *underflow* och *overflow* i ett flyttalssystem. **(2p)**
c) Definiera *avrundningsenheten* μ och visa att relativa felet vid avrundning till ett flyttal är begränsat av μ. **(3p)**

Uppgift 6.
Betrakta följande system av icke-linjära ekvationer:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1^3 - x_2^2 - 2x_1 = -1 \\ \quad x_3^2 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

a)Gör en iteration med Newtons metod utgående från startapproximation $x^{(0)} = (0\ \ 0\ \ 0)^T$. **(4p)**
b) Efter k iterationer har du en approximation $x^{(k)}$. Ange hur du skulle göra för att få en feluppskattning för approximationen $x^{(k)}$ till lösningen x^*. **(3p)**

Uppgift 7.
a) Definiera vad som menas med en *tillåten riktning* och vad som menas med en *descentriktning* vid optimering med bivillkor. Ge exempel på en tillåten descentriktning. **(3p)**.
b) Betrakta ett icke-linjärt optimeringsproblem i flera variabler med flera likhetsbivillkor. Formulera Lagranges multiplikatormetod för problemet och skriv upp det icke-linjära ekvationssystem som metoden leder till. **(3p)**

Uppgift 8. Betrakta prediktor/korrektorparet Eulers framåtmetod som prediktor och Trapetsmetoden som korrektor för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av ordinära differentialekvationer.
a) Anta att man gör *en* fixpunktsiteration i korrektorn. Skriv upp den explicita metod man då får. **(3p)**
b) Bestäm approximationsordning för metoden i a-uppgiften. **(2p)**
c) Bestäm stabilitetsområdet för metoden i a-uppgiften. **(2p)**

Institutionen för
Matematik
Göteborg

F1 - Linjär algebra och numerisk analys, TMA671
Lösningar till tentamen 15 januari 2011

1a) Att rangen är lika med 2 följer av att två singulära värden är skilda från 0 enligt lösningen av b)-uppgiften.

1b) De singulära värdena är roten ur egenvärdena till matrisen $A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.
Egenvärdena fås från lösningen av den karakteristiska ekvationen:
$(4-\lambda)((4-\lambda)(8-\lambda)-32) = 0$, med lösningar $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 12$.
De singulära värdena till A blir alltså (i storleksordning) $\sigma_1 = \sqrt{12}, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0$.
1c) Enligt teorin för trunkerad SVD gäller $\|A - A_1\|_2 = \sigma_2 = 2$ och $\|A - A_2\|_2 = \sigma_3 = 0$.

2a) $H^T = (I - 2uu^T)^T = I^T - 2(u^T)^T(u^T) = I - 2uu^T = H$. Vidare är $H^TH = HH = (I - 2uu^T)(I - 2uu^T) = I - 2uu^T - 2uu^T + 4u(u^Tu)u^T = I$.
2b) För en godtycklig vektor x blir $Hx = x - 2u^Txu = x - \alpha u$, för skalären $\alpha = u^Tx$. Eftersom H är ortogonal gäller att x och Hx har samma längd, alltså är $Hx = x - \alpha u$ spegling av x i plan med u som normal.
2c) Låt $\hat{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$. Den andra kolonnen blir då $H \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2(-25)\frac{1}{25\cdot 2} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och första steget i QR-faktoriseringen är klar: $A^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2d) För egenvärde λ och egenvektor v gäller $Hv = \lambda v$. Det följer att $\|Hv\|_2 = |\lambda|\|v\|_2$ och eftersom H är ortogonal, enligt a)-uppgiften, så är $\|Hv\|_2 = \|v\|_2$ och därmed gäller att $|\lambda| = 1$.

3a) $T(f_1 + f_2) = h(f_1 + f_2) + (g(f_1 + f_2))' = h(f_1 + f_2) + (gf_1 + gf_2)'$
$= hf_1 + hf_2 + (gf_1)' + (gf_2)' = hf_1 + (gf_1)' + hf_2 + (gf_2)' = T(f_1) + T(f_2)$.
$T(cf) = h(cf) + (g(cf))' = c(hf) + c(gf)' = cT(f)$.

3b) Standardbasen för P_n är $\mathcal{B} = \{b_i = t^{i-1}\}_{i=1}^{n+1}$. Avbildningen på baselementen blir $T(b_1) = t + 2t = 3b_2$, $T(b_2) = t^2 + 3t^2 = 4b_3$, $T(b_n) = t^n + (n+1)t^n = (n+2)b_{n+1}$. Matrisen blir

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 3 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 4 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n+3 \end{bmatrix}.$$

3c) Den nya basen för P_3 är $\mathcal{C} = \{1,\ t-1,\ t^2+1,\ t^3+t^2\}$. Överföringsmatrisen till bas $\mathcal{B} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Denna matris är reguljär så basen $\mathcal{C}$ är ok! (Den nya basen för P_2 är då också ok!)

För avbildningens matris i dessa baser beräknar vi $T(c_1) = T(1) = 3t = 3c_2 + 3c_1$, $T(c_2) = T(t-1) = 4t^2 - 3t = 4c_3 - 3c_2 - 7c_1$, $T(c_3) = T(t^2+1) = 5t^3 + 3t = 5c_4 - 5c_3 + 3c_2 + 8c_1$.

Matrisen blir då $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

4a) Problemet är på matrisform $x' = Ax$, där $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer beräknas. Egenvärdena är $\lambda_1 = -1$ samt egenvärdena till matrisen $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, som är $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = -3$.

Motsvarande egenvektorer fås genom lösning av resp. homogent ekvationssystem $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ och blir: $v_1 = (1,0,0)^T$, $v_2 = (0,1,-1)^T$ och $v_3 = (3,-2,-4)^T$.

Lösningsformeln är sedan

$$x = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + c_3e^{\lambda_3 t}v_3 = c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^{-6t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3e^{-3t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna c_1, c_2 och c_3 bestäms från begynnelsevillkoren genom ekvationssystemet $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$, med lösning $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$.

Lösningen blir alltså $x = -e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{-6t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

4b) Eulers bakåtmetod ser ut så här: $y_{k+1} = y_k + hAy_{k+1}$ som kan skrivas $(I-hA)y_{k+1} = y_k$. y_1 fås alltså från lösningen av ett ekvationssystem med matris $I-hA = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 1.5 & -0.1 \\ 0 & -0.2 & 1.4 \end{bmatrix}$ och högerled $y_0 = [2, \ -3, \ -3]^T$.

5a) Kvadruppeln $(\beta, \ p, \ L, \ U)$ definierar tal på formen $x = m \cdot \beta^e$, där $m = \pm d_0.d_1 d_2 ... d_{p-1}, \ 0 \leq d_i < \beta, \ 0 < d_0 < \beta, \ 1 \leq |m| < \beta, \ L \leq e \leq U$.

5b) ”underlow”-gräns är minsta positiva tal i ett flyttalssystem $= \beta^L$, ”overflow”-gräns är största positiva tal $= \beta^{U+1}(1-\beta^{-p})$.

5c) Avrundningsenheten är $\mu = 0.5\beta^{1-p}$. För beviset har vi $x = m \cdot \beta^e, \ 1 \leq |m| < \beta$. Flyttalet blir $fl(x) = m_r \cdot \beta^e$, där m_r är avrundat till p siffror dvs $|m_r - m| \leq 0.5\beta^{1-p}$. Det följer att $|fl(x) - x| \leq 0.5\beta^{1-p}\beta^e$ och för det relativa felet får vi $|\frac{fl(x)-x}{x}| \leq \frac{0.5\beta^{1-p}\beta^e}{|m|\beta^e} = \frac{0.5\beta^{1-p}}{|m|} \leq 0.5\beta^{1-p}$.

6a) Vi ska lösa $f(x) = 0$ där $f = \begin{cases} x_1^2 + 2x_2 - x_3 + 1 \\ x_1^3 - x_2^2 - 2x_1 + 1 \\ x_3^2 + x_2 - x_3 - 1 \end{cases}$.

Jacobianen blir $J = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2 & -1 \\ 3x_1^2 - 2 & -2x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x_3 - 1 \end{bmatrix}$

Vi får $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - J_0 \backslash f_0$

Ekvationssystem $J_0 s_0 = -f_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} s_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + s_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

6b) Den metodoberoende feluppskattningen lyder: $\|\delta x\| \lesssim \|J(\hat{x})^{-1} f(\hat{x})\|$. I praktiken innebär det att vi får lösa ekvationssystemet $J(\hat{x})s = f(\hat{x})$ med $\hat{x} = x^{(k)}$ och ta $\|s\|$ som (approximativ) felgräns.

7a) Låt optimeringsproblemet vara
$min\ f(x)$ då $x \in X$,
där X är det tillåtna området.
s är en tillåten riktning i x om $x + \alpha s \in X$ för $0 < \alpha < \delta_1$ för något δ_1.
s är en descentriktning i x om $f(x + \alpha s) < f(x)$ för $0 < \alpha < \delta_2$ för något δ_2.
Om x ligger i det inre av X så är s en tillåten decsentriktning om $\nabla f(x)^T s < 0$.

7b) Vi har problemet $\min f(x)$ då $g(x) = 0$ med $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$. Lagranges metod är att söka extrempunkt till $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$ där $\lambda \in R^m$ är Lagrangemultiplikatorerna. Vi får ekvationssystemet:
$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

8a) Trapetsmetoden är: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$
Med en fixpunktsiteration från Eulers framåtmetod blir metoden:
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))]$.

8b) Metoden på testproblemet $y' = \lambda y$ blir
$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + h\lambda y_k)] = y_k(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2})$.
Formeln stämmer till tre termer med exakta lösningens tillväxtfaktor $e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + ...$ och metoden är då av ordning 2.

8c) Stabilitetsområdet är de $z = h\lambda$ som ger begränsade lösningar.
Från b)-uppgiften ger detta: $\{z \in C; |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$.